Theoretische Physik 2

Stefan Weinzierl

14. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Inhalt:

- Der Lagrange-Formalismus
- Der Hamilton-Formalismus
- Anwendungen

Literatur:

- H. Goldstein, Klassische Mechanik, Aula-Verlag, Wiesbaden
- L. Landau und E. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1: Mechanik, Akademie-Verlag, Berlin
- F. Scheck, Theoretische Physik 1: Mechanik, Springer, Berlin
- A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band 1: Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig

1.1 Zusammenfassung der Newtonschen Mechanik

Wir beschreiben die Position eines Massepunktes durch

$$\vec{x}(t)$$

Die Position kann von der Zeit t abhängen, wir sprechen daher von einer Bahnkurve. Die Geschwindigkeit ist definiert als die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t).$$

Als Beschleunigung versteht man die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit – oder äquivalent hierzu die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t).$$

Ableitungen nach der Zeit werden auch oft mit einem Punkt gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{\vec{x}}(t), \\ \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t), \end{aligned}$$

Der Impuls eines Massepunktes ist gegeben durch das Produkt seiner Masse mit der Geschwindigkeit:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t).$$

Wir bezeichnen Kräfte mit dem Buchstaben $\vec{F}$ (von englisch "force"), auch der Buchstabe $\vec{K}$ (von deutsch "Kraft") ist gebräuchlich.

Der Drehimpuls ist definiert durch das Kreuzprodukt des Ortsvektors mit dem Impulsvektor:

$$\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{p}(t) = m\left(\vec{x}(t) \times \vec{v}(t)\right).$$

Das Drehmoment bezeichnen wir mit $\vec{M}$. Wirkt auf einen Massepunkt die Kraft $\vec{F}$, so ist das zugehörige Drehmoment (bezüglich des Urspungs des Koordinatensystems):

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F}.$$

Ein Beispiel für eine Kraft ist die Gravitationskraft. Ein Massepunkt der Masse m_j übt auf einen Massepunkt der Masse m_i eine Kraft

$$\vec{F}_{ij} = G m_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^3}$$

aus. Hierbei ist G die Newtonsche Konstante:

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}.$$

Die Position des Teilchens i ist durch den Ortsvektor $\vec{x}_i$ gegeben, die Position des Teilchens j durch den Ortsvektor $\vec{x}_j$. Die Gravitationskraft ist immer anziehend.

Das Gravitationsgesetz läßt sich auf Systeme mit mehreren Teilchen verallgemeinern. Liegt ein System von N Teilchen vor und betrachten wir die Kraft, die auf das i-te Teilchen wirkt, so gilt

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^3}.$$

Ein weiteres Beispiel ist die elektromagnetische Lorentzkraft. Befindet sich ein Teilchen i mit der Ladung q_i in einem elektrischen oder magnetischen Feld, so spürt es die Kraft

$$\vec{F}_i = q_i \left(\vec{E} + f_F \vec{v}_i \times \vec{B}\right).$$

Hierbei ist $f_F = 1$ im SI-System und $f_F = 1/c$ im Gaußschen System.

Die zentrale Aussage der Newtonschen Mechanik ist die Beziehung zwischen der Masse m_i eine Teilchens, der Beschleunigung des Teilchens und der Kraft $\vec{F}_i$, die auf dieses Teilchen wirkt:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i.$$

Wir betrachten die Kräfte noch etwas abstrakter: Allgemein bezeichnet man eine Kraft als **Zentralkraft**, fall sie immer auf einen Punkt oder von ihm weg gerichtet ist. Wählt man diesen Punkt als Ursprung des Koordinatensystems, so ist eine Zentralkraft von der Form

$$\vec{F} = f(r)\hat{x},$$

wobei $r = |\vec{x}|$ und $\hat{x}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{x}$ ist. Befindet sich ein Körper der Masse m im Gravitationsfeld eine zweiten Körpers mit der Masse M, so ist dies ein typisches Beispiel für eine Zentralkraft. In diesem Fall ist

$$f(r) = -\frac{GmM}{r^2}.$$

Desweiteren haben wir den Begriff einer **konservativen Kraft**: Unter einer konservativen Kraft versteht man eine Kraft, welche sich als der negative Gradient eines zeitunabhängigen Potentials $V(\vec{x})$ schreiben läßt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}).$$

Jede Zentralkraft ist eine konservative Kraft. Für das obige Beispiel einer Masse m im Gravitationsfeld einer weiteren Masse M haben wir

$$V(\vec{x}) = -\frac{GmM}{|\vec{x}|}.$$

Bemerkung: $\vec{\nabla}$ bezeichnet den Nabla-Operator, dessen Wirkung auf eine Funktion gegeben ist durch

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun ein System von n Teilchen an den Orten $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_n$ mit den Massen m_1, m_2, ..., m_n. Die inneren Kräfte, die von Teilchen j auf Teilchen i wirken, bezeichnen wir mit $\vec{F}_{ij}$, eventuell auftretende äußere Kräfte, welche auf Teilchen i wirken, bezeichnen wir mit K_i. Für die inneren Kräfte wollen wir annehmen, daß sie Potentialkräfte sind

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}\left(\left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|\right),$$

sowie daß

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

gilt. Der Index i bei $\vec{\nabla}_i$ gibt an, daß die Ableitungen nach den Komponenten von $\vec{x}_i$ erfolgen.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i.$$

Für die Gesamtmasse des Systems führen wir die Bezeichnung

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

ein, den Schwerpunkt des Systems bezeichnen wir mit

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i.$$

Für den Schwerpunkt gilt:

$$M\ddot{\vec{X}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i.$$

Die zeitliche Änderung des gesamten Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \times \vec{K}_i,$$

wobei der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ durch

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i \right)$$

gegeben ist. Die zeitliche Änderung der gesamten inneren Energie ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{K}_i,$$

wobei

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2, \\ U &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} V_{ij} \left(\left| \vec{x}_i - \vec{x}_j \right| \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Spezialfall eines abgeschlossenen Systems. In diesem Fall verschwinden per Definition alle äußeren Kräfte:

$$\vec{K}_i = 0.$$

Aus dem Schwerpunktsatz folgt mit der Definition des Gesamtimpulses

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{x}}_i,$$

daß der Gesamtimpuls erhalten ist:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{0}.$$

Für die Bewegung des Schwerpunktes folgt aus $\ddot{\vec{X}} = \vec{0}$, daß sich der Schwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie bewegt. Ausgedückt durch den Impuls erhält man für die Bewegung des Schwerpunktes

$$\vec{X}(t) = \frac{1}{M}\vec{P}t + \vec{X}(t_0),$$

wobei $\vec{X}(t_0)$ die Integrationskonstante aus der Integration der Bewegungsgleichung ist. Der Drehimpulssatz vereinfacht sich für ein abgeschlossenes System zu

$$\dot{\vec{L}} = 0.$$

Der Energiesatz vereinfacht sich für ein abgeschlossenes System zu

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0.$$

Wir setzen

$$E = T+U.$$

Wir können zusammenfassend sagen, daß ein abgeschlossenes System durch zehn Größen

$$\vec{L}, \vec{P}, E, \vec{X}(t_0)$$

charakterisiert ist. Diese zehn Größen bezeichnet man als die klassischen zehn **Bewegungsintegrale** oder die klassischen zehn **Erhaltungsgrößen**. Sie reflektieren die Invarianz eines abgeschlossenen Systems unter den zehn kontinuierlichen Symmetrien der Galilei-Gruppe (Zeittranslation, Raumtranslation, Drehinvarianz, Transformation auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem).

Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen noch etwas genauer diskutieren. Wir betrachten ein System mit n Teilchen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i.$$

Dies ist ein System von $(3n)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Größen

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t.$$

Wir führen dieses System in ein System von $(6n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung über, indem wir die Impulse

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$$

einführen. Wir erhalten somit das System

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}_i &= \frac{1}{m_i}\vec{p}_i, \\
\dot{\vec{p}}_i &= \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij} + \vec{K}_i.
\end{aligned}$$

Dies ist ein System von $(6n)$ Differentialgleichungen in den Grßen

$$x_1, y_1, z_1, p_1^x, p_1^y, p_1^z, \ldots, x_n, y_n, z_n, p_n^x, p_n^y, p_n^z, t.$$

Wir bezeichen den Raum aller Koordinaten

$$\vec{y} \;=\; \left(x_1, y_1, z_1, p_1^x, p_1^y, p_1^z, \ldots, x_n, y_n, z_n, p_n^x, p_n^y, p_n^z\right)^T,$$

als den **Phasenraum** eines Systems von n Teilchen. Dieser Phasenraum hat die Dimension $(6n)$. Das System der $(6n)$ gekoppelten Differentialgleichungen läß sich auf die Form

$$\frac{d}{dt}\vec{y} \;=\; \vec{G}(t, \vec{y})$$

bringen. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen ergibt sich aus der Theorie eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. Falls $\vec{G}$ stetig in t und $\vec{y}$ ist und falls $\vec{G}$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, so gibt es eine eindeutige Lösung dieser Differentialgleichung zu den Anfangswerten $\vec{x}_i(t_0)$ und $\vec{p}_i(t_0)$.

2 Der Lagrange-Formalismus

2.1 Die Lagrange-Formulierung der klassischen Mechanik

Wir haben gesehen, daß wir zu der Beschreibung eines Systems von n Teilchen entweder $(3n)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung oder $(6n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung benötigen. Wir können uns nun fragen, ob wir diese Information auch "eleganter" oder kompakter angeben können. Dies ist in der Tat möglich. Ein physikalisches System mit n Teilchen kann durch die Angabe einer einzigen **Lagrange-Funktion**

$$L\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n, t\right)$$

beschrieben werden. Diese Lagrange-Funktion hängt von $(6n+1)$ Variablen ab: $(3n)$ Ortkoordinaten $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_n$, $(3n)$ Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_1$, ..., $\dot{\vec{x}}_n$ sowie der Zeit t. Es empfiehlt sich, die $(3n)$ Ortskoordinaten zu einem einzigen Vektor

$$\vec{x} \quad = \quad (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)^T$$

der Dimension $(3n)$ zusammenzufassen. Ebenso faßt man die Geschwindigkeiten zu einem Vektor

$$\dot{\vec{x}} \quad = \quad (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)^T$$

der Dimension $(3n)$ zusammen. Die Lagrange-Funktion läßt sich somit als

$$L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right)$$

schreiben. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen erhält man aus der Lagrange-Funktion, indem man die **Euler-Lagrange-Gleichungen** aufstellt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right)}{\partial x_i} \quad = \quad 0,$$

wobei i eine der $(3n)$ Komponenten der Vektoren $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ bezeichnet. Hierbei sind die partiellen und totalen Ableitungen wie am folgenden Beispiel verdeutlicht zu verstehen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t\right) &= c_1, \\
\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t\right) &= c_2, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t\right) &= c_3, \\
\frac{d}{dt}\left(c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t\right) &= c_1 \dot{x} + c_2 \ddot{x} + c_3.
\end{aligned}$$

Man erhält aus der Kenntnis der Lagrange-Funktion auch die Gesamtenergie des Systems, indem man

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - L$$

berechnet.

Für den Fall, daß die Kräfte sich durch ein Potential darstellen lassen, nimmt die Lagrange-Funktion für das System die einfache Form

$$L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) = T\left(\dot{\vec{x}}\right) - V\left(\vec{x}\right)$$

an, d.h. sie ist gegeben durch die Differenz von kinetischer Energie und potentieller Energie. In diesem Fall hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab.

Diese Aussagen werden wir später auf zwei Arten herleiten: Zum einen über das Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsches Prinzip), zum zweiten über das Prinzip der virtuellen Verrückungen (d'Alembertsches Prinzip).
Zunächst ist es allerdings sinnvoller, sich mit der Lagrange-Funktion und den Euler-Lagrange-Gleichungen vertraut zu machen und diese Aussagen nur anhand von einfachen Beispielen zu überprüfen.

Wir beginnen mit einem einzelnen Teilchen, welches sich im Kraftfeld einer konservativen Kraft bewegt. Der Ort des Teilchens wird durch den Dreiervektor $\vec{x}(t)$ beschrieben, die Geschwindigkeit des Teilchens durch den Dreiervektor $\dot{\vec{x}}(t)$. Die kinetische Energie des Teilchens ist wie üblich durch

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

gegeben. Die Kraft auf das Teilchen soll konservativ sein, daher läßt sie sich durch ein Potential darstellen:

$$\vec{F}\left(\vec{x}\right) = -\vec{\nabla} V\left(\vec{x}\right).$$

Die potentielle Energie des Teilchens ist dann einfach

$$V\left(\vec{x}\right).$$

Somit ergibt sich die Lagrange-Funktion in diesem Fall zu

$$L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) = T\left(\dot{\vec{x}}\right) - V\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V\left(\vec{x}\right).$$

Die Lagrange-Funktion hängt in diesem Fall nur von $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ ab, sie hängt nicht explizit von der Zeit t ab. Wir berechnen nun $\partial L / \partial x_i$ und $\partial L / \partial \dot{x}_i$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V\left(\vec{x}\right),$$

da die kinetische Energie nur von $\dot{\vec{x}}$, aber nicht von $\vec{x}$ abhängt. Desweiteren haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i.$$

Hier haben wir ausgenutzt, daß die potentielle Energie $V(\vec{x})$ von $\dot{\vec{x}}$ unabhängig ist. Wir benötigen noch die Zeitableitung von $\partial L/\partial \dot{x}_i$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i.$$

Somit lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial x_i} &= 0, \\
m\ddot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) &= 0.
\end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) = -F_i,$$

und daher lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen auch als

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

schreiben. Dies ist nichts anderes als die uns schon bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung. Wir überprüfen nun noch die Beziehung für die Gesamtenergie. Es ist

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m\dot{x}_i^2 = m\dot{\vec{x}}^2,$$

und somit

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - L = m\dot{\vec{x}}^2 - L = m\dot{\vec{x}}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}),$$

was genau der Summe aus kinetischer und potentieller Energie entspricht.

Wir können das Beispiel eines Teilchens leicht auf ein System von n Teilchen verallgemeinern. Wir nehmen wieder an, daß die Kräfte konservativ sind, d.h. die Kraft auf das j-te Teilchen ist gegeben durch

$$\vec{F}_j = -\vec{\nabla}_j V\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\right).$$

Wir fassen alle Koordinaten zu einem Vektor der Dimension $(3n)$ zusammen:

$$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)^T$$

Die Lagrange-Funktion ist wieder die Differenz von kinetischer Energie und potentieller Energie:

$$L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) = T\left(\dot{\vec{x}}\right) - V\left(\vec{x}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{x}}_j^2\right) - V\left(\vec{x}\right).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich nun zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right)}{\partial x_i} &= 0, \qquad 1 \leq i \leq 3n \\ m_j \ddot{\vec{x}}_j + \vec{\nabla}_j V\left(\vec{x}\right) &= 0, \qquad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

(In der ersten Zeile bezeichnet i eine der $(3n)$ Komponenten des Vektors $\vec{x}$, in der zweiten Zeile bezeichnet j eines der n Teilchen.) Somit finden wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für das j-te Teilchen wieder

$$m_j \ddot{\vec{x}}_j = \vec{F}_j.$$

Wir berechnen auch die Gesamtenergie und finden

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - L = \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\vec{x}}_j^2\right) - L = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{x}}_j^2\right) + V\left(\vec{x}\right).$$

Die Gesamtenergie ist wie erwartet die Summe aus kinetischer und potentieller Energie.

Als drittes und etwas schwierigeres Beispiel betrachten ein Beispiel, in dem die Kräfte nicht konservativ sind. Wir betrachten ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Wir erinnern uns, daß die Lorentzkraft auf ein Teilchen mit der Ladung q im Gaußschen Maßsystem gegeben ist durch

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right).$$

Das elektrische und magnetische Feld können wir durch ein skalares Potential Φ und ein Vektorpotential $\vec{A}$ beschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{x}, t\right) &= -\vec{\nabla}\Phi\left(\vec{x}, t\right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}\left(\vec{x}, t\right), \\ \vec{B}\left(\vec{x}, t\right) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\left(\vec{x}, t\right). \end{aligned}$$

Da sowohl zum einen das elektrische Feld $\vec{E}$ als auch das magnetische Feld explizit von der Zeit abhängen können und da zum zweiten die Lorentzkraft von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängt, ist diese Kraft im allgemeinen nicht konservativ. Wir können allerdings wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen aus einer Lagrange-Funktion ableiten. Diese Lagrange-Funktion lautet

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V_{\text{Lorentz}}\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right),$$

wobei $V_{\text{Lorentz}}\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)$ ein verallgemeinertes Potential darstellt, welches nun explizit von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ und der Zeit t abhängt:

$$V_{\text{Lorentz}}\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right) = q\left[\Phi\left(\vec{x},t\right) - \frac{1}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}\left(\vec{x},t\right)\right].$$

Wir überprüfen wieder, ob die Euler-Lagrange-Gleichung die Newtonsche Bewegungsgleichung liefert. Es ist nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial x_i} &= -q\frac{\partial\Phi\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i} + \frac{q}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\partial\vec{A}\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i},\\
\frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial \dot{x}_i} &= m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i\left(\vec{x},t\right),\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial \dot{x}_i} &= m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_i\left(\vec{x},t\right)}{\partial t} + \dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}A_i\left(\vec{x},t\right)\right].
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir die Kettenregel angewendet:

$$\frac{d}{dt}A_i\left(\vec{x},t\right) = \frac{\partial A_i\left(\vec{x},t\right)}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}A_i\left(\vec{x},t\right)\right)\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial A_i\left(\vec{x},t\right)}{\partial t} + \dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}A_i\left(\vec{x},t\right).$$

Somit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial x_i} &= 0,\\
m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\frac{\partial A_i\left(\vec{x},t\right)}{\partial t} + \frac{q}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}A_i\left(\vec{x},t\right) + q\frac{\partial\Phi\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i} - \frac{q}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\partial\vec{A}\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\vec{E}\left(\vec{x},t\right) = -\vec{\nabla}\Phi\left(\vec{x},t\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\left(\vec{x},t\right)$$

und somit

$$\frac{q}{c}\frac{\partial A_i\left(\vec{x},t\right)}{\partial t} + q\frac{\partial\Phi\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i} = -qE_i\left(\vec{x},t\right).$$

Das magnetische Feld ist gegeben durch

$$\vec{B}\left(\vec{x},t\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}\left(\vec{x},t\right).$$

Betrachten wir nun die x-Komponente von

$$\dot{\vec{x}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x},t)\right),$$

so findet man

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x},t)\right)\Big|_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Ähnliche Identitäten findet man für die y- und die z-Komponente. Somit läßt sich zeigen, daß

$$\dot{\vec{x}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x},t)\right)\Big|_i = \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial x_i} - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x},t)$$

gilt. Somit ist

$$\frac{q}{c}\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x},t) - \frac{q}{c}\dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial x_i} = -\frac{q}{c}\dot{\vec{x}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x},t)\right)\Big|_i = -\frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x},t)\Big|_i.$$

Fügen wir alles zusammen, so erhalten wir aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Beziehung

$$m\ddot{\vec{x}} - q\vec{E}(\vec{x},t) - \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x},t) = 0.$$

Dies ist nichts anderes als die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x},t)\right).$$

Wir betrachten noch die Gesamtenergie des Teilchens

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - L = m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x},t) - L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + q\Phi(\vec{x},t).$$

Der Term proportional zu $\vec{v} \cdot \vec{A}$ hebt sich auf und man erhält die kinetische Energie des Teilchens plus einen Term $q\Phi$.

2.2 Das Wirkungsprinzip

Im vorherigen Abschnitt haben wir anhand einiger Beispiele gesehen, daß man aus der Kenntnis der Lagrange-Funktion die Newtonschen Bewegungsgleichungen herleiten kann, indem man die Euler-Lagrange-Gleichungen aufstellt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right)}{\partial x_i} = 0,$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Euler-Lagrange-Gleichungen aus einem fundamentaleren Prinzip folgen. Hierzu betrachten wir die **Wirkung**. Die Wirkung ist definiert für eine gegebene Bahnkurve $\vec{x}(t)$ als das Integral der Lagrange-Funktion über die Zeit von einem Anfangszeitpunkt t_a zu einem Endzeitpunkt t_b:

$$S = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, L\left(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t\right)$$

Wir können die Wirkungsgröße für verschiedene (nicht notwendigerweise physikalische) Bahnkurven $\vec{x}(t)$ betrachten, in dieser Weise wird die Wirkung S zu einem Funktional von $\vec{x}(t)$:

$$S\left[\vec{x}(t)\right] = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, L\left(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t\right)$$

Wir betrachten nun alle Bahnkurven $\vec{x}(t)$, welche die Randbedingungen

$$\vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \qquad \vec{x}(t_b) = \vec{x}_b,$$

erfüllen. In anderen Worten interessieren wir uns für alle Bahnkurven, welche die Bewegung eines Teilchens von Ort $\vec{x}_a$ zur Zeit t_a zum Ort $\vec{x}_b$ zur Zeit t_b beschreiben.

Das **Wirkungsprinzip** besagt nun, daß unter allen möglichen Bahnen die physikalische Bahn diejenige ist, welche die Wirkung minimiert. In Formeln bedeutet dies:

$$S\left[\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t)\right] \leq S\left[\vec{x}(t)\right] \quad \text{für alle} \quad \vec{x}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \vec{x}(t_b) = \vec{x}_b.$$

Das Wirkungsprinzip wird oft auch als **Prinzip der kleinsten Wirkung** oder als **Hamiltonsches Prinzip** bezeichnet.

Wir können nun zeigen, daß aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen.
Nehmen wir an, daß $\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t)$ das Funktional S minimiert. Dann betrachten wir hilfsweise eine zweimal stetig differenzierbare Bahn $\delta\vec{x}(t)$ mit

$$\delta\vec{x}(t_a) = 0, \qquad \delta\vec{x}(t_b) = 0.$$

Dann beschreibt $\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t) + \varepsilon\, \delta\vec{x}(t)$ eine Bahn, welche die Randbedingungen

$$\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t_a) + \varepsilon\, \delta\vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \qquad \vec{x}_{\mathrm{phys}}(t_b) + \varepsilon\, \delta\vec{x}(t_b) = \vec{x}_b$$

erfüllt. Hierbei ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir sagen, daß die Bahn $\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t) + \varepsilon\, \delta\vec{x}(t)$ eine **Variation** der Bahn $\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t)$ ist. Da $\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t)$ nach Annahme die Wirkung minimiert, gilt

$$S\left[\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t)\right] \leq S\left[\vec{x}_{\mathrm{phys}}(t) + \varepsilon\, \delta\vec{x}(t)\right],$$

für alle Variationen von $\vec{x}_{\text{phys}}(t)$. Insbesondere gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon}\, S\left[\vec{x}_{\text{phys}}(t)+\varepsilon\,\delta\vec{x}(t)\right]\Big|_{\varepsilon=0} \;=\; 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} S\left[\vec{x}_{\text{phys}}(t)+\varepsilon\,\delta\vec{x}(t)\right] &= \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, L\left(\vec{x}_{\text{phys}}(t)+\varepsilon\,\delta\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}_{\text{phys}}(t)+\varepsilon\,\delta\dot{\vec{x}}(t), t\right) \\
&= \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \sum\limits_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i(t)\right].
\end{aligned}$$

Den zweiten Ausdruck können wir partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i(t) &= \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{d}{dt}\delta x_i(t) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i(t)\Big|_{t_a}^{t_b} - \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i(t) = -\int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i(t).
\end{aligned}$$

Wegen $\delta x_i(t_a) = \delta x_i(t_b) = 0$ verschwinden die Randterme. Wir erhalten also

$$\sum\limits_i \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]\delta x_i(t) \;=\; 0.$$

Da dies für beliebige “Variationen” $\delta x_i(t)$ gilt, folgt daß jede eckige Klammer für sich verschwinden muß, also

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \;=\; 0.$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Bemerkung: Zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist nur die Bedingung

$$\frac{d}{d\varepsilon}\, S\left[\vec{x}_{\text{phys}}(t)+\varepsilon\,\delta\vec{x}(t)\right]\Big|_{\varepsilon=0} \;=\; 0$$

notwendig. Diese Gleichung besagt, daß die Wirkung für die physikalische Bahn **extremal** wird. Ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt, ist hierbei nicht relevant. Streng genommen sollte man daher auch vom “Prinzip der extremalen Wirkung” sprechen. Man schreibt auch oft, daß die physikalische Bahn diejenige ist, für die die Variation der Wirkung verschwindet:

$$\delta S\left[\vec{x}(t)\right] \;=\; 0.$$

2.3 Weitere Anwendungen der Variationsrechnung

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß sich die Euler-Lagrange-Gleichungen (und damit die Newtonschen Bewegungsgleichungen) aus der Forderung ergeben, daß die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ die Wirkung $S[\vec{x}(t)]$ minimiert. Zur Herleitung haben wir die Variationsrechnung benutzt. Wir wollen an dieser Stelle noch weitere Beispiele für die Anwendung der Variationsrechnung behandeln.

Beispiel 1: Die Geodätengleichung. Wir betrachten eine Schar von Kurven

$$\begin{aligned} \vec{f} \;&:\; [0,1] \to \mathbb{R}^3, \\ &\quad \lambda \to \vec{f}(\lambda) \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\vec{f}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun diejenige Kurve, welche die kürzeste Verbindung zwischen dem Anfangsort $\vec{x}_0$ und dem Endort $\vec{x}_1$ darstellt. Diese Kurve bezeichnet man als **Geodäte**.
Wir betrachten nun zunächst eine beliebige Kurve zu den gegebenen Randbedingungen. Die Kurvenlänge ist gegeben durch

$$l = \int_0^1 d\lambda \left| \frac{d\vec{f}(\lambda)}{d\lambda} \right| = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{df_x}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{df_y}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{df_z}{d\lambda}\right)^2}.$$

Die Kurvenlänge ist von der Parametrisierung unabhängig. Ist nun $df_x/d\lambda \neq 0$ für alle $\lambda \in [0,1]$, so können wir die die x-Koordinate als Kurvenparameter wählen. Wir setzen also

$$x = x_0 + \lambda\,(x_1 - x_0)\,.$$

Nach dieser Umparametrisierung ist unsere Kurve gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{f}} \;&:\; [x_0, x_1] \to \mathbb{R}^3, \\ &\quad x \to \vec{\tilde{f}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{f}_y(x) \\ \tilde{f}_z(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

und erhalten somit für die Kurvenlänge

$$l = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\tilde{f}_y'\right)^2 + \left(\tilde{f}_z'\right)^2},$$

wobei $\tilde{f}_y' = d\,\tilde{f}_y/dx$ und $\tilde{f}_z' = d\,\tilde{f}_z/dx$ ist.

Setzen wir nun

$$\vec{g}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_y(x) \\ \tilde{f}_z(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}'(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_y'(x) \\ \tilde{f}_z'(x) \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} L\left(\vec{g},\vec{g}',x\right) &= \sqrt{1+(\vec{g}'(x))^2}, \\ S\left[\vec{g}(x)\right] &= \int_{x_0}^{x_1} dx\, L\left(\vec{g},\vec{g}',x\right), \end{aligned}$$

so können wir das Geodätenproblem wie folgt umformulieren: Gesucht ist die Kurve, welche $S\left[\vec{g}(x)\right]$ minimiert. Eine notwendige Bedingung hierfür ist wieder, daß $S\left[\vec{g}(x)\right]$ ein Extremum annimmt, d.h.

$$\delta S\left[\vec{g}(x)\right] = 0.$$

Dies führt wieder zu den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial g_i'} - \frac{\partial L}{\partial g_i} = 0, \qquad i \in \{1,2\}.$$

In diesem Fall ist $\partial L/\partial g_i = 0$ und

$$\frac{\partial L}{\partial g_i'} = \frac{g_i'(x)}{\sqrt{1+(\vec{g}'(x))^2}}.$$

Somit ergibt sich für die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g_i'(x)}{\sqrt{1+(\vec{g}'(x))^2}}\right] = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{g_i'(x)}{\sqrt{1+(\vec{g}'(x))^2}} = c_i, \qquad i \in \{1,2\},$$

wobei c_1 und c_2 zwei Konstanten sind. Quadriert man die beiden Gleichungen für $i = 1$ und $i = 2$ und zählt sie dann zusammen, so läßt sich zeigen, daß

$$\left(\vec{g}'(x)\right)^2 = \text{const}$$

gilt. Somit folgt

$$g_i'(x) \quad = \quad \tilde{c}_i, \qquad i \in \{1,2\}.$$

Hieraus folgt nun wiederum

$$g_i(x) \quad = \quad \tilde{c}_i x + d_i, \qquad i \in \{1,2\}.$$

Berücksichtigt man nun die Randbedingungen

$$\begin{array}{ll} g_1(x_0) = y_0, & g_1(x_1) = y_1, \\ g_2(x_0) = z_0, & g_1(x_1) = z_1, \end{array}$$

so findet man

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + y_0, \\ g_2(x) &= (z_1 - z_0)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + z_0, \end{aligned}$$

Fügt man alles zusammen und geht man zurück auf die Parametrisierung mittels λ, so findet man

$$\vec{f} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_0 + \lambda (x_1 - x_0) \\ y_0 + \lambda (y_1 - y_0) \\ z_0 + \lambda (z_1 - z_0) \end{pmatrix}.$$

Dies stellt eine Gerade dar. Die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten $(x_0, y_0, z_0)^T$ und $(x_1, y_1, z_1)^T$ ist also eine gerade Strecke.

Beispiel 2: Die Brachistochronengleichung. Als zweites Beispiel wollen wir die Situation betrachten, in der eine Bahnkurve gesucht wird die zwei gegebene Punkte verbindet, so daß ein Teilchen unter dem Einfluß eines konstanten Schwerefeldes diese Bahn in kürzester Zeit durchläuft. Reibungskräfte sollen hierbei vernachläßigt werden. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ist nun nicht nach dem kürzesten Wege gefragt, sondern nach der kürzesten Zeit. Diese Frage ist zum Beispiel bei der Konstruktion von Notrutschen bei Flugzeugen relevant. Wir wollen gleich zu Beginn annehmen, daß die Bewegung in einer Ebene erfolgt, die wir als die x-z-Ebene wählen können. Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen z-Achse. Als Startpunkt wählen wir $(x_0, z_0) = (0, 0)$. Der Endpunkt sei

$$(x_1, z_1).$$

Da die Schwerkraft in Richtung der negativen z-Achse wirkt, sei $z_1 < 0$. Wir nehmen weiter an, daß die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens Null ist.

Wir können wieder wie zuvor x als Kurvenparameter wählen, d.h. die Kurve ist von der Form

$$\vec{f}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} x \\ z(x) \end{pmatrix},$$

mit

$$z(0) = 0, \qquad z(x_1) = z_1.$$

Hat das Teilchen die Geschwindigkeit v und durchläuft es das infinitessimale Wegelement ds längs der Kurve, so denötigt es hierfür die infinitessimale Zeit

$$\frac{ds}{v}$$

Das infinitessimale Wegelement längs der Kurve zwischen den Punkten mit den Kurvenparametern x und $x+dx$ ist

$$\sqrt{1+(z'(x))^2}dx.$$

Somit ergibt sich für die Gesamtzeit

$$t = \int\limits_0^{x_1} dx \, \frac{\sqrt{1+(z'(x))^2}}{v}.$$

Wir benötigen noch eine Beziehung für die Geschwindigkeit: Die Energieerhaltung liefert

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgz,$$

und somit ist

$$v = \sqrt{-2gz}.$$

Wir können das Problem nun wieder als Variationsproblem formulieren: Gesucht ist eine Kurve $z(x)$ mit $z(0) = 0$ und $z(x_1) = z_1$, so daß die Größe

$$S[z(x)] = \int\limits_0^{x_1} dx \, L\left(z, z', x\right), \qquad L\left(z, z', x\right) = \frac{\sqrt{1+(z'(x))^2}}{\sqrt{-2gz(x)}}$$

minimiert wird. Wir stellen wieder die Euler-Lagrange-Gleichung auf

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z} &= g\frac{\sqrt{1+(z')^2}}{(-2gz)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial L}{\partial z'} &= \frac{z'}{\sqrt{-2gz\left(1+(z')^2\right)}}, \\
\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z'} &= \frac{z''}{\sqrt{-2gz\left(1+(z')^2\right)}} - \frac{z'\left[-gz'\left(1+(z')^2\right) - 2gzz'z''\right]}{\left(-2gz\left(1+(z')^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

Fügt man nun alles zusammen, so findet man die Differentialgleichung

$$2zz'' + \left(z'\right)^2 + 1 \quad = \quad 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Durch Differenzieren überprüft man die folgenden Aussage: Jede Funktion, die die Differentialgleichung erster Ordnung

$$z\left(1 + \left(z'\right)^2\right) \quad = \quad \text{const}$$

erfüllt, erfüllt auch die obige Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir werden später im Rahmen des Noether-Theorems eine Methode kennenlernen, wie man aus der Kenntnis, daß die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Variablen x abhängt, die Differentialgleichung erster Ordnung relativ schnell finden kann. Im wesentlichen berechnet man

$$z'\frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{-2gz\left(1 + (z')^2\right)}}.$$

Aus dem Noether-Theorem folgt, daß dieser Ausdruck konstant ist. Dies ergibt die obige Differentialgleichung erster Ordnung.

Die Lösung der Differentialgleichung

$$z\left(1 + \left(z'\right)^2\right) \quad = \quad -2R$$

ist durch eine Zykloide gegeben:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R(\varphi - \sin\varphi), \\ z(\varphi) &= -R(1 - \cos\varphi), \end{aligned}$$

wie man leicht durch Einsetzen überprüft: Es ist zunächst

$$z' \quad = \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dx}{d\varphi}}{\frac{dz}{d\varphi}} = -\frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi},$$

und damit

$$z\left(1 + \left(z'\right)^2\right) \quad = \quad -R(1 - \cos\varphi)\left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{(1 - \cos\varphi)^2}\right) = -2R.$$

2.4 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

Wir sind bisher immer davon ausgegangen, daß ein System von n Teilchen durch $(3n)$ Ortskoordinaten beschrieben wird. Wir sprechen in diesem Fall von einem System mit $(3n)$ Freiheitsgraden.

Nun kann es aber durchaus sein, daß ein System von n-Teilchen weniger Freiheitsgrade zur Verfügung hat. Man denke hier zum Beispiel an eine Achterbahn. Der Wagen wird durch die Führungsschiene zu einer eindimensionalen Bewegung gezwungen. Der Wagen hat daher nur einen Freiheitsgrad. Ein weiteres Beispiel ist ein Teilchen auf der Oberfläche einer massiven Kugel, das durch die Gravitationskraft sich nur auf der Oberfläche der Kugel bewegen kann. Dieses Teilchen hat nur zwei Freiheitsgrade.

In diesen Fällen sprechen wir davon, daß das System **Zwangsbedingungen** unterworfen ist. Lassen sich die Zwangsbedingungen durch eine Gleichung, die die Koordinaten der Teilchen und der Zeit in Beziehung setzt und die die Form

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, t) = 0$$

hat, darstellen, so spricht man von **holonomen Zwangsbedingungen**. Ein einfaches Beispiel ist der Fall, in dem ein punktförmiges Teilchen zu einer Bewegung auf einer Kugeloberfläche mit Radius R einschränkt ist. In diesem Fall läß sich die Zwangsbedingung wie folgt angeben:

$$\vec{x}^2 - R^2 = 0.$$

Liegen mehrere holonome Zwangsbedingungen vor, so lassen sich diese durch ein System von Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, t) &= 0, \\ f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, t) &= 0, \\ ... &\quad ... \\ f_r(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, t) &= 0 \end{aligned}$$

angeben. Wir bezeichnen diese Zwangsbedingungen als unabhängig, falls die $(r \times 3n)$-Matrix

$$M_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

für alle t den Rang r hat.

Zwangsbedingungen, die nicht auf dieser Weise darstellbar sind, nennt man **nicht-holonom**. Beispiele für nicht-holonome Zwangsbedingungen sind Ungleichungen. Diese treten zum Beispiel auf, falls ein Gas in einen würfelförmigen Behälter eingeschlossen wird:

$$\begin{aligned} 0 \le x_i, &\quad x_i \le a, \\ 0 \le y_i, &\quad y_i \le a, \\ 0 \le z_i, &\quad z_i \le a, \qquad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Wir wollen noch ein weiteres Beispiel für nicht-holonome Zwangsbedingungen betrachten. Verwenden wir wieder den Vektor

$$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n)^T$$

für ein System von n Teilchen, so ist eine holonome Zwangsbedingung gegeben durch

$$f(\vec{x}, t) = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit, so erhält man

$$\left(\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \right) + \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

Wir betrachten nun allgemein Zwangsbedingungen der Form

$$\left(\sum_{i=1}^{3n} g_i(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + g_0(\vec{x}, t) = 0.$$

Gibt es eine Funktion $G(\vec{x}, t)$, so daß

$$\frac{\partial G(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = g_i(\vec{x}, t), \qquad \frac{\partial G(\vec{x}, t)}{\partial t} = g_0(\vec{x}, t),$$

gilt, so bezeichnet man die obige Gleichung als **exakt**. In diesem Fall läßt sich die Differentialgleichung integrieren und man findet

$$G(\vec{x}, t) = c,$$

d.h. wir erhalten wieder eine holonome Zwangsbedingung. Nun ist aber nicht jede Differentialgleichung der obigen Form exakt. Es läßt sich zeigen, daß eine Differentialgleichung der obigen Form genau dann exakt ist, falls

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial g_0}{\partial x_i}$$

gilt. Wir bezeichnen eine Differentialgleichung der obigen Form als **integrierbar**, falls es eine nirgends verschwindende Funktion $u(\vec{x}, t)$ gibt, so daß die Differentialgleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{3n} u(\vec{x}, t) g_i(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + u(\vec{x}, t) g_0(\vec{x}, t) = 0$$

exakt ist. In diesem Fall nennt man die Funktion $u(\vec{x}, t)$ **integrierenden Faktor** und man kann die Differentialgleichung wieder auf eine holonome Gleichung zurückführen. Allerdings ist auch klar, daß nicht jede Differentialgleichung der obigen Form integrierbar ist. Liegt die Zwangsbedingung in der Form einer nicht-integrierbaren Differentialgleichung der obigen Form vor, so handelt es sich um eine nicht-holonome Zwangsbedingung. Auch hierzu ist ein konkretes Beispiel hilfreich: Wir betrachten ein Rad, das sich auf der horizontalen xy-Ebene bewegt. Die Radebene sei hierbei stets vertikal. Wir können die Bewegung durch vier Koordinaten beschreiben: Wir haben die x- und die y-Koordinate des Radmittelpunktes, den Drehwinkel φ um die Radachse sowie die Orientierung der Radebene bezüglich der xy-Koordinaten. Hierfür verwenden wir den Winkel θ zwischen der Radebene und der x-Achse. Diese vier Koordinaten sind nicht unabhängig: Die Bewegung des Radmittelpunktes erfolgt in der Radebene. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta, \\ \dot{y} &= v\sin\theta, \end{aligned}$$

wobei v die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes darstellt. Nun ist aber

$$v = r\dot{\varphi},$$

wobei r der Radius des Rades ist. Somit erhalten wir als Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\theta &= 0, \\ \dot{y} - r\dot{\varphi}\sin\theta &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Differentialgleichungen lassen sich nicht integrieren (ohne die vollständige Lösung des Problems zu kennen).

Zwangsbedingungen werden weiterhin dahingehend unterschieden, ob sie zeitunabhängig sind oder die Zeit explizit enthalten. Sind sie zeitunabhängig, so spricht man von **skleronomen Zwangsbedingungen**. Enthalten sie die Zeit, so spricht man von **rheonomen Zwangsbedingungen**. Das folgende System von Gleichungen

$$f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) = 0, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

liefert also skleronome holonome Zwangsbedingungen.

Liegen Zwangsbedingungen vor, so sind zum einen nicht mehr alle Koordinaten voneinander unabhängig, da sie durch die Zwangsbedingungen miteinader verknüpft sind. Zum anderen sind die Zwangskräfte meistens nicht explizit gegeben, sondern nur durch ihre Wirkung auf die Bewegung des Systems bekannt.

Wir diskutieren nun holonome Zwangsbedingungen etwas genauer. Wir betrachten ein System mit $(3n)$ Koordinaten und r holonomen Zwangsbedingungen.

$$f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, t) = 0, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

Wir können diese Gleichungen verwenden, um r Koordinaten zu eliminieren. Es verbleiben also $(3n-r)$ unabhängige Koordinaten und wir sprechen von einem System mit $(3n-r)$ Freiheitsgraden. Es ist nicht notwendig, daß die $(3n-r)$ unabhängigen Koordinaten mit einer Teilmenge der ursprünglichen $(3n)$ Koordinaten übereinstimmen. Wir bezeichnen die unabhängigen Koordinaten nun mit

$$q_1, q_2, ..., q_{3n-r}.$$

Die ursprünglichen Koordinaten lassen sich durch diese unabhängigen Koordinaten ausdrücken,

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= \vec{x}_1\left(q_1, \ldots, q_{3n-r}, t\right), \\
\vec{x}_2 &= \vec{x}_2\left(q_1, \ldots, q_{3n-r}, t\right), \\
\ldots & \quad \ldots \\
\vec{x}_n &= \vec{x}_n\left(q_1, \ldots, q_{3n-r}, t\right),
\end{aligned}$$

so daß diese Gleichungen die Zwangsbedingungen implizit enthalten. Wir bezeichnen die unabhängigen Koordinaten q_1, q_2, ..., q_{3n-r} als **generalisierte Koordinaten** oder auch als **verallgemeinerte Koordinaten**.

Die zeitlichen Ableitungen der generalisierten Koordinaten bezeichnen wir als **generalisierte Geschwindigkeiten**

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}.$$

Die ursprünglichen Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_i$ stehen mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ wie folgt in Beziehung:

$$\dot{\vec{x}}_i\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) = \left(\sum_{j=1}^{3n-r} \frac{\partial \vec{x}_i\left(\vec{q}, t\right)}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j\right) + \frac{\partial \vec{x}_i\left(\vec{q}, t\right)}{\partial t}.$$

Beispiel: Wir betrachten ein Teilchen, daß sich nur auf der Kugeloberfläche

$$\vec{x}^2 = R^2$$

bewegen kann. Als generalisierte Koordinaten können wir den Polarwinkel θ und den Azimuthwinkel φ verwenden. Die ursprünglichen Koordinaten x, y und z ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
x\left(\theta, \varphi\right) &= R \sin\theta \cos\varphi, \\
y\left(\theta, \varphi\right) &= R \sin\theta \sin\varphi, \\
z\left(\theta, \varphi\right) &= R \cos\theta.
\end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung ist dann automatisch erfüllt, wie man leicht zeigt:

$$\vec{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R^2 \cos^2\theta = R^2.$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= R\left(\dot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi\right), \\
\dot{y} &= R\left(\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi\right), \\
\dot{z} &= -R\dot{\theta} \sin\theta
\end{aligned}$$

und

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2 \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right].$$

2.5 Das d'Alembertsche Prinzip

Wir wollen nun eine zweite Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen betrachten. Diese basiert auf dem d'Alembertschen Prinzip der virtuellen Verrückungen. Bei dieser Herleitung betrachten wir nun auch die Verallgemeinerung auf Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen.

Wir betrachten ein System von n Teilchen mit den Ortkoordinaten $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_n$. Dieses System unterliege r unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen der Form

$$f_i\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t\right) \quad = \quad 0, \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Unter einer **virtuellen Verrückung** verstehen wir eine willkürliche infinitessimale Änderung der Koordinaten $\delta\vec{x}_i$ zu einem Zeitpunkt t, die mit den Kräften und den Zwangsbedingungen verträglich ist, die auf das System zu dem gegebenen Zeitpunkt t wirken.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall eines statischen Zustands, d.h. das System ist im Gleichgewicht. In diesem Fall ist für ein jedes Teilchen die auf dieses Teilchen wirkende Gesamtkraft $\vec{K}_i$ gleich Null:

$$\vec{K}_i \quad = \quad \vec{0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Somit ist natürlich auch das Skalarprodukt aus $\vec{K}_i$ und der virtuellen Verrückung $\delta\vec{x}_i$ gleich Null:

$$\vec{K}_i \cdot \delta\vec{x}_i \quad = \quad 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Es bleibt auch Null, wenn wir nun über alle i summieren:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i \cdot \delta\vec{x}_i \quad = \quad 0.$$

Wir nehmen an, daß sich die Gesamtkraft $\vec{K}_i$, die auf das i-te Teilchen wirkt, als eine Summe einer Kraft $\vec{F}_i$, die wir explizit behandeln wollen und einer Zwangskraft $\vec{Z}_i$ ergibt:

$$\vec{K}_i \quad = \quad \vec{F}_i + \vec{Z}_i.$$

Die genaue Form der Zwangskräfte ist meistens nicht bekannt. Die verfügbare Infomation über die Zwangskräfte besteht darin, daß sie die Teilchen auf eine Bahn zwingen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist. Unser Ziel ist daher, die Zwangskräfte zu eliminieren.

Betrachten wir nun die virtuellen Verrückungen. Per Definition sind dies Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Wir betrachten nun Systeme, für die die **virtuelle Arbeit der Zwangskräfte** verschwindet:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{x}_i \quad = \quad 0.$$

Für konkrete Modelle läßt sich zeigen, daß dies für holonome Zwangsbedingungen immer dann der Fall ist, falls die Zwangsbedingungen keine Reibungskräfte hervorrufen. Wird ein Teilchen gezwungen, sich auf einer Fläche zu bewegen, so wirkt die Zwangskraft senkrecht zur Fläche, die Bewegung des Teilchens (und damit auch alle möglichen virtuellen Verrückungen) erfolgt jedoch tangential zur Fläche.

Mit der Annahme, daß die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, erhalten wir nun im statischen Fall die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0.$$

Wir gehen nun vom statischen Fall auf den allgemeinen dynamischen Fall über. Im Gegensatz zu $\vec{K}_i = \vec{0}$ gilt nun $\vec{K}_i = m_i \vec{a}_i$, oder

$$\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0.$$

Wie zuvor können wir wieder das Skalarprodukt mit $\delta\vec{x}_i$ nehmen und über alle i summieren. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{x}_i = 0.$$

Setzen wir wieder $\vec{K}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ und nehmen an, daß die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{x}_i = 0.$$

Diese Gleichung wird als das **d'Alembertsche Prinzip der virtuellen Verrückungen** bezeichnet. Die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ treten in dieser Gleichung explizit nicht mehr auf.

Wir drücken nun die ursprünglichen $(3n)$ Koordinaten $\vec{x}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ durch die $(3n-r)$ generalisierten Koordinaten q_j aus $(1 \leq j \leq 3n-r)$.

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i\left(q_1, ..., q_{3n-r}, t\right).$$

Für die Geschwindigkeiten gilt

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{x}}_i\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) = \left(\sum_{j=1}^{3n-r} \frac{\partial \vec{x}_i\left(\vec{q}, t\right)}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j\right) + \frac{\partial \vec{x}_i\left(\vec{q}, t\right)}{\partial t}.$$

Leiten wir nochmal partiell nach $\dot{q}_k$ ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}.$$

Diese Hilfsrelation werden wir später verwenden. Wir können auch die virtuellen Verrückungen der ursprünglichen Koordinaten $\delta\vec{x}_i$ durch die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten δq_j ausdrücken. Es gilt

$$\delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Bemerkung: Es tritt hier keine Zeitableitung auf, da die virtuellen Verrückugnen zu einer festen Zeit betrachtet werden. Somit folgt aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{x}_i &= 0, \\
\sum_{j=1}^{3n-r}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j &= 0.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}$$

und bezeichnen Q_j als **generalisierte Kraft**. Somit erhalten wir für den ersten Term aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} Q_j\delta q_j.$$

Wir manipulieren nun den zweiten Term aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\vec{x}}_i\cdot\delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r}\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\vec{x}}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Nun ist aber

$$\ddot{\vec{x}}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{x}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i\cdot\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{x}}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - \vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}.$$

In der letzten Umformung haben wir $\partial\vec{x}_i/\partial q_j = \partial\vec{v}_i/\partial\dot{q}_j$ benutzt. Wir erhalten somit

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - \vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j.$$

Nun ist aber

$$\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\vec{v}_i^2, \qquad \vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\vec{v}_i^2,$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \right] \delta q_j.$$

In anderen Worten

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j.$$

Fügen wir nun alles zusammen, so können wir das d'Alembertsche Prinzip durch die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten ausdrücken:

$$\sum_{j=1}^{3n-r} \left[Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j.$$

Da die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten unabhängig sind folgt nun, daß jeder einzelne Term verschwinden muß:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad 1 \leq j \leq 3n - r.$$

Bemerkung: Die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{x}_i$ der ursprünglichen Koordinaten sind im allgemeinen wegen der Zwangsbedingungen nicht unabhängig.

Wir betrachten nun nacheinander drei Fälle mit steigender Allgemeinheit.

1. Fall: Wir beginnen mit dem Fall, daß die Kräfte $\vec{F}_i$ konservativ sind, sich also durch ein Potential $V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ darstellen lassen:

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n).$$

In diesem Fall erhalten wir für die generalisierten Kräfte

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} \left[\nabla_i V(\vec{x}_1(\vec{q},t), \ldots, \vec{x}_n(\vec{q},t)) \right] \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} V(\vec{q},t),$$

wobei wir nun

$$V(\vec{q},t) = V(\vec{x}_1(\vec{q},t), \ldots, \vec{x}_n(\vec{q},t))$$

geschrieben haben. Setzen wir nun in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) \quad = \quad 0.$$

Da $V(\vec{q},t)$ nicht von $\dot{q}_j$ abhängt, können wir ebenso gut schreiben

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) \quad = \quad 0.$$

Setzt man nun

$$L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) \quad = \quad T-V,$$

so erhält man die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad = \quad 0.$$

2. Fall: Wir werden ebenfalls auf die Euler-Lagrange-Gleichungen geführt, falls sich die generalisierten Kräfte aus einer Funktion $V(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ nach der Vorschrift

$$Q_j \quad = \quad -\frac{\partial V\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_j}$$

berechnen lassen. Setzen wir wieder in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad = \quad Q_j$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) \quad = \quad 0.$$

Auch hier wird man wieder mit der Definition

$$L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) \quad = \quad T-V$$

auf die Euler-Lagrange-Gleichungen geführt. Ein wichtiges Beispiel für diesen Fall haben wir bereits kennengelernt: Das verallgemeinerte Potential für die Lorentzkraft

$$V_{\text{Lorentz}}\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right) \quad = \quad q\left[\Phi(\vec{x},t) - \frac{1}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right]$$

hängt von der Geschwindigkeit und der Zeit ab.

3. Fall: Wir betrachten abschliessend noch den Fall, daß zusätzlich zu den bereits diskutierten Kräften noch Kräfte auftreten, die nicht durch ein (verallgemeinertes) Potential beschrieben werden können. Dies ist zum Beispiel bei Reibungskräften der Fall. Reibungskräfte sind typischerweise proportional zu der Geschwindigkeit

$$Q_j = -\kappa_j \dot{q}_j,$$

wobei κ_j der Reibungskoeffizient in die Richtung der j-ten generalisierten Koordinate ist. Hier führt man nun eine **Dissipationsfuntion**

$$F\left(\dot{\vec{q}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n-r} \kappa_j \dot{q}_j^2.$$

Offensichtlich ist

$$Q_j = -\frac{\partial F\left(\dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_j}.$$

Die Potentialkräfte sollen wieder wie bisher durch das (verallgemeinerte) Potential V beschrieben werden. Setzt man wieder $L = T - V$, so daß die Lagrange-Funktion nur die Potentialkräfte berücksichtigt, so wird man auf

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

In diesem Fall kann das System nicht durch eine Lagrange-Funktion alleine beschrieben werden, man muß als eine zweite Funktion noch die Dissipationsfunktion angeben.

Wir fassen das Wichtigste für physikalische Systeme, die durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden können und die durch holonome Zwangsbedingungen eingeschränkt sind, nocheinmal zusammen. Wir betrachten ein physikalisches System mit n Koordinaten $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ und r unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_i(\vec{x}, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Die Lagrange-Funktion des Systems sei

$$L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right).$$

Zur Lösung des Problems gehen wir wie folgt vor:

1. Wir wählen $(n-r)$ generalisierte Koordinaten q_j $(1 \leq j \leq n-r)$ und drücken die ursprünglichen Koordinaten x_i durch die q_j aus:

$$x_i = x_i(q_1, ..., q_{n-r}, t).$$

2. Wir ersetzen in der Lagrange-Funktion die ursprünglichen Koordinaten durch die generalisierten Koordinaten. Dies definiert eine Funktion $\tilde{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$.

   $$\tilde{L}\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) \;=\; L\left(\vec{x}\left(\vec{q},t\right),\dot{\vec{x}}\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right),t\right).$$

   Bemerkung: Oft schreibt man auch einfach $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ anstelle von $\tilde{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$.

3. Die Bewegungsgleichungen lauten

   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_j} \;=\; 0, \qquad 1 \le j \le n-r.$$

4. Wir lösen die Bewegungsgleichungen und erhalten

   $$q_j \;=\; q_j(t).$$

5. Wir können die Bewegung auch in den ursprünglichen Koordinaten ausdrücken. Hierzu setzt man die Ausdrücke für $q_j(t)$ in $x_i(\vec{q},t)$ ein. Man erhält

   $$x_i(t) \;=\; x_i\left(q_1(t),...,q_{n-r}(t),t\right).$$

Bemerkung: Diese Euler-Lagrange-Gleichungen die bei dieser Methode auftreten werden auch als **Lagrange-Gleichungen der zweiten Art** bezeichnet. Wir werden Lagrange-Gleichungen der ersten Art im Zusammenhang mit einer alternativen Methode später noch kennenlernen.

Wir wollen diese Lösungsmethode nun an einem Beispiel diskutieren. Hierzu betrachten wir zwei Gewichte der Massen m_1 und m_2, die über ein nicht dehnbares Seil und eine Rolle miteinander verbunden sind. Bewegt sich ein Gewicht nach unten, so bewegt sich das andere Gewicht nach oben. Das Seil soll über die Rolle reibungsfrei laufen. Wir bezeichnen mit x_1 die Höhe des Gewichtes 1, und mit x_2 die Höhe des Gewichtes 2. Wir wählen die Ausgangssituation so, daß beide Gewichte sich auf gleicher Höhe befinden und setzen

$$x_1(t=0) = x_2(t=0) = 0.$$

Desweiteren wollen wir

$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$$

annehmen. Offensichtlich liegt eine Zwangsbedingung vor, da nicht beide Gewichte unabhängig voneinander bewegt werden können. Geht ein Gewicht um ein Stück Δx nach unten, so geht das andere Gewicht um das Stück Δx nach oben. Wir können die Zwangsbedingung schreiben als

$$x_1 + x_2 \;=\; 0.$$

Es handelt sich um eine holonome Zwangsbedingung. Die Lagrange-Funktion des Systems ist

$$L\left(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2,t\right) \;=\; T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2.$$

Als generalisierte Koordinate können wir

$$q = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

wählen. Es ist dann

$$x_1 = q, \qquad x_2 = -q$$

und

$$\dot{x}_1 = \dot{q}, \qquad \dot{x}_2 = -\dot{q}.$$

Wir erhalten somit

$$\tilde{L}(q,\dot{q},t) = L(q,-q,\dot{q},-\dot{q},t) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}^2 - (m_1-m_2)gq.$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung und lautet

$$(m_1+m_2)\ddot{q} + (m_1-m_2)g = 0,$$

bzw.

$$\ddot{q} = -\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g.$$

Integration liefert

$$q(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt^2$$

und somit

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt^2, \qquad x_2(t) = \frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt^2.$$

2.6 Lagrange-Multiplikatoren

Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips konnten wir physikalische Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen behandeln. Es stellt sich nun die Frage, ob dies auch im Rahmen des Wirkungsprinzips möglich ist. Dies ist in der Tat der Fall. Hier nimmt man eine Technik zuhilfe, die man als Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren hat darüberhinaus den Vorteil, daß sie uns auch erlaubt, die Zwangskräfte zu berechnen.

Wir betrachten ein physikalisches System mit n Koordinaten $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T$ und r unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_i(\vec{x},t) = 0, \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Die Lagrange-Funktion des Systems sei

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right).$$

Wir führen nun r Funktionen $\lambda_j(t)$ $(1 \leq j \leq r)$ ein und fassen diese r Funktionen zu einem Vektor $\vec{\lambda}(t) = (\lambda_1(t),...,\lambda_r(t))^T$ zusammen. Wir betrachten nun die wie folgt modifizierte Lagrange-Funktion:

$$\hat{L}\left(\vec{x},\vec{\lambda},\dot{\vec{x}},t\right) = L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) f_j\left(\vec{x},t\right),$$

sowie die dazu gehörige Wirkung

$$\hat{S}\left[\vec{x},\vec{\lambda}\right] = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \hat{L}\left(\vec{x},\vec{\lambda},\dot{\vec{x}},t\right).$$

Die Funktionen $\lambda_j(t)$ bezeichnet man als **Lagrange-Multiplikatoren**. Variiert man die Wirkung nach δx_i, so findet man

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dies sind insgesamt n Differentialgleichungen. Wir können darüberhinaus auch nach $\delta\lambda_j$ variieren und erhalten

$$f_j\left(\vec{x},t\right) = 0, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Dies sind genau die r ursprünglichen Zwangsbedingungen. Wir haben also nun insgesamt $n+r$ Gleichungen für die $n+r$ unbekannten Größen $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_r(t)$. Löst man dieses (Differential-) Gleichungssystem, so findet man die Bahnen $x_i(t)$ sowie die Lösungen $\lambda_j(t)$ für die Lagrange-Multiplikatoren. Die Lösungen für die Lagrange-Multiplikatoren sind interessant, da aus ihnen die Zwangskräfte berechnet werden können. Die Zwangskraft in Richtung der i-ten Koordinate ist gegeben durch

$$Z_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i}.$$

Das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \quad 1 \leq i \leq n, \\ f_j\left(\vec{x},t\right) = 0, & \quad 1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

wird auch als System der **Lagrange-Gleichungen der ersten Art** bezeichnet.

Zur Herleitung dieser Form betrachten wir zunächst einen Satz aus der Mathematik über die Lagrange-Multiplikatoren. Dieser Satz behandelt zunächst nur eine Funktion $l(\vec{x})$, die von den Ortskoordinaten, aber nicht von den Geschwindigkeiten und der Zeit abhängt. Wir werden die Verallgemeinerung auf eine geschwindigkeits- und zeitabhängige Funktion $L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$ im Anschluss behandeln.
Sei $l(\vec{x})$ eine Funktion von n Koordinaten. Wir betrachten diese Funktion auf der Untermannigfaltigkeit, die durch r unabhängigen Nebenbedingungen der Form

$$f_j(\vec{x}) \;=\; 0, \qquad 1 \le j \le r,$$

definiert ist. Diese Untermannigfaltigkeit hat die Dimension $(n-r)$. Wir interessieren uns für die Punkte der Untermannigfaltigkeit, in denen die Funktion $l(\vec{x})$ ein Extremum hat.
Behauptung: Für einen solchen Punkt gibt es Konstanten λ_j, so daß

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \;=\; 0.$$

Beweis: Wir betrachten die ersten $(n-r)$-Koordinaten als unabhängig und drücken die restlichen r Koordinaten durch die unabhängigen Koordinaten aus:

$$x_s \;=\; x_s(x_1,\ldots,x_{n-r}), \qquad n-r < s \le n.$$

Dann ist

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-r+s}} \frac{\partial x_{n-r+s}}{\partial x_i} \;=\; 0, \qquad 1 \le i \le (n-r), \qquad 1 \le j \le r,$$

Die $(r \times r)$-Matrix

$$M_{js} \;=\; \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-r+s}}$$

hat Rang r (da die Nebenbedingungen unabhängig sein sollen), und ist daher invertierbar. Wir können also schreiben:

$$\frac{\partial x_{n-r+s}}{\partial x_i} \;=\; -\sum_{j=1}^{r} M^{-1}_{sj} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Da l ein Extremum haben soll, gilt natürlich auch

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} \frac{\partial x_{n-r+s}}{\partial x_i} \;=\; 0, \qquad 1 \le i \le (n-r).$$

Setzen wir nun

$$\lambda_j \;=\; -\sum_{s=1}^{r} \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} M^{-1}_{sj},$$

so erhält man

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad = \quad 0, \qquad 1\leq i\leq (n-r).$$

Man zeigt dann, das diese Aussage auch für die restlichen $(n-s+1)\leq i\leq n$ trivialerweise gilt. So ist für $1\leq s\leq r$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}}+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_{n-r+s}} &= \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}}-\sum_{s'=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s'}}M^{-1}_{s'j}M_{js}=\frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}}-\sum_{s'=1}^{r}\frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s'}}\delta_{s's} \\
&= \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}}-\frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}}=0.
\end{aligned}$$

Somit gilt sie für alle i und wir haben

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad = \quad 0, \qquad 1\leq i\leq n,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Wir betrachten nun Verallgemeinerungen dieses Satzes. Als erstes betrachten wir den Fall, daß sowohl die Funktion $l(\vec{x},t)$ als auch die Nebenbedingungen $f_j(\vec{x},t)=0$ von einem zusätzlichen Parameter t abhängen. Dann gilt der obige Satz natürlich für jeden festen Wert t, wir finden also für ein festes t immer Werte $\lambda_j(t)$, so daß

$$\frac{\partial l(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(t)\frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i} \quad = \quad 0, \qquad 1\leq i\leq n.$$

Im allgemeinen sind die Werte $\lambda_j(t)$ für unterschiedliche Parameterwerte t unterschiedlich. Aus den Konstanten λ_j werden also Funktionen $\lambda_j(t)$, die von dem Parameter t abhängen. Wir können diese Gleichungen auch als

$$\left(\frac{\partial l(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(t)\frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i}\right)\delta x_i \quad = \quad 0, \qquad 1\leq i\leq n$$

schreiben. Dies ist nicht anderes als die Variation von

$$\hat{s}\left[\vec{x},\vec{\lambda}\right] \quad = \quad \int_{t_a}^{t_b} dt\,\left(l(\vec{x},t)+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(t)\,f_j(\vec{x},t)\right)$$

bezüglich δx_i.

Als zweite Verallgemeinerung betrachten wir nun den Fall, daß wir die Funktion $l(\vec{x},t)$ durch

$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$ ersetzen. $L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$ darf nun auch von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}$ abhängen. In der Variation der Wirkung

$$\hat{S}\left[\vec{x},\vec{\lambda}\right] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) f_j(\vec{x},t) \right)$$

tritt nun auch die Variation der Geschwindigkeit $\delta\dot{x}_i$ auf. Mittels partieller Integration und unter der Annahme, daß die Variation zu der Anfangs- und Endzeit verschwindet können wir dies wieder auf eine Variation der Ortskoordinaten zurückführen. Wir erhalten

$$\frac{\partial L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}{\partial x_i} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \le i \le n,$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i}, \quad 1 \le i \le n.$$

Somit haben wir also bewiesen, daß die ersten n Gleichungen der $(n+r)$ Lagrange-Gleichungen der ersten Art die behauptete Form haben. Die restlichen r Gleichungen sind trivialerweise korrekt, da sie genau die r Zwangsbedingungen darstellen.
Wir müssen noch zeigen, daß die Zwangskräfte durch

$$Z_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i}$$

gegeben sind. Dies geht am einfachsten, indem man die Äquivalenz der Lagrange-Gleichungen der ersten Art mit dem d'Alembertschen Prinzip betrachtet: Wir hatten bei der Diskussion des d'Alembertschen Prinzips die Gesamtkraft K_i in eine Kraft F_i, welche wir explizit behandeln wollen, und eine Zwangskraft Z_i zerlegt:

$$K_i = F_i + Z_i.$$

Nun können wir natürlich auch die Zwangskräfte (anstelle sie zu eliminieren) weiterhin explizit beibehalten. Wiederholt man dann die Rechenschritte des Abschnitts über das d'Alembertsche Prinzip, so findet man nun

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = K_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Nehmen wir nun wie bisher an, daß sich die Kräfte F_i aus einer Lagrange-Funktion ergeben ($F_i = -\partial V / \partial x_i$), so läßt sich diese Gleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Z_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Der Vergleich mit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

liefert

$$Z_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i}.$$

Wir haben somit eine zweite Methode kennengelernt, physikalische Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen zu behandeln. Diese Methode hat den Vorteil, daß sie auch die Zwangskräfte liefert.

Als Beispiel diskutieren wir wieder den Fall zweier Gewichte, die über ein Seil und eine Rolle verbunden sind. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2.$$

Es liegt eine holonome Zwangsbedingung vor,

$$x_1 + x_2 = 0,$$

daher benötigen wir einen Lagrange-Multiplikator. Wir erhalten

$$\hat{L}(x_1, x_2, \lambda, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + \lambda(x_1 + x_2).$$

Die Variationen nach x_1, x_2 und λ liefern das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_1 g - \lambda &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g - \lambda &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Systems elimiert man zunächst λ aus den ersten beiden Gleichungen, und dann aus der resultierenden Gleichung x_2 mit Hilfe der dritten Gleichung. Man findet wieder

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + (m_1 - m_2) g = 0.$$

Somit erhält man

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2, \quad x_2(t) = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2, \quad \lambda(t) = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g.$$

Somit sind die Zwangskräfte

$$\begin{aligned} Z_1 &= \lambda(t) \frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_1} = \lambda(t) = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g, \\ Z_2 &= \lambda(t) \frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_2} = \lambda(t) = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g. \end{aligned}$$

2.7 Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen

Wir können die Überlegungen des letzten Abschnitts auch auf Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen erweitern, falls die (nicht-holonomen) Zwangsbedingungen von der Form

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(\vec{x},t)\cdot\dot{x}_i\right)+g_{j0}(\vec{x},t) = 0.$$

sind. $\vec{x}$ ist hierbei ein n-dimensionaler Vektor. Holonome Zwangsbedingungen sind ein Spezialfall der obigen Form: Aus

$$f_j(\vec{x},t) = 0$$

folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial x_i}\cdot\dot{x}_i\right)+\frac{\partial f_j(\vec{x},t)}{\partial t} = 0.$$

Gehen wir nochmal den Beweis der Methode der Lagrange-Multiplikatoren mit holonomen Zwangsbedingungen durch, so sehen wir, daß in den Euler-Lagrange-Gleichungen nur die Ableitungen $\partial f_j/\partial x_i$ auftreten. Die Funktionen f_j (ohne Ableitungen) haben wir nur in der Wirkung benötigt. Verzichten wir nun darauf, eine Wirkung angeben zu können und beschränken wir uns von vorneherein darauf, ein physikalisches System nur durch Euler-Lagrange-Gleichungen zu wollen, so können wir ein System mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen wie folgt behandeln:

Gegeben seien eine Lagrange-Funktion $L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$, wobei $\vec{x}$ ein n-dimensionaler Vektor ist, und r nicht-holonome Zwangsbedingungen der Form

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(\vec{x},t)\cdot\dot{x}_i\right)+g_{j0}(\vec{x},t) = 0, \quad 1\le j\le r.$$

Hierbei habe die $(r\times n)$-Matrix g_{ji} den Rank r. Die Dynamik des Systems ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{r}\lambda_j(t)g_{ji}(\vec{x},t), & 1\le i\le n,\\
\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(\vec{x},t)\cdot\dot{x}_i\right)+g_{j0}(\vec{x},t) &= 0, & 1\le j\le r.
\end{aligned}$$

Dies ist ein System von $(n+r)$ Differentialgleichungen für die $(n+r)$ unbekannten Größen $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_r(t)$. Die Zwangskräfte sind gegeben durch

$$Z_i = \sum_{j=1}^{r}\lambda_j(t)g_{ji}(\vec{x},t).$$

2.8 Erhaltungsgrößen und das Noether-Theorem

Wir haben bisher diskutiert, wie man Systeme, die durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden und die gegebenen Zwangsbedingungen unterliegen, behandelt. Liegen holonome Zwangsbedingungen vor, so kann man entweder zuerst zu generalisierten Koordinaten übergehen und wird dann auf die Lagrange-Gleichungen der zweiten Art geführt. Alternativ kann man auch Lagrange-Multiplikatoren einführen und die Lagrange-Gleichungen erster Art lösen. In beiden Fällen hat man es mit Differentialgleichungen zu tun, die man als Euler-Lagrange-Gleichungen aus einer Lagrange-Funktion enthält.

Wir können nun ganz abstrakt ein System mit n Freiheitsgraden betrachten. Jedem Freiheitsgrad entspricht eine generalisierte Koordinate q_i ($1 \leq i \leq n$). Das System werde durch die Lagrange-Funktion

$$L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)$$

beschrieben. Die Euler-Lagrange-Gleichungen hierzu lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Wir wollen nun untersuchen, wie wir Symmetrieeigenschaften der Lagrange-Funktion ausnützen können, um das Lösen der Differentialgleichungen zu vereinfachen.

2.8.1 Eichinvarianz

Es sei $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ eine Lagrange-Funktion und $\Lambda(\vec{q},t)$ eine Funktion, die von den generalisierten Koordinaten $\vec{q}$ und der Zeit t, aber nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ abhängt. Wir betrachten die modifizierte Lagrange-Funktion

$$L'\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) = L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) + \frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q},t\right) = L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial t},$$

die man erhält, indem man zu L die totale Zeitableitung von $\Lambda(\vec{q},t)$ addiert. Die Lagrange-Funktion L' führt auf die gleichen Euler-Lagrange-Gleichungen wie die Lagrange-Funktion L. Dies sieht man durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \\
&\quad = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial t}\right) \\
&\quad = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda\left(\vec{q},t\right)}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q},t\right) \\
&\quad = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Man bezeichnet die Transformation von L auf L' als eine **Eichtransformation**. Zu beachten ist, daß die Eichfunktion $\Lambda(\vec{q},t)$ nicht von $\dot{\vec{q}}$ abhängen darf.

Wir fassen zusammen: Eine Eichtransformation ändert die Bewegungsgleichungen nicht.

2.8.2 Koordinatentransformationen

Wir betrachten nun allgemeine Koordinatentransformationen. Hierunter verstehen wir eine Koordinatentransformation

$$q_i' = f_i(\vec{q},t) \qquad 1 \le i \le n,$$

die eindeutig und umkehrbar ist und die daüberhinaus die Eigenschaft hat, daß sowohl f_i als auch die Umkehrabbildungen

$$q_j = f_j^{-1}\left(\vec{q}\,',t\right)$$

differenzierbar sind. Diese Transformationen werden auch als Diffeomorphismen bezeichnet. Die Koordinatentransformation definiert die transformierte Lagrange-Funktion

$$L'\left(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t\right) = L\left(q_1\left(\vec{q}\,',t\right),...,q_n\left(\vec{q}\,',t\right),\dot{q}_1\left(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t\right),...,\dot{q}_n\left(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t\right),t\right),$$

wobei

$$\begin{aligned} q_i\left(\vec{q}\,',t\right) &= f_i^{-1}\left(\vec{q}\,',t\right), \\ \dot{q}_i\left(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i^{-1}\left(\vec{q}\,',t\right)}{\partial q_j'}\dot{q}_j + \frac{\partial f_i^{-1}\left(\vec{q}\,',t\right)}{\partial t} \end{aligned}$$

Für eine solche Koordinatentransformation gilt: Ist $\vec{q}\,'(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen zu $L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$, so ist $\vec{q}(t)$ mit

$$q_j(t) = f_j^{-1}\left(\vec{q}\,'(t),t\right)$$

eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen zu $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$. Um diese Aussage zu beweisen, geht man von den Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrange-Funktion L' aus und geht dann zu den Variablen $\vec{q}$ über. Nützt man aus, daß die Matrix

$$\frac{\partial f_i^{-1}}{\partial q_j'}$$

invertierbar ist, so findet man die Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrange-Funktion L. (Die obige Matrix ist invertierbar, da nach Voraussetzung die Koordinatentransformation eindeutig und umkehrbar ist.)

Bemerkung: Im allgemeinen haben die Lagrange-Funktionen $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ und $L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ verschiedene Gestalt. Durch eine geschickte Wahl der Transformation kann man unter Umständen erreichen, daß $L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ eine besonders einfache Form hat.

2.8.3 Autonome Systeme

Wir betrachten nun den Fall, daß die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, die Lagrange-Funktion sei also nur eine Funktion der Orte $\vec{q}$ und der Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$:

$$L = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right).$$

Diese Situtation tritt auf, falls sich die Kräfte konservativ sind und sich aus einem Potential ableiten lassen. In diesem Fall haben wir

$$L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right) = T\left(\dot{\vec{q}}\right) - V\left(\vec{q}\right).$$

Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, bezeichnen wir sie als **autonom**. Für eine autonome Lagrange-Funktion gilt, daß die Größe

$$E = \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i}\right) - L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)$$

eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}E = 0.$$

Zum Beweis berechnen wir dE/dt:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{q}_i \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \left(\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial q_i}}_{=0}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in den Klammern entspricht der linken Seite der Euler-Lagrange-Gleichungen und ist daher gleich Null. Somit gilt

$$E = \text{const},$$

oder anders ausgedrückt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)}{\partial \dot{q}_i}\right) - L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right) = \text{const}.$$

Wir bezeichnen diesen Ausdruck als ein **erstes Integral**. Allgemein versteht man unter einem ersten Integral zu einem physikalischen System, daß durch die Lagrange-Funktion $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ beschrieben wird, eine Beziehung der Form

$$f\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) = \text{const.}$$

Zu einem gegebenen physikalischen System kann es mehrere erste Integrale geben.

Die Bezeichnung "erstes Integral" wird verständlich, wenn wir nochmal das Brachistochronenproblem betrachten. Dieses Problem wird durch die Lagrange-Funktion

$$L\left(z,z',x\right) = \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{-2gz}}$$

beschrieben. Die Variable x entspricht hierbei der Zeit. Die Euler-Lagrange-Gleichungen haben uns auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$2zz'' + \left(z'\right)^2 + 1 = 0$$

geführt. Bei der Lösung dieser Differentialgleichung haben wir einen Trick verwendet und und anstelle der Differentialgleichung zweiter Ordnung die einfachere Differentialgleichung erster Ordnung

$$z\left(1+\left(z'\right)^2\right) = \text{const}$$

gelöst.

Wie kommt man auf diese Differentialgleichung erster Ordnung ? Wir haben nun alle Voraussetzungen beieinander, um diese Differentialgleichung herzuleiten. Der Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß die Lagrange-Funktion für das Brachistochronenproblem nicht explizit von der "Zeit"-Variablen 'x abhängt. Es handelt sich also um eine autonome Lagrange-Funktion. Somit gilt

$$z'\frac{\partial L}{\partial z'} - L = \text{const.}$$

Berechnet man die linke Seite, so findet man

$$z'\frac{\partial L}{\partial z'} - L = -\frac{1}{\sqrt{-2gz\left(1+(z')^2\right)}}.$$

Hieraus folgt dann

$$z\left(1+\left(z'\right)^2\right) = \text{const.}$$

Da dies eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, muß man um die Lösung zu erhalten einmal integrieren. Gegenüber der ursprünglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (welche zwei Integrationen benötigt), wurde hier eine Integration schon ausgeführt. Man spricht daher von einem ersten Integral.

2.8.4 Zyklische Variablen

Wir betrachten wieder ein physikalisches System, welches durch eine Lagrange-Funktion

$$L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)$$

beschrieben wird. Wir bezeichnen die Größe

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad 1 \le i \le n,$$

als den der Koordinate q_i zugeordneten **generalisierten Impuls**. Die Bezeichnungen **kanonischer Impuls** oder **konjugierter Impuls** werden ebenfalls für p_i verwendet.

Bemerkung 1: Die Größe p_i hat nicht notwendigerweise die Dimension eines Impulses. Dies kann zum Beispiel dann der Fall sein, falls die Koordinate q_i nicht einer kartesischen Koordinate entspricht, sondern zum Beispiel eine Winkelgröße darstellt.

Bemerkung 2: Liegt ein geschwindigkeitsabhängiges Potential vor, dann enspricht der zu einer kartesischen Koordinate q_i gehörende kanonische Impuls p_i nicht dem üblichen mechanischen Impuls. Das Standardbeispiel hierfür ist ein Teilchen im elektromagnetischen Feld. Das Teilchen wird durch die Lagrange-Funktion

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\Phi\left(\vec{x},t\right) + \frac{q}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}\left(\vec{x},t\right).$$

beschrieben. Der kanonische Impuls lautet

$$\vec{p}_{\mathrm{kanonisch}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}\left(\vec{x},t\right),$$

der mechanische Impuls dagegen

$$\vec{p}_{\mathrm{mechanisch}} = m\dot{\vec{x}}.$$

Definition: Enthält die Lagrange-Funktion nicht die generalsierte Koordinate q_i, so bezeichnen wir diese Variable als **zyklisch**.
Bemerkung: Die Lagrange-Funktion darf bei einer zyklischen Variable q_i die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{q}_i$ enthalten.

Die Bedeutung von zyklischen Variablen liegt darin, daß sie uns immer auf erste Integrale führen. Es gilt der folgende Satz: Ist die Variable q_i zyklisch, so ist der zu dieser Variable konjugierte Impuls erhalten:

$$p_i = \mathrm{const.}$$

Der Beweis ist sehr einfach: Ist die Variable q_i zyklisch, so bedeutet dies

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Somit reduziert sich die *i*-te Euler-Lagrange-Gleichung auf

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad = \quad 0.$$

Dies ist nichts anderes als die Aussage

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad = \quad \text{const.}$$

Die linke Seite entspricht allerdings genau der Definition des kanonischen Impulses, also

$$p_i \quad = \quad \text{const.}$$

2.8.5 Das Noether-Theorem

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen Koordinatentransformationen, die die Lagrange-Funktion invariant lassen und Erhaltungsgrößen. Dies führt uns auf das Noether-Theorem.

Wir betrachten eine Familie von Koordinatentransformationen, die von einem reellen Parameter α abhängen.

$$q_i' \quad = \quad f_i\left(\vec{q}, t, \alpha\right), \qquad 1 \le i \le n.$$

Die Funktionen f_i seien auch bezüglich α stetig differenzierbar. Weiter gelte, daß $\alpha = 0$ der Identität entspricht:

$$q_i \quad = \quad f_i\left(\vec{q}, t, 0\right), \qquad 1 \le i \le n.$$

Gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $|\alpha| < \varepsilon$

$$L'\left(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t\right) \quad = \quad L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) + \frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q}, t, \alpha\right) + O\left(\alpha^2\right)$$

gilt, wobei

$$\Lambda\left(\vec{q}, t, 0\right) \quad = \quad 0,$$

so folgt, daß die Größe

$$I \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Dies ist das Noethertheorem. Es besagt, daß jede kontinuierliche Symmetrie, unter der sich die Lagrange-Funktion nicht ändert, auf einen Erhaltungssatz führt.

Bemerkung 1: Das Noether-Theorem mach nur eine Aussage über kontinuierliche Symmetrien, die sich kontinuierlich in die Identität überführen lassen. (Dies wird durch die Forderung, daß die Koordinatentransformation für $\alpha = 0$ der Identität entspricht, sichergestellt.) Das Noether-Theorem macht keine Aussage über diskrete Symmetrien der Lagrange-Funktion.

Bemerkung 2: Es wird nur gefordert, daß die Lagrange-Funktion bis auf eine Eichtransformation invariant ist. Wir haben schon gesehen, daß Eichtransformationen die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht ändern und daher zwei Lagrange-Funktionen, die bis auf eine Eichtransformation identisch sind, die gleiche Physik beschreiben.
Auch wird nur gefordert, daß die Koordinatentrasformation die Lagrange-Funktion bis auf eine Eichtransformation in führender Ordnung in α invariant läßt. Ein Term $O(\alpha)$ tritt also nicht auf. Terme der Ordnung α^2 dürfen dagegen auftreten. Dies läßt sich auch anders formulieren: Die Lagrange-Funktion ist invariant bis auf Eichtransformationen unter den infinitessimalen Koordinatentransformationen.

Wir kommen nun zum Beweis des Noether-Theorems: Zunächst gilt wegen $\Lambda(\vec{q}, t, 0) = 0$

$$L'\left(\vec{q}\,', \dot{\vec{q}}\,', t\right)\Big|_{\alpha=0} = L'\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right).$$

Da nach Voraussetzung

$$L'\left(\vec{q}\,', \dot{\vec{q}}\,', t\right) - L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) - \frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q}, t, \alpha\right) = O\left(\alpha^2\right)$$

gilt, folgt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[L'\left(\vec{q}\,', \dot{\vec{q}}\,', t\right) - L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) - \frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q}, t, \alpha\right)\right]\Bigg|_{\alpha=0} = 0.$$

Nun ist $q_i' = f_i(\vec{q}, t, \alpha)$ und somit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L'}{\partial q_i'}\frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{d}{dt} f_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\right)\frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{d}{dt} f_i \\
&= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\frac{\partial f_i}{\partial \alpha},
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Euler-Lagrange-Gleichung verwendet wurde. Somit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[L' - L - \frac{d}{dt}\Lambda\right]\Bigg|_{\alpha=0} &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}L' - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{d}{dt}\Lambda\right]\Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{d}{dt}\Lambda\right]\Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}\right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}\right].
\end{aligned}$$

Nun folgt aus $L'\left(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t\right)\big|_{\alpha=0} = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right)$

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}\right|_{\alpha=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i,$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right] = 0,$$

womit die Behauptung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \text{const}$$

bewiesen wäre.

Bemerkung: Wir können das Noether-Theorem noch etwas verallgemeinern, indem wir nicht nur Koordinatentransformationen betrachten, sondern nun auch Transformationen, die die Zeit mittransformieren. Wir betrachten also Transformationen der Form

$$\begin{aligned} t' &= f_0(t, \alpha), \\ q_i' &= f_i(\vec{q}, t, \alpha), \qquad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

f_0 und f_i seien bezüglich α stetig differenzierbar und wie zuvor sollen sich die Transformationen für $\alpha = 0$ auf die Identität reduzieren:

$$\begin{aligned} t &= f_0(t, 0), \\ q_i &= f_i(\vec{q}, t, 0), \qquad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Schreibweise

$$\dot{q}_i' = \frac{dq_i'}{dt'}.$$

Gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $|\alpha| < \varepsilon$

$$L'\left(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t'\right) dt' = \left[L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) + \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t, \alpha)\right] dt + O\left(\alpha^2\right)$$

bzw.

$$L'\left(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t'\right) \frac{dt'}{dt} = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) + \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) + O\left(\alpha^2\right)$$

gilt, wobei wieder $\Lambda(\vec{q}, t, 0) = 0$ ist, so folgt, daß die Größe

$$I = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} - \left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i\right) - L\right] \left.\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

erhalten ist.

Bemerkung: Da nun auch die Zeit transformiert wird, ist im allgemeinen dt' ungleich dt und es tritt auf der linken Seite der Jacobi-Faktor dt'/dt auf.

Der Beweis verläuft im wesentlichen analog zum obigen Fall, in denen nur die Koordinaten q_i transformiert werden. Da nun auch die Zeit transformiert wird ergeben sich einige kleine Komplikationen. Wir benötigen die Ausdrücke $\dot{q}_i'$ und dt'/dt. Es ist

$$\begin{aligned} t' &= f_0(t,\alpha) = t + \left.\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + O\left(\alpha^2\right), \\ q_i' &= f_i(\vec{q},t,\alpha) = q_i + \left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + O\left(\alpha^2\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{q}_i' &= \frac{dq_i'}{dt'} = \frac{\frac{dq_i'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\dot{q}_i + \frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha}{1 + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha} + O\left(\alpha^2\right) = \dot{q}_i + \alpha \left.\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right)\right|_{\alpha=0} + O\left(\alpha^2\right), \\ \frac{dt'}{dt} &= 1 + \alpha \frac{d}{dt}\,\left.\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} + O\left(\alpha^2\right). \end{aligned}$$

Außerdem benötigt man die Identität

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Diese Identität beweist man wie folgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\frac{\partial L}{\partial q_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Verwendet man diese Hilfrelationen, so folgt die Behauptung ohne große Mühe.

Wir wollen nun einige Beispiele für das Noether-Theorem betrachten.

Beispiel 1: Autonome Systeme
Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Wir betrachten die fogende Transformation

$$\begin{aligned} t' &= t + \alpha, \\ q_i' &= q_i, \qquad 1 \le i \le n, \end{aligned}$$

d.h. wir führen eine Zeittranslation durch und lassen alle Ortskoordinaten unverändert. Für $\alpha = 0$ reduziert sich die Transformation auf die Identität. Es ist

$$\frac{dt'}{dt} = 1$$

und da L nicht explizit von der Zeit abhängen soll, gilt

$$L'\left(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t\right) = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right).$$

Somit ist $\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) = 0$. Wir haben außerdem

$$\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} = 1, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = 0.$$

Damit lautet die Erhaltungsgröße

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i\right) - L = \text{const.}$$

Dies entspricht der Energieerhaltung, die wir schon im Rahmen der autonomen Systeme diskutiert haben. Wir sehen also mit Hilfe des Noether-Theorems, daß aus der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen die Energieerhaltung folgt.

Beispiel 2: Zyklische Variablen
Wir betrachten nun den Fall, daß eine Variable q_j zyklisch ist. Wir können nun die folgende Koordinatentransformation betrachten:

$$\begin{aligned} q_j' &= q_j + \alpha, \\ q_i' &= q_i, \qquad i \neq j. \end{aligned}$$

Die Zeitvariable wird hier nicht transformiert. Offensichtlich reduziert sich die Koordinatentransformation für $\alpha = 0$ auf $q_i' = q_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es gilt außerdem stets $\dot{q}_i' = \dot{q}_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Da nach Voraussetzung die Variable q_j zyklisch sein soll, gilt

$$L'\left(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t\right) = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right).$$

Wir können somit das Noether-Theorem anwenden. Es ist $\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) = 0$ und

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Somit ist die Erhaltungsgröße

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = p_j = \text{const.}$$

Wie im Abschnitt über zyklische Variablen finden wir auch mit Hilfe des Noether-Theorems, daß der zu der Variablen q_j konjugierte Impuls p_j erhalten ist. Wir können diesen Sachverhalt auch wie folgt formulieren: Ist eine Variable q_j zyklisch (d.h. die Lagrange-Funktion L hängt nicht explizit von q_j ab), so ist die Lagrange-Funktion invariant unter einer Translation $q'_j = q_j + \alpha$ bezüglich der j-ten Koordinate. Diese Invarianz und das Noether-Theorem implizieren eine Erhaltungsgröße: Der zu q_j konjugierte Impuls ist erhalten.
Dies zeigt den engen Zusammenhang zwischen einer Symmetrie der Lagrange-Funktion (hier Translationsinvarianz bezüglich der j-ten Koordinate) und der daraus resultierenden Erhaltungsgröße (hier der konjugierte Impuls p_j).

Sind in einer Lagrange-Funktion mehrere Koordinaten zyklisch, so gibt es zu jeder zyklischen Koordinate eine Erhaltungsgröße. Für r zyklische Koordinaten hat man also r Erhaltungsgrößen und somit r erste Integrale.

Beispiel 3: Rotationssymmetrie
Betrachten wir nun den Fall eines Teilchens in einem Zentralpotential. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V\left(|\vec{x}|\right),$$

wobei das Potential nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. Wir betrachten nun die Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Zeitvariable wird nicht transformiert. Diese Transformation beschreibt eine Drehung um die z-Achse um den Winkel α. Die Transformationsmatrix R ist orthogonal:

$$R^T \cdot R = \mathbf{1}.$$

Nun rechnet man leicht nach, daß

$$\left(\vec{x}'\right)^2 = (R\cdot\vec{x})^2 = \vec{x}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot \vec{x} = \vec{x}^2,$$

und

$$\left(\dot{\vec{x}}'\right)^2 = \left(R\cdot\dot{\vec{x}}\right)^2 = \dot{\vec{x}}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}^T \cdot \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}^2$$

ist. Die Lagrange-Funktion ist somit invariant unter dieser Transformation:

$$L'\left(\vec{x}',\dot{\vec{x}}',t\right) = L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}},t\right).$$

Es ist

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv_x, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = mv_y, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x' &= f_x(\vec{x},t,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= f_y(\vec{x},t,\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f_x}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha|_{\alpha=0} = y, \\ \left.\frac{\partial f_y}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} &= -x\cos\alpha - y\sin\alpha|_{\alpha=0} = -x. \end{aligned}$$

Somit lautet die Erhaltungsgröße, die aus dem Noether-Theorem folgt:

$$p_x \left.\frac{\partial f_x}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} + p_y \left.\frac{\partial f_y}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = mv_x y - mv_y x = -m\left(xv_y - yv_x\right).$$

Dies ist nichts anderes als die negative z-Komponente des Drehimpulses. Ist $(-L_z)$ erhalten, so ist natürlich auch L_z erhalten.

Wir können diese Betrachtung natürlich auch für eine Drehung um die x-Achse bzw. um die y-Achse wiederholen. In diesen Fällen würden wir dann das Ergebnis erhalten, daß die x- bzw. y-Komponente des Drehimpulses erhalten ist.
Wir sehen also, daß die Invarianz der Lagrange-Funktion unter Drehungen die Erhaltung des Drehimpulses bewirkt.

Beispiel 4: Transformation in ein um eine konstante Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem.
Wir betrachten ein abgeschlossenes n-Teilchensystem, in dem die wechselseitigen Kräfte nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n,t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} V_{ij}\left(\left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|\right).$$

Wir wissen bereits, daß in diesem System die Energie, der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls erhalten ist. Wir betrachten nun die folgende Transformation:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i + \alpha t, \qquad 1 \le i \le n, \\ y_i' &= y_i, \\ z_i' &= z_i. \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeiten gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{x}_i' &= \dot{x}_i + \alpha, \qquad 1 \le i \le n, \\ \dot{y}_i' &= \dot{y}_i, \\ \dot{z}_i' &= \dot{z}_i. \end{aligned}$$

Diese Transformation läßt die Potentiale invariant, da diese nur vom Abstand zweier Teilchen abhängen. Für die Lagrange-Funktion gilt

$$\begin{aligned} L'\left(\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_n,\dot{\vec{x}}'_1,\ldots,\dot{\vec{x}}'_n,t\right) &= L\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n,t\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\dot{x}_i\alpha+\frac{1}{2}m_i\alpha^2\right) \\ &= L\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n,t\right)+\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2 t\right). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion ist also bis auf eine Eichtransformation invariant. Als Erhaltungsgröße finden wir nun

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i t - x_i\right).$$

Betrachten wir die analogen Transformationen, in denen wir die x-Koordinaten durch die y- bzw. z-Koordinaten ersetzen, und kombinieren wir dann alle Resultate, so ergibt sich, daß die Größe

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{x}}_i t - \vec{x}_i\right)$$

erhalten ist. Mit der Bezeichnung $\vec{P}$ für den Gesamtimpuls, $\vec{X}$ für den Schwerpunkt und M für die Gesamtmasse lautet die Erhaltungsgröße

$$\vec{P}t - M\vec{X} \quad = \quad \text{const.}$$

Da wir schon wissen, daß der Gesamtimpuls ebenfalls erhalten ist, gilt für die Schwerpunktsbewegung

$$\vec{X} \quad = \quad \frac{1}{M}\vec{P}t+\vec{X}_0.$$

Der Symmetrie (bis auf eine Eichtransformation) der Lagrange-Funktion unter Transformationen auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem entspricht also die Erhaltungsgröße $\vec{X}_0$.

Damit haben wir nun zu den zehn kontinuierlichen Symmetrien der Galileigruppe (Zeittranslation, Orttranslation, Drehungen im Ortsraum, Transformation auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem) die entsprechenden Erhaltungsgrößen bestimmt: Energieerhaltung, Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung, Erhaltung von $\vec{X}_0$.

Fassen wir also nochmal alles zusammen: Im allgemeinsten Fall betrachten wir eine Transformation der generalisierten Koordinaten und der Zeit

$$\begin{aligned} t' &= f_0\left(t,\alpha\right), \\ q'_i &= f_i\left(\vec{q},t,\alpha\right), \qquad 1\le i\le n. \end{aligned}$$

Gilt

$$L'\left(\vec{q}',\dot{\vec{q}}',t'\right)dt' \;=\; \left[L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)+\frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q},t,\alpha\right)\right]dt+O\left(\alpha^2\right)$$

so folgt, daß die Größe

$$I \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} - \left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i\right)-L\right]\left.\frac{\partial f_0}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

erhalten ist.

Wird die Zeit nicht transformiert, so reduziert sich diese Formel auf

$$I \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\right) - \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Gilt darüberhinaus, daß die Lagrange-Funktion exakt invariant unter der Transformation ist, also die Eichfunktion $\Lambda(\vec{q},t,\alpha)$ gleich Null ist, so reduziert sich der Ausdruck der Erhaltungsgröße weiter auf

$$I \;=\; \sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

2.9 Die relativistische Mechanik in der Lagrange-Formulierung

Wir haben gesehen, daß wir die Newtonsche Mechanik elegant durch eine Lagrange-Funktion beschreiben können. Wir wissen bereits, daß die Newtonsche Mechanik nur gilt, falls alle Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Sind dagegen die Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit, so müssen wir die relativistische Mechanik verwenden. Es stellt sich daher die Frage, ob auch die relativistische Mechanik mit Hilfe einer Lagrange-Funktion und eines Wirkungsprinzips formuliert werden kann.

Wir wiederholen zunächst die Grundlagen der relativistischen Mechanik: In der relativistischen Mechanik lautet die Bewegungsgleichung eines Teilchens in kovarianter Schreibweise

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu \;=\; K^\mu.$$

Hierbei bezeichnet τ die Eigenzeit:

$$d\tau \;=\; dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Durch Multiplikation mit c rechnet man auf eine Größe mit der Dimension einer Länge um:

$$ds \;=\; c\,d\tau.$$

Die Größe p^μ bezeichnet den Viererimpuls

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = mc\frac{dx^\mu}{ds} = mcu^\mu,$$

hierbei is u^μ die Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Bemerkung: Für die Vierergeschwindigkeit gilt immer $u_\mu u^\mu = 1$, wie man leicht durch nachrechnen sieht.
Wir erhalten somit

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Die Größe K^μ bezeichnet man als Viererkraft. Für die räumlichen Komponenten der Viererkraft gilt

$$K^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}F^i.$$

Eine Beziehung für die nullte Komponente der Viererkraft findet man durch die Kontraktion der Bewegungsgleichung mit der Vierergeschwindigkeit: Es ist

$$u_\mu\frac{d}{d\tau}p^\mu = u_\mu\frac{d}{d\tau}mcu^\mu = \frac{1}{2}mc\frac{d}{d\tau}u_\mu u^\mu = 0,$$

und somit

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(K^0 - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{K}\right) = 0.$$

Also folgt

$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c}.$$

Somit ist

$$K^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{F}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{F}\right).$$

Ein Beispiel für eine Viererkraft ist gegeben durch die Lorentzkraft. In kovarianter Schreibweise haben wir hier

$$K^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu,$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\nu$$

der Feldstärketensor des elektromagnetischen Feldes ist und $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ das Viererpotential darstellt.

Mit Hilfe von $ds = cd\tau$ und $p^\mu = mcu^\mu$ läßt sich die Bewegungsgleichung auch wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = K^\mu \qquad \Leftrightarrow \qquad mc^2\frac{d}{ds}u^\mu = K^\mu.$$

Betrachten wir zunächst ein freies relativistisches Teilchen. Die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen lautet

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{d}{ds}u^\mu = 0,$$

Wir suchen nun eine Wirkung, dessen Variation diese Bewegungsgleichung liefert. In der nichtrelativistischen Mechanik war die entsprechende Wirkung gegeben durch

$$S = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{1}{2}m\vec{v}^2.$$

Der Ausdruck unter dem Integral

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2\, dt$$

ist hierbei invariant bis auf Eichtransformationen unter den kontinuierlichen Symmetrien der Galilei-Gruppe. (Dieser Ausdruck ist auch invariant unter der Raumspiegelung, er ändert aber sein Vorzeichen unter der Zeitumkehr. Im Falle der Zeitumkehr muß man im Integral natürlich auch die Integralgrenzen transformieren: $t_a \to -t_a$ und $t_b \to -t_b$. Vertauscht man nun $(-t_a)$ und $(-t_b)$, so bekommt man ein weiteres Minuszeichen.)

In der relativistischen Mechanik suchen wir nun einen Ausdruck, der invariant bis auf Eichtransformationen unter den kontinuierlichen Symmetrien der Poincaré-Gruppe ist. Dieser gesuchte Ausdruck muß natürlich auch wieder ein Differential erster Ordnung sein. Hier bietet sich die infinitessimale Größe ds an. Wir wissen bereits, daß ds unter den Poincaré-Transformationen invariant ist. Wir machen den Ansatz

$$S = A\int\limits_a^b ds,$$

mit einer zu bestimmenden Konstante A. Das Integral ist längs einer Weltlinie zwischen den Ereignissen a und b zu nehmen. Legen wir uns auf ein bestimmtes Koordinatensystem fest, so können wir auch schreiben

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L\, dt,$$

wobei L als Lagrange-Funktion bezeichnet wird.

Betrachten wir also zunächst das Funktional

$$S\left[x^\mu(\tau)\right] = A\int_a^b ds$$

und eine Variation der Bahn

$$x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$$

Wir wollen wieder fordern, daß die physikalische Bahn diejenige ist, unter welcher die Wirkung stationär wird. Es muß also gelten:

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu(\tau)} S\left[x^\mu(\tau)\right] = 0.$$

Wir benötigen nun die Variation des infinitessimalen Viererwegelements ds. Es ist

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu} ds = \frac{\delta}{\delta x^\mu}\sqrt{dx_\nu dx^\nu} = \frac{1}{2\sqrt{dx_\rho dx^\rho}}\, 2dx_\nu \frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu = \frac{dx_\nu}{ds}\,\frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu = u_\nu \frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu$$

und somit

$$\delta ds = u_\nu \delta dx^\nu.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\delta S &= A\int_a^b \delta ds = A\int_a^b u_\nu \delta dx^\nu = A\int_a^b u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{ds} ds \\
&= A\, u_\nu \delta x^\nu\big|_a^b - A\int_a^b \left(\frac{d}{ds} u_\nu\right)\delta x^\nu ds = -A\int_a^b ds\, \left(\frac{d}{ds} u_\nu\right)\delta x^\nu.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß die Variation am Anfangspunkt a und am Endpunkt b verschwinden soll. Aus der obigen Gleichung folgt nun

$$\frac{d}{ds} u_\nu = 0,$$

was genau die relativistische Formulierung der Bewegungsgleichung eines freien Teilchen ist. Wir haben also gesehen, daß die Variation der Wirkung

$$S = A \int_a^b ds$$

die richtige Bewegungsgleichung liefert. Wir wissen allerdings noch nicht, welchen Wert die Konstante A haben muß. Um diese Konstante A zu bestimmen, wählen wir ein Koordinatensystem, so daß wir die Wirkung als

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L \, dt$$

schreiben können und fordern, daß sich die Lagrange-Funktion im nicht-relativistischen Grenzfall auf

$$\lim_{v \to 0} L = \text{const} + \frac{1}{2} m v^2 + O\left(v^4\right)$$

reduziert.

Mit

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

erhalten wir

$$L = Ac \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Wir entwickeln L:

$$L = Ac \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = Ac - \frac{A v^2}{2c} + O\left(v^4\right)$$

Daher folgt $A = -mc$ und

$$S = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

bzw.

$$S = -mc \int_a^b ds.$$

Nachdem wir nun ein kräftefreies Teilchen betrachtet haben, wollen wir uns dem Problem zuwenden, die relativistische Wirkung für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld zu bestimmen. Der Zusatzterm, der die elektromagnetische Kraft auf das Teilchen beschreibt, muß natürlich wieder eine skalare Größe unter Lorentztransformationen sein. Andererseits erwarten wir natürlich auch, daß er das elektromagnetische Viererpotential A^μ und die Vierergeschwindigkeit u^ν des Teilchens enthält. Ein Lorentz-invariante Größe, die sich aus diesen beiden Vierervektoren konstruieren läßt, ist zum Beispiel

$$u_\mu A^\mu.$$

Wir betrachten daher zunächst die Wirkung

$$S = \int_a^b ds \left(-mc - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu\right)$$

und zeigen, daß diese Wirkung die bekannte Bewegungsgleichung liefert.
Die Variation des ersten Terms liefert wieder

$$\delta\left(-mc\int_a^b ds\right) = mc\int_a^b ds \left(\frac{d}{ds}u_\mu\right)\delta x^\mu.$$

Betrachten wir nun den zweiten Term. Wir können diesen Term auch als

$$-\frac{q}{c}\int_a^b ds u_\mu A^\mu = -\frac{q}{c}\int_a^b ds \frac{dx_\mu}{ds}A^\mu = -\frac{q}{c}\int_a^b dx_\mu A^\mu$$

schreiben. Die Variation liefert

$$\begin{aligned}
\delta\left(\int_a^b dx_\mu A^\mu\right) &= \int_a^b \left[A^\mu \delta dx_\mu + (\delta A^\mu)\, dx_\mu\right] = \int_a^b \left[A^\mu d\left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\,\delta x^\nu dx_\mu\right] \\
&= \int_a^b ds \left[A^\mu \frac{d}{ds}\left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\,\delta x^\nu \frac{dx_\mu}{ds}\right] \\
&= \int_a^b ds \left[-\left(\frac{d}{ds}A^\mu\right)\left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\,\delta x^\nu u_\mu\right] \\
&= \int_a^b ds \left[-(\partial_\nu A^\mu)\frac{\partial x^\nu}{ds}\left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\,\delta x^\nu u_\mu\right] \\
&= \int_a^b ds \left[-\left(\partial_\nu A_\mu\right)u^\nu + \left(\partial_\mu A_\nu\right)u^\nu\right]\delta x^\mu = \int_a^b ds \left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right]u^\nu \delta x^\mu \\
&= \int_a^b ds\, F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt für die Variation der Wirkung

$$\delta S = \int_a^b ds \left[mc \frac{d}{ds} u_\mu - \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \right] \delta x^\mu .$$

Hieraus folgt die Bewegungsgleichung

$$mc \frac{d}{ds} u_\mu = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu ,$$

bzw.

$$\frac{d}{d\tau} p_\mu = q F_{\mu\nu} u^\nu ,$$

womit gezeigt wäre, daß wir wieder die bekannte Bewegungsgleichung eines relativistischen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld erhalten.

3 Der Hamilton-Formalismus

Wir haben nun zum einen bereits die klassische Mechanik in der Formulierung nach Newton kennengelernt, in der die Bewegungsgleichungen durch

$$m\ddot{\vec{x}}_i \quad = \quad \vec{F}_i$$

gegeben sind. Darüberhinaus haben wir in den vorherigen Abschnitten eingehend die Formulierung der klassischen Mechanik nach Lagrange diskutiert. Im Lagrange-Formalismus wird ein physikalisches System durch eine Lagrange-Funktion $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ beschrieben. Die Bewegungsgleichungen sind durch die Euler-Lagrange-Gleichungen gegeben und lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad = \quad 0.$$

Der Lagrange-Formalismus erlaubte es uns, Systeme mit Zwangsbedingungen zu behandeln. Desweiteren haben wir das Noether-Theorem betrachtet, das besagt, daß aus einer kontinuierlichen Symetrie der Lagrange-Funktion eine Erhaltungsgröße folgt.

Wir wollen nun die klassische Mechanik in einer dritten Formulierung diskutieren und wenden uns nun dem Hamilton-Formalismus zu. Es stellt sich am Anfang natürlich die Frage, welche Berechtigung eine weitere Formulierung der klassischen Mechanik hat. Die Antwort liegt darin, daß wir im Hamiltion-Formalismus Strukturen kennenlernen werden, die für die Quantenmechanik sehr wichtig sind.

Wir wollen zunächst die wichtigsten Punkte des Hamilton-Formalismus kurz erwähnen, bevor wir sie eingehend diskutieren. Wir haben bereits im Lagrange-Formalismus für den Fall, daß die Lagrange-Funktion weder explizit von der Zeit noch explizit von den generalisierten Koordinaten q_i abhängt, gesehen, daß die Energie und die kanonisch konjugierten Impulse erhalten sind. Es stellt sich heraus, daß auch in dem Fall, daß diese Größen keine Erhaltungsgrößen sind, es sinnvoll ist, diese Größen für die Beschreibung eines physikalischen Systems zu verwenden. Im Hamilton-Formalismus verwendet man daher anstelle der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ die kanonisch konjugierten Impulse p_i. Diese waren durch

$$p_i \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

definiert. Die generalisierten Geschwindigkeiten betrachten wir nun als Funktion $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{q},\vec{p},t)$. Ein physikalisches System wird nun nicht mehr durch eine Lagrange-Funktion $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$, welche von den generalisierten Koordinaten, den generalisierten Geschwindigkeiten und der Zeit abhängt, beschrieben, sondern durch eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q},\vec{p},t)$, welche nun von den generalisierten Koordinaten, den generalisierten Impulsen und der Zeit abhängt. Der Zusamenhang zwischen Hamilton-Funktion und Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$H(\vec{q},\vec{p},t) \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i\right) - L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right), \qquad \dot{q}_i = \dot{q}_i\left(\vec{q},\vec{p},t\right),$$

wobei die generalsierten Geschwindigkeiten implizit durch die Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right)}{\partial \dot{q}_i}$$

definiert sind.
Bemerkung: Hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, so ist der Wert der Hamilton-Funktion für die physikalische Lösung gleich der (erhaltenen) Energie.

Die Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus lauten dann

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right), \qquad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right).$$

Wir wollen nun diese Aussagen eingehender betrachten.

3.1 Implizite Funktionen

Wir beginnen mit einigen mathematischen Vorbetrachtungen. Es seien $U \subseteq \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}$ offene Teilmengen und

$$\begin{aligned} G \;:\; & U \times V \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \to G(x,y), \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Gilt für $(x_0, y_0) \in U \times V$

$$G\left(x_0, y_0\right) = 0$$

und ist

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $U' \subset U$ und $V' \subset V$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} f \;:\; & U' \to V', \\ & x \to f(x), \end{aligned}$$

mit $f(x_0) = y_0$, so daß

$$G\left(x, f(x)\right) = 0$$

für alle $x \in U'$ gilt. Man sagt, daß die Funktion $f(x)$ durch $G(x,y) = 0$ **implizit** definiert wird.

Bemerkung: Dieser Satz macht eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion $f(x)$. Er ist besonders dann hilfreich, wenn die Gleichung $G(x,y)=0$ nicht nach y aufgelöst werden kann.

Für die Ableitung $f'(x)$ gilt

$$f'(x) \;=\; -\left.\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}\right|_{(x,f(x))},$$

wie man leicht durch Anwenden der Kettenregel auf $G(x,f(x))$ sieht:

$$\frac{d}{dx}G(x,f(x)) \;=\; \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}f'(x)$$

Da $G(x,f(x))=0$ gilt natürlich trivialerweise auch

$$\frac{d}{dx}G(x,f(x)) \;=\; 0.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \;\neq\; 0,$$

und aufgrund der Stetigkeit der Ableitung ist diese Ableitung auch in einer Umgebung dieses Punktes ungleich Null. Somit kann man nach $f'(x)$ auflösen.

Wir können den Satz über implizite Funktionen auch auf mehrere Variablen verallgemeinern. Es seien $U\subseteq\mathbb{R}^n$ und $V\subseteq\mathbb{R}^m$ offene Teilmengen

$$\begin{aligned}\vec{G} \;:\; & U\times V\to\mathbb{R}^m\\ & (\vec{x},\vec{y})\to\vec{G}(\vec{x},\vec{y}),\end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung.
Bemerkung: Die Dimension des Wertebereichs von $\vec{G}$ ist gleich der Dimension von V.
Die Jacobi-Matrix

$$J \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m}\\ \dots & & & & & \dots\\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} & \frac{\partial G_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}$$

besteht aus zwei Teilmatrizen

$$\frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{x}} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}\\ \dots & & \dots\\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial G_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

wobei die letztere eine quadratische $m \times m$-Matrix ist.

Gilt für $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U \times V$

$$\vec{G}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$$

und ist

$$\left(\det \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{y}} \right) \bigg|_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $U' \subset U$ und $V' \subset V$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{f} \quad : \quad & U' \to V', \\ & \vec{x} \to \vec{f}(\vec{x}), \end{aligned}$$

mit $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$, so daß

$$\vec{G}\left(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\right) = \vec{0}$$

für alle $\vec{x} \in U'$ gilt. Für die Ableitung gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = - \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{y}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}} \Bigg|_{\left(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\right)} .$$

3.2 Legendre-Transformationen

Wir beginnen wieder mit einem einfachen ein-dimensionalen Beispiel. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & U \to \mathbb{R}, \\ & u \to f(u) \end{aligned}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Für $u_0 \in U$ sei

$$f''(u_0) \neq 0.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}\times U \to \mathbb{R}, \\ & (v,u) \to F(v,u) = vu - f(u), \end{aligned}$$

und deren Ableitung nach u, die wir mit G bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} G &: \mathbb{R}\times U \to \mathbb{R}, \\ & (v,u) \to G(v,u) = v - f'(u). \end{aligned}$$

Im Punkte $(v_0,u_0) = (f'(u_0),u_0)$ gilt

$$\begin{aligned} G\left(f'(u_0),u_0\right) &= 0, \\ \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(f'(u_0),u_0)} &= -f''(u_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Der Satz über implizite Funktionen garantiert, daß es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $f'(u_0) \in V$ und eine eindeutig bestimmte Funktion

$$\begin{aligned} u &: V \to \mathbb{R}, \\ & v \to u(v), \end{aligned}$$

gibt, mit

$$G(v,u(v)) = 0.$$

Setzen wir die Funktion $u(v)$ in die Funktion $F(v,u)$, die von zwei Variablen abhängt, ein, so definiert dies eine neue Funktion $g(v)$ einer Variablen v

$$\begin{aligned} g &: V \to \mathbb{R}, \\ & v \to g(v) = F(v,u(v)) = vu(v) - f(u(v)), \end{aligned}$$

die wir als **Legendre-Transformierte** der Funktion $f(u)$ bezeichnen.

Betrachten wir hierzu ein einfaches Beispiel. Um den Kontakt mit der Physik herzustellen, ersetzen wir die Variable u durch die Variable $\dot{q}$ sowie die Variable v durch die Variable p. Wir betrachten die Funktion

$$L(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2,$$

wobei wir $m \neq 0$ voraussetzen. Die Funktion $L(\dot{q})$ entspricht der Funktion $f(u)$. Es ist

$$\frac{d^2}{d\dot{q}^2}L = m \neq 0.$$

Die Funktion $F(p,\dot{q})$ ist gegeben durch

$$F(p,\dot{q}) \quad = \quad p\dot{q} - \frac{1}{2} m \dot{q}^2,$$

und die Funktion $G(p,\dot{q})$ ist gegeben durch

$$G(p,\dot{q}) \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = p - m\dot{q}.$$

In diesem Beispiel können wir die Gleichung

$$G(p,\dot{q}) \quad = \quad 0$$

nach $\dot{q}$ auflösen und erhalten

$$\dot{q}(p) \quad = \quad \frac{p}{m}.$$

Dies eingesetzt in $F(p,\dot{q})$ liefert die Legendre-Transformierte von $L(\dot{q})$, die wir mit $H(p)$ bezeichnen:

$$H(p) \quad = \quad F(p,\dot{q}(p)) = p\dot{q}(p) - \frac{1}{2} m [\dot{q}(p)]^2 = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Betrachten wir nun wieder eine Funktion $f(u)$ und deren Legendre-Transformierte $g(v)$. Nach Voraussetzung ist $f''(u_0) \neq 0$. Was gilt nun für $g''(v_0)$, wobei $v_0 = f'(u_0)$ ist ? Aus

$$g(v) \quad = \quad vu(v) - f(u(v))$$

folgt

$$g'(v) \quad = \quad u(v) + vu'(v) - f'(u(v))\,u'(v) = u(v) + u'(v) \underbrace{[v - f'(u(v))]}_{=0} = u(v)$$

und

$$g''(v) \quad = \quad u'(v).$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt aber mit $G(v,u) = v - f'(u)$

$$u'(v_0) \quad = \quad - \left. \frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{\frac{\partial G}{\partial u}} \right|_{(v_0,u_0)} = - \frac{1}{(-f''(u_0))} = \frac{1}{f''(u_0)}.$$

Nach Voraussetzung ist $f''(u_0) \neq 0$ und somit

$$g''(v_0) \quad = \quad \frac{1}{f''(u_0)} \neq 0.$$

Somit können wir nun auch die Legendre-Transformierte von $g(v)$ betrachten. Die Hilfsfunktionen lauten

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u,v) &= uv - g(v),\\ \tilde{G}(u,v) &= u - g'(v).\end{aligned}$$

Wir bestimmen $v(u)$ aus der Gleichung

$$u - g'(v) = 0.$$

Nun haben wir oben aber bereits gezeigt, daß $g'(v) = u(v)$ ist. Somit erfüllt $v(u)$ die Gleichung

$$u - u(v(u)) = 0.$$

In anderen Worten

$$u(v(u)) = u.$$

Die Legendre-Transformierte $\tilde{f}(u)$ von $g(v)$ ist nun

$$\begin{aligned}\tilde{f}(u) &= u \cdot v(u) - g(v(u))\\ &= u \cdot v(u) - [v(u) \cdot u(v(u)) - f(u(v(u)))]\\ &= v(u) \cdot \underbrace{[u - u(v(u))]}_{=0} + f(u(v(u)))\\ &= f(u).\end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder die ursprüngliche Funktion $f(u)$ zurück.

Wir können auch die Legendre-Transformierte einer Funktion von mehreren Variablen betrachten. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned}f \;:\; & U \to \mathbb{R},\\ & \vec{u} \to f(\vec{u})\end{aligned}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der Variablen $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$. Wir fordern nun, daß für $\vec{u}_0 \in U$ die Determinante der Hesseschen Matrix nicht verschwindet:

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right)\Bigg|_{\vec{u}_0} \neq 0.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}F \;:\; & \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R},\\ & (\vec{v},\vec{u}) \to F(\vec{v},\vec{u}) = \vec{v}\cdot\vec{u} - f(\vec{u}) = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i u_i\right) - f(\vec{u}),\end{aligned}$$

und deren Ableitungen nach den Variablen u_i, die wir mit $\vec{G}$ bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} \vec{G} \;:\; & \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \\ & (\vec{v},\vec{u}) \to G(\vec{v},\vec{u}) = \nabla_{\vec{u}} F(\vec{v},\vec{u}) . \end{aligned}$$

Für die i-te Komponente von $\vec{G}$ gilt

$$G_i(\vec{v},\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial u_i} F(\vec{v},\vec{u}) = v_i - \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial u_i}.$$

Im Punkte $(\vec{v}_0,\vec{u}_0) = ((\nabla_{\vec{u}} f)(\vec{u}_0), \vec{u}_0)$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{G}(\vec{v}_0,\vec{u}_0) &= 0, \qquad \vec{v}_0 = (\nabla_{\vec{u}} f)(\vec{u}_0) \\ \left.\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{u}}\right|_{(\vec{v}_0,\vec{u}_0)} &= -\left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right)\right|_{(\vec{v}_0,\vec{u}_0)} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Determinante der Hesseschen Matrix ungleich Null. Somit sind wieder die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt und es gibt daher eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v}_0 \in V$ sowie eine eindeutig bestimmte Funktion

$$\begin{aligned} \vec{u} \;:\; & V \to \mathbb{R}^n, \\ & \vec{v} \to \vec{u}(\vec{v}), \end{aligned}$$

die

$$\vec{G}(\vec{v},\vec{u}(\vec{v})) = \vec{0}$$

erfüllt. Die Legendre-Transformierte $g(\vec{v})$ der Funktion $f(\vec{u})$ wird analog zum Fall einer Variablen als

$$\begin{aligned} g \;:\; & V \to \mathbb{R}, \\ & \vec{v} \to g(\vec{v}) = F(\vec{v},\vec{u}(\vec{v})) = \vec{v}\cdot\vec{u}(\vec{v}) - f(\vec{u}(\vec{v})) \end{aligned}$$

definiert. Auch für die Funktion $g(\vec{v})$ gilt, daß eine nochmalige Legendre-Transformation wieder auf die ursprüngliche Funktion $f(\vec{u})$ zurückführt.

3.3 Die Hamilton-Funktion

Wir wenden nun die Legendre-Transformation in mehreren Variablen auf ein Beispiel aus der Physik an. Wir ersetzen wieder die Variablen $\vec{u}$ durch die Variablen $\dot{\vec{q}}$ und die Variablen $\vec{v}$ durch die Variablen $\vec{p}$. Wir betrachten nun zu der Funktion

$$L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)$$

die Legendre-Transformierte bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$. Es ist hierbei zu beachten, daß die Variablen $\vec{q}$ und t **nicht transformiert** werden, und daher einfach als zusätzliche Parameter zu betrachten sind. Wir setzen weiter voraus, daß die Determinante der zweiten Ableitungen von L bezüglich der Variablen $\dot{q}_i$ nicht verschwindet, d.h.

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0.$$

Ist die Lagrange-Funktion von der Form

$$L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2\right) - V\left(\vec{q}\right)$$

und $m_i \neq 0$, so ist diese Bedingung stets erfüllt, wie man leicht sieht:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = \det\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} m_i.$$

Die Hilfsfunktion F lautet nun

$$F\left(\vec{p},\dot{\vec{q}},\vec{q},t\right) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right).$$

Bemerkung: Die zusätzlichen Variablen $\vec{q}$ und t kann man als zusätzliche Parameter betrachten. Die Ableitungen von F nach den Variablen $\dot{q}_i$ bezeichnen wir als G_i:

$$G_i\left(\vec{p},\dot{\vec{q}},\vec{q},t\right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = p_i - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right).$$

Die n Gleichungen

$$G_i\left(\vec{p},\dot{\vec{q}},\vec{q},t\right) = 0$$

definieren nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen die Geschwindigkeiten als Funktion der konjugierten Impulse:

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right).$$

Diese Lösungen eingesetzt in die Hilfsfunktion F liefert die Legendre-Transformierte der Funktion $L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)$ bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$:

$$H\left(\vec{q},\vec{p},t\right) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right) - L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right),t\right).$$

Wir bezeichnen die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)$ bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$ als **Hamilton-Funktion** und schreiben hierfür $H\left(\vec{q},\vec{p},t\right)$.

Bemerkung: Um in der Praxis die Geschwindigkeiten als Funktion der konjugierten Impulse zu erhalten, müßen wir die n Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right)$$

nach den Variablen $\dot{q}_j$ auflösen.

Bemerkung 2: Hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, und setzen wir für die Orts- und Impulsvariablen die physikalischen Bahnen $\vec{q}(t)$ und $\vec{p}(t)$ ein, so liefert die Hamilton-Funktion die erhaltenen Gesamtenergie des Systems.

Wir betrachten als ein einfaches Beispiel das Zweikörpersystem. Zwei Körper der Massen m_1 und m_2 wechselwirken mittels der Gravitationskraft. Den Ortsvektor der Masse m_1 bezeichnen wir mit $\vec{x}_1$, den Ortsvektor der Masse m_2 mit $\vec{x}_2$. Die Geschwindigkeiten bezeichnen wir mit $\dot{\vec{x}}_1$ und $\dot{\vec{x}}_2$. Die Lagrange-Funktion dieses Systems ist gegeben durch

$$L\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, t\right) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + G \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}.$$

Die Hamilton-Funktion ist die Legendre-Transformierte bezüglich den Variablen $\dot{\vec{x}}_1$ und $\dot{\vec{x}}_2$. Als erstes müßen wir die Geschwindigkeiten durch die konjugierten Impulse ausdrücken. Dazu lösen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_1} = m_1 \dot{\vec{x}}_1, \\ \vec{p}_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_2} = m_2 \dot{\vec{x}}_2 \end{aligned}$$

nach den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_1$ und $\dot{\vec{x}}_2$ auf. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1 &= \frac{1}{m_1} \vec{p}_1, \\ \dot{\vec{x}}_2 &= \frac{1}{m_2} \vec{p}_2. \end{aligned}$$

Die Hamiltion-Funktion ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} H\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t\right) &= \vec{p}_1 \cdot \dot{\vec{x}}_1\left(\vec{p}_1\right) + \vec{p}_2 \cdot \dot{\vec{x}}_2\left(\vec{p}_2\right) - L\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1\left(\vec{p}_1\right), \dot{\vec{x}}_2\left(\vec{p}_1\right), t\right) \\ &= \frac{\vec{p}_1^2}{m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{m_2} - \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \\ &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir betrachten noch die Eindeutigkeit der Hamilton-Funktion. Wir wissen bereits, daß die Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems nicht eindeutig ist. Wir können zum

Beispiel immer eine Eichtransformation durchführen und erhalten eine modifizierte Lagrange-Funktion

$$L'\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right) \;=\; L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)+\frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q},t\right).$$

Die Lagrange-Funktionen L und L' beschreiben die gleiche Physik. Da die Eichfunktion $\Lambda\left(\vec{q},t\right)$ nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ abhängt, überträgt sich dieser Sachverhalt in trivialerweise auf die Hamilton-Funktion. Wir bezeichnen die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion L bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$ mit H, und die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion L' mit H'. Für H' und H finden wir den Zusammenhang

$$H'\left(\vec{q},\vec{p},t\right) \;=\; H\left(\vec{q},\vec{p},t\right)-\frac{d}{dt}\Lambda\left(\vec{q},t\right).$$

Somit ist auch die Hamilton-Funktion nicht eindeutig.

3.4 Die Hamilton-Gleichungen

Wir haben nun einem physikalischen System eine Hamilton-Funktion $H\left(\vec{q},\vec{p},t\right)$ zugeordnet, die von den verallgemeinerten Ortskoordinaten, den verallgemeinerten Impulsen und der Zeit abhängt. Es stellt sich nun die Frage, ob aus der Kenntniss der Hamilton-Funktion auch die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können. Diese Frage wollen wir nun genauer untersuchen.

Der Ausgangspunkt ist die Hamilton-Funktion

$$H\left(\vec{q},\vec{p},t\right) \;=\; \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right)-L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right),t\right),$$

wobei $\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right)$ aus den Gleichungen

$$p_i \;=\; \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_i}$$

bestimmt wird.

Betrachten wir zunächst $\partial H/\partial p_i$. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i\left(\vec{p},\vec{q},t\right)+\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right),t\right)}{\partial p_i} \\
&= \dot{q}_i\left(\vec{p},\vec{q},t\right)+\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial p_i}\right)-\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial p_i}\right) \\
&= \dot{q}_i\left(\vec{p},\vec{q},t\right)+\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(p_j-\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_j}\right)}_{=0}\frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial p_i} \\
&= \dot{q}_i\left(\vec{p},\vec{q},t\right).
\end{aligned}$$

Für die physikalische Bahn ist natürlich

$$\dot{q}_i\left(\vec{p},\vec{q},t\right) = \frac{d}{dt}q_i(t),$$

und somit erhalten wir einen ersten Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_i} &= \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\left(\vec{p},\vec{q},t\right),t\right)}{\partial q_i} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_i} - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial q_i}\right) \\
&= -\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(p_j - \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_j}\right)}_{=0} \frac{\partial \dot{q}_j\left(\vec{p},\vec{q},t\right)}{\partial q_i} \\
&= -\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}p_i.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir als Kurzschreibweise die Notation verwendet

$$\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_i} = \left.\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_i}\right|_{\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{q}}(\vec{p},\vec{q},t)}, \qquad \frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_i} = \left.\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_i}\right|_{\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{q}}(\vec{p},\vec{q},t)}.$$

In der letzten Zeile haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_i}$$

ausgenutzt. Somit erhalten wir einen zweiten Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Fassen wir zusammen: Aus der Hamilton-Funktion folgen $(2n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung, die durch

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\
\frac{d}{dt}p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

gegeben sind. Diese sind zu den n Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Ordnung äquivalent und stellen die Bewegungsgleichungen des Systems im Hamilton-Formalismus dar. Man bezeichnet die obigen $(2n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung als die kanonischen Hamilton-Gleichungen oder auch kurz einfach als **Hamilton-Gleichungen**.

Bemerkung: Man beachte das Minuszeichen im zweiten Satz der Hamilton-Gleichungen $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$.

Betrachten wir ein Beispiel: Die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators in einer Dimension lautet

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Der kanonische Impuls ergibt sich zu

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

und somit lautet die Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Aus dieser Hamilton-Funktion folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \frac{d}{dt}p &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q. \end{aligned}$$

Dies ist ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen erster Ordnung, daß mit den Standardmethoden gelöst werden kann.

Die Hamilton-Formulierung der Mechanik ist besonders dann vorteilhaft, wenn alle Variablen q_i zyklisch sind, d.h. die Lagrange-Funktion L hängt nur von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ und der Zeit t ab, aber nicht von den Ortskoordinaten $\vec{q}$. In diesem Fall wissen wir bereits, daß dann die konjugierten Impulse p_i erhalten sind, d.h.

$$\frac{d}{dt}p_i = 0.$$

In diesem Fall reduzieren sich daher die Bewegungsgleichungen auf einen Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Hamilton-Formalismus sind diese Gleichungen durch

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

gegeben.

Bemerkung: Die Hamilton-Gleichungen lassen sich auch aus einem Variationsprinzip ableiten, indem wir die Funktion

$$F\left(\vec{q},\vec{p},\dot{\vec{q}},\dot{\vec{p}},t\right) \quad = \quad \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - H\left(\vec{q},\vec{p},t\right)$$

betrachten, und fordern daß die Variation

$$\delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, F\left(\vec{q}(t),\vec{p}(t),\dot{\vec{q}}(t),\dot{\vec{p}}(t),t\right) \quad = \quad 0$$

für Bahnen mit

$$\delta\vec{q}\,(t_a) = \delta\vec{q}\,(t_b) = 0$$

verschwindet.
Die Funktion F hängt nicht von $\dot{\vec{p}}$ ab, wir haben diese Variablen nur wegen der Symmetrie bezüglich der Variablen $\vec{q}$ und $\vec{p}$ mithinzugeschrieben.
Es wird nicht gefordert, daß $\delta\vec{p}\,(t_a) = \delta\vec{p}\,(t_b) = 0$ gelten soll. Wir werden sehen, daß die Hamilton-Gleichungen ohne diese Forderung hergeleitet werden können. Der technische Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß wir bezüglich den Variablen $\vec{p}$ nicht partiell integrieren müssen. Im Rahmen der Variationsrechnung betrachten wir Bahnen zwischen dem Anfangspunkt $\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a$ und dem Endpunkt $\vec{q}(t_b) = \vec{q}_b$. Die Randbedingungen $\vec{q}_a$ und $\vec{q}_b$ definieren bereits $(2n)$ Integrationskonstanten, so daß für $\vec{p}(t_a)$ und $\vec{p}(t_b)$ keine Wahlfreiheit mehr besteht.

Wir berechnen nun die Variation der obigen Größe. Es ist

$$\begin{aligned}
\delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, F\left(\vec{q}(t),\vec{p}(t),\dot{\vec{q}}(t),\dot{\vec{p}}(t),t\right) \quad &= \quad \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i \right] \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i \right]
\end{aligned}$$

Da die Variationen δq_i und δp_i unabhängig sind, folgt daß

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad = \quad 0,$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} \quad = \quad 0$$

gelten muß. Nun ist aber wegen $F = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} p_i, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Somit erhält man die Hamilton-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

3.5 Kanonische Transformationen

Wir haben im Abschnitt über den Lagrange-Formalismus bereits allgemeine Koordinatentransformationen kennengelernt. Starten wir von einem Satz Koordinaten $\vec{q}$ mit der dazugehörigen Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, so wird die Dynamik des Systems durch die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

beschrieben.
Wir können allerdings auch andere Koordinaten $\vec{q}\,'$ verwenden, die sich aus den alten Koordinaten $\vec{q}$ durch eine allgemeine Koordinatentransformation

$$q_i' = q_i'(\vec{q}, t)$$

ergeben. Eine allgemeine Koordinatentransformation wird auch als **Punkttransformation** bezeichnet. Die Lagrange-Funktion ausgedrückt in den neuen Koordinaten bezeichnen wir mit $L'(\vec{q}\,', \dot{\vec{q}}\,', t)$ und die Dynamik des Systems wird nun durch die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial L'}{\partial q_i'} = 0$$

beschrieben. Die Tatsache, daß die Bewegungsgleichungen in den gestrichenen und ungestrichenen Größen identisch sind, bezeichnet man als **Forminvarianz**.
Bemerkung: Im allgemeinen sind L und L' als Funktionen ihrer Argumente nicht identisch, d.h. im allgemeinen ist $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \neq L'(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$.

Wir können nun den analogen Sachverhalt in der Hamilton-Formulierung betrachten. Der Ausgangspunkt ist nun ein physikalisches System, daß durch eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ beschrieben wird. Die Bewegungsgleichungen für dieses System in den Variablen $\vec{q}$ und $\vec{p}$ lauten

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Wir bezeichnen eine Transformation

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i'(\vec{q}, \vec{p}, t)\,, \\ p_i' &= p_i'(\vec{q}, \vec{p}, t)\,, \end{aligned}$$

als eine **kanonische Transformation**, falls die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen durch

$$\frac{d}{dt} q_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \qquad \frac{d}{dt} p_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}$$

gegeben sind, wobei $H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t)$ die Hamilton-Funktion ausgedrückt in den neuen Variablen ist. Wir bezeichnen eine Transformation also als kanonisch, falls unter ihr die Hamilton-Gleichungen forminvariant sind.

Bemerkung 1: Es läßt sich zeigen, daß jede Transformation der Form

$$q_i' = q_i'(\vec{q}, t), \qquad p_i' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'}$$

eine kanonische Transformation ist. Eine allgemeine Koordinatentransformation ist also immer eine kanonische Transformation.

Bemerkung 2: Die Menge der kanonischen Transformationen ist größer als die Menge der allgemeinen Koordinatentransformationen, die wir im Rahmen der Lagrange-Formulierung kennengelernt haben. Dies liegt daran, daß kanonische Transformationen von $\vec{q}$, $\vec{p}$ und t abhängen können, die allgemeinen Koordinatentransformationen aber nur von $\vec{q}$ und t abhängen. Der Hamilton-Formalismus, der die Größen $\vec{q}$ und $\vec{p}$ gleichberechtigt behandelt, erlaubt hier größere Freiheiten.

Bemerkung 3: Während im Lagrange-Formalismus jede eindeutige und umkehrbare Koordinatentransformation $q_i' = q_i'(\vec{q}, t)$ automatisch die Euler-Lagrange-Gleichungen forminvariant läßt, ist dies im Hamilton-Formalismus für beliebige Transformationen $q_i' = q_i'(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $p_i' = p_i'(\vec{q}, \vec{p}, t)$ im allgemeinen nicht der Fall.

Unter welchen Voraussetzungen ist nun eine Transformation der Form

$$q_i' = q_i'(\vec{q}, \vec{p}, t)\,, \qquad p_i' = p_i'(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

kanonisch ? Die Hamilton-Gleichungen in den ursprünglichen Variablen folgen aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\ \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)\right] \;=\; 0,$$

wobei für die Variation der Bahnen am Anfangs- und Endzeitpunkt

$$\delta\vec{q}\,(t_a) = \delta\vec{q}\,(t_b) = 0$$

gilt. Die Variationen $\delta\vec{p}\,(t_a)$ und $\delta\vec{p}\,(t_b)$ unterliegen keinen Einschränkungen.

Ist die Transformation kanonisch, so gilt eine entsprechende Aussage natürlich auch für die gestrichenen Größen:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} dt \;\left[\vec{p}\,' \cdot \dot{\vec{q}}\,' - H'\left(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t\right)\right] \quad = \quad 0,$$

wobei nun die Variation bezüglich Bahnen betrachtet wird, die

$$\delta\vec{q}\,'\,(t_a) = \delta\vec{q}\,'\,(t_b) = 0$$

erfüllen. An dieser Stelle sei bemerkt, daß aus $\delta\vec{q}(t_a) = 0$ nicht notwendigerweise $\delta\vec{q}\,'(t_a) = 0$ folgt, da die Transformation auch von den Impulsen $\vec{p}$ abhängt und im allgemeinen $\delta\vec{p}(t_a) \neq 0$ ist.

Wir wollen nun eine bestimmte Klasse von kanonischen Transformationen betrachten, die als **Berührungstransformationen** oder **Kontakttransformationen** bezeichnet werden. Innerhalb dieser Klasse unterscheiden wir vier Fälle.
Der erste Fall ist dadurch definiert, daß eine Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)$ exisitiert, so daß

$$\left[\vec{p}\,' \cdot \dot{\vec{q}}\,' - H'\left(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t\right)\right] - \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right)\right] + \frac{d}{dt}\Lambda_1\left(\vec{q}, \vec{q}\,', t\right) \quad = \quad 0,$$

wobei

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_i \partial q_j'}\right) \quad \neq \quad 0$$

gelten soll. Die Funktion $\Lambda_1\left(\vec{q}, \vec{q}\,', t\right)$ wird als **erzeugende Funktion** der kanonischen Transformation bezeichnet. Die erzeugende Funktion definiert zunächst die Transformation. Um dies zu sehen, formen wir die obige Gleichung um:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} - p_i\right)\dot{q}_i + \left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i'} + p_i'\right)\dot{q}_i'\right] + \left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} + H - H'\right) \quad = \quad 0.$$

Betrachten wir $\vec{q}$ und $\vec{q}\,'$ als unabhängige Größen, so ist diese Gleichung nur erfüllt, falls

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} - p_i = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i'} + p_i' = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} + H - H' = 0$$

gilt. In anderen Worten

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)}{\partial q_i}, \qquad p'_i = -\frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)}{\partial q'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial t}.$$

Die Gleichungen $p_i = \partial \Lambda_1 / \partial q_i$ und $p'_i = -\partial \Lambda_1 / \partial q'_i$ legen die Transformation fest: Wegen

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_i \partial q'_j} \right) \neq 0$$

ist der erste Satz der Gleichungen nach $\vec{q}\,'$ auflösbar:

$$\vec{q}\,' = \vec{q}\,' (\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Dies eingesetzt in den zweiten Satz der Gleichungen liefert die Transformation für $\vec{p}\,'$:

$$\vec{p}\,' = \vec{p}\,' (\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Die so definierte Transformation ist kanonisch. Um dies zu sehen, bestimmen wir die Bewegungsgleichungen in den gestrichenen Größen. Wir gehen vom Wirkungsprinzip in den ungestrichenen Größen aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right] \\ &= \delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, \left[\vec{p}\,' \cdot \dot{\vec{q}}\,' - H' \left(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t \right) + \frac{d}{dt} \Lambda_1 \left(\vec{q}, \vec{q}\,', t \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, \left(p'_i \delta \dot{q}'_i + \dot{q}'_i \delta p'_i - \frac{\partial H'}{\partial q'_i} \delta q'_i - \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \delta p'_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i} \delta q'_i \right). \end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} \delta q_i = \left. \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} \delta q_i \right|_{t_a}^{t_b} = 0,$$

und

$$\int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, p'_i \delta \dot{q}'_i = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, p'_i \frac{d}{dt} \delta q'_i = \left. p'_i \delta q'_i \right|_{t_a}^{t_b} - \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \, \left(\frac{d}{dt} p'_i \right) \delta q'_i.$$

Somit erhalten wir

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(p_i' + \frac{\partial\Lambda_1}{\partial q_i'}\right)\delta q_i'\bigg|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} dt\,\left[\left(\dot{q}_i' - \frac{\partial H'}{\partial p_i'}\right)\delta p_i' - \left(\frac{\partial H'}{\partial q_i'} + \frac{d}{dt}p_i'\right)\delta q_i'\right]\right\}$$

Wegen

$$p_i' \;=\; -\frac{\partial\Lambda_1}{\partial q_i'}$$

verschwinden die Randterme und wir haben

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{n}\int_{t_a}^{t_b} dt\,\left[\left(\dot{q}_i' - \frac{\partial H'}{\partial p_i'}\right)\delta p_i' - \left(\frac{\partial H'}{\partial q_i'} + \frac{d}{dt}p_i'\right)\delta q_i'\right]$$

Die Koeffizienten von $\delta p_i'$ und $\delta q_i'$ müssen unabhängig voneinander verschwinden und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}q_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \qquad \frac{d}{dt}p_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}.$$

Somit ist die Forminvarianz der Bewegungsgleichungen unter dieser Transformation gezeigt.

Wir wollen noch die drei weiteren Fälle der Berührungstransformationen betrachten. Der zweite Fall ist dadurch definiert, daß eine Funktion $\Lambda_2(\vec{q},\vec{p}',t)$ exisitiert, so daß

$$\left[\vec{p}'\cdot\dot{\vec{q}}' - H'\left(\vec{q}',\vec{p}',t\right)\right] - \left[\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - H\left(\vec{q},\vec{p},t\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[-\vec{q}'\cdot\vec{p}' + \Lambda_2\left(\vec{q},\vec{p}',t\right)\right] \;=\; 0,$$

wobei

$$\det\left(\frac{\partial^2\Lambda_2}{\partial q_i\partial p_j'}\right) \;\neq\; 0$$

gelten soll. Die generierende Funktion Λ_2 hängt hierbei von den ursprünglichen Ortskoordinaten $\vec{q}$ und den neuen Impulskoordinaten $\vec{p}'$ ab. Es ist nun

$$\frac{d}{dt}\left[-\vec{q}'\cdot\vec{p}' + \Lambda_2\left(\vec{q},\vec{p}',t\right)\right] \;=\; -\dot{\vec{q}}'\cdot\vec{p}' - \vec{q}'\cdot\dot{\vec{p}}' + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Lambda_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\Lambda_2}{\partial p_i'}\dot{p}_i'\right) + \frac{\partial\Lambda_2}{\partial t}.$$

Die Terme proportional zu $\dot{\vec{q}}'\cdot\vec{p}'$ heben sich weg. Durch Vergleich der Koeffizienten von $\dot{q}_i$, $\dot{p}_i'$ und 1 findet man nun

$$p_i = \frac{\partial\Lambda_2}{\partial q_i}, \qquad q_i' = \frac{\partial\Lambda_2}{\partial p_i'},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial t}.$$

Der dritte Fall ist dadurch definiert, daß eine Funktion $\Lambda_3(\vec{p}, \vec{q}\,', t)$ exisitiert, so daß

$$\left[\vec{p}\,' \cdot \dot{\vec{q}}\,' - H'\left(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t\right)\right] - \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[\vec{q} \cdot \vec{p} + \Lambda_3\left(\vec{p}, \vec{q}\,', t\right)\right] = 0,$$

wobei

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial p_i \partial q'_j}\right) \neq 0$$

gelten soll. Hier hängt die generierende Funktion Λ_3 von den alten Impulsen $\vec{p}$ und den neuen Ortskoordinaten $\vec{q}\,'$ ab. Man beachte das Vorzeichen des Terms $\frac{d}{dt}(\vec{q} \cdot \vec{p})$. Hier findet man

$$q_i = -\frac{\partial \Lambda_3}{\partial p_i}, \qquad p'_i = -\frac{\partial \Lambda_3}{\partial q'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_3}{\partial t}.$$

Zu guter Letzt betrachten wir noch den vierten Fall, der durch die Bedingung

$$\left[\vec{p}\,' \cdot \dot{\vec{q}}\,' - H'\left(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t\right)\right] - \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[\vec{q} \cdot \vec{p} - \vec{q}\,' \cdot \vec{p}\,' + \Lambda_4\left(\vec{p}, \vec{p}\,', t\right)\right] = 0$$

definiert ist, wobei

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Lambda_4}{\partial p_i \partial p'_j}\right) \neq 0$$

gelten soll. In diesem Fall hat man

$$q_i = -\frac{\partial \Lambda_4}{\partial p_i}, \qquad q'_i = \frac{\partial \Lambda_4}{\partial p'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_4}{\partial t}.$$

Betrachten wir nun ein Beispiel für eine kanonische Transformation. Wir betrachten den harmonischen Oszillator in einer Dimension. Die Hamilton-Funktion dieses Systems lautet

$$H\left(q, p\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2.$$

Wir betrachten eine kanonische Transformation des ersten Typs, die durch die Funktion

$$\Lambda_1\left(q, q'\right) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot q'$$

erzeugt wird. Es ist

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q} = m\omega q \cot q', \\ p' &= -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'} = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 q'}. \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichungen nach q und p auf, so finden wir

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q', \\ p &= \sqrt{2m\omega p'} \cos q'. \end{aligned}$$

Somit ist

$$H'\left(q', p'\right) = \omega p' \cos^2 q' + \omega p' \sin^2 q' = \omega p'.$$

Die Variable q' ist zyklisch. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} q' = \omega, \qquad \frac{d}{dt} p' = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist gegeben durch

$$q'(t) = \omega t + q'_0, \qquad p'(t) = p'_0.$$

Transformiert man nun wieder zurück auf die ursprünglichen Variablen q und p, so findet man die übliche Form der Lösung des harmonischen Oszillators. Wir haben gesehen, daß durch eine geschickte Wahl einer kanonischen Transformation die Lösung der Differentialgleichungen vereinfacht werden kann.

Die vier verschiedenen Typen einer Berührungstransformation gehen durch Legendre-Transformationen auseinander hervor. Wir gehen von einer Berührungstransformation des ersten Typs aus, die durch die generierende Funktion $\Lambda_1\left(\vec{q}, \vec{q}\,', t\right)$ erzeugt wird. Wir wollen weiter annehmen, daß

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q'_i \partial q'_j}\right) \neq 0$$

Führen wir nun eine Legendre-Transformation der Funktion $-\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)$ bezüglich der Variablen $\vec{q}\,'$ durch, so erhalten wir eine Funktion

$$\Lambda_2\left(\vec{q}, \vec{p}\,', t\right) = \vec{p}\,' \cdot \vec{q}\,'\left(\vec{q}, \vec{p}\,', t\right) + \Lambda_1\left(\vec{q}, \vec{q}\,'\left(\vec{q}, \vec{p}\,', t\right), t\right),$$

wobei $\vec{q}'(\vec{q},\vec{p}',t)$ aus

$$p_i' \;=\; -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i'}$$

bestimmt wird. Gilt nun

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial q_i p_j'}\right) \;\neq\; 0,$$

so generiert die Funktion $\Lambda_2(\vec{q},\vec{p}',t)$ eine Berührungstranformation des zweiten Typs.

Ebenso erhalten wir eine Berührungstransformation des dritten Typs, indem wir eine Legendre-Transformation der Funktion $\Lambda_1(\vec{q},\vec{q}',t)$ bezüglich der Variablen $\vec{q}$ durchführen. Das Ergebnis nennen wir $-\Lambda_3(\vec{p},\vec{q}',t)$:

$$-\Lambda_3\left(\vec{p},\vec{q}',t\right) \;=\; \vec{p}\cdot\vec{q}\left(\vec{p},\vec{q}',t\right)-\Lambda_1\left(\vec{q}\left(\vec{p},\vec{q}',t\right),\vec{q}',t\right),$$

wobei $q_i(\vec{p},\vec{q}',t)$ aus

$$p_i \;=\; \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i}$$

bestimmt wird. Gilt

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial p_i q_j'}\right) \;\neq\; 0,$$

so generiert die Funktion $\Lambda_3(\vec{p},\vec{q}',t)$ eine Berührungstranformation des dritten Typs.

Kombinieren wir die Legendre-Transformationen bezüglich der Variablen $\vec{q}$ und $\vec{q}'$, so erhalten wir aus $\Lambda_1(\vec{q},\vec{q}',t)$ eine Funktion $\Lambda_4(\vec{p},\vec{p}',t)$, welche eine Berührungstransformation des vierten Typs erzeugt.

Im folgenden wollen wir annehmen, daß alle auftretenden impliziten Gleichungen immer lösbar sind, d.h. das alle relevanten Determinanten nicht verschwinden. Betrachten wir nochmal eine Berührungstransformation des ersten Typs. Aus

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i}, \qquad p_i' = -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i'},$$

folgt durch Ableiten der ersten Gleichung nach q_j' und der zweiten Gleichung nach q_j:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j'} = \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_j' \partial q_i}, \qquad \frac{\partial p_i'}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_j \partial q_i'}.$$

Wir nehmen an, daß die Funktion Λ_1 zweimal stetig differenzierbar ist. Somit vertauschen die zweiten Ableitungen und wir finden

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}.$$

Aus der Betrachtung einer Berührungstranformation des zweiten Typs finden wir analog

$$\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i},$$

und aus der Betrachtung einer Berührungstranformation des dritten Typs finden wir

$$\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i}.$$

Die Betrachtung einer Berührungstransformation des vierten Typs liefert

$$\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} = -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i}.$$

Wir werden diese vier Beziehungen später bei der Diskussion der symplektischen Struktur des Phasenraums benötigen.

3.6 Die Poisson-Klammern

Die Hamilton-Funktion $H(\vec{q},\vec{p},t)$ ist eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $\vec{q}$, der verallgemeinerten Impulse $\vec{p}$ und der Zeit t. Wir wollen nun ganz allgemein Funktionen

$$A(\vec{q},\vec{p},t)$$

betrachten, die von diesen Variablen $\vec{q}$, $\vec{p}$ und t abhängen. Setzen wir in diese Funktion die physikalischen Lösungen $\vec{q}(t)$ und $\vec{p}(t)$ ein, so ist

$$A(t) = A(\vec{q}(t),\vec{p}(t),t)$$

eine Observable oder Meßgröße der klassischen Mechanik. Betrachten wir nun zwei Funktionen $A(\vec{q},\vec{p},t)$ und $B(\vec{q},\vec{p},t)$. Wir definieren die **Poisson-Klammer** dieser Funktionen wie folgt:

$$\{A,B\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right).$$

Die Poisson-Klammer ist wieder eine Funktion von $\vec{q}$, $\vec{p}$ und t.

Wir betrachten nun die zeitliche Ableitung der Funktion $A(\vec{q},\vec{p},t)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(\vec{q},\vec{p},t) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial A}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial A}{\partial t} \\
&= \{A,H\}+\frac{\partial A}{\partial t},
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Hamilton-Gleichungen $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$ und $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$ verwendet haben. Ist A eine Erhaltungsgröße, d.h gilt

$$\frac{d}{dt}A = 0,$$

so ist dies gleichbedeutend mit

$$\{A,H\}+\frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

Hängt desweitern A nicht explizit von der Zeit t ab, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\{A,H\} = 0.$$

Wir haben also den folgenden Sachverhalt: Hängt A nicht explizit von der Zeit t ab, und verschwindet die Poisson-Klammer von A mit der Hamilton-Funktion H, so folgt daß A eine Erhaltungsgröße ist. Anstelle des Ausdruckes “Erhaltungsgröße” verwendet man auch die Bezeichnung **Integral der Bewegung**.

Wir betrachten noch einige Eigenschaften der Poisson-Klammern. Die Poisson-Klammer ist antisymmetrisch:

$$\{A,B\} = -\{B,A\}.$$

Sie ist weiterhin bilinear:

$$\begin{aligned}
\{c_1A_1+c_2A_2,B\} &= c_1\{A_1,B\}+c_2\{A_2,B\}, \\
\{A,c_1B_1+c_2B_2\} &= c_1\{A,B_1\}+c_2\{A,B_2\}.
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt die Jacobi-Identität:

$$\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\} = 0.$$

Die Jacobi-Identität läßt sich einfach durch Nachrechnen beweisen.

Wir betrachten nun einige Spezialfälle: Die Poisson-Klammer der Koordinatenfunktionen verschwindet

$$\left\{q_i, q_j\right\} \;=\; 0,$$

da

$$\left\{q_i, q_j\right\} \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0.$$

Ebenso verschwindet die Poisson-Klammer der Impulsfunktionen:

$$\left\{p_i, p_j\right\} \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = 0.$$

Für die Poisson-Klammer zwischen der Koordinatenfunktion q_i und der Impulsfunktion p_j finden wir allerdings

$$\left\{q_i, p_j\right\} \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

Wir fassen zusammen:

$$\left\{q_i, q_j\right\} = 0, \quad \left\{p_i, p_j\right\} = 0, \quad \left\{q_i, p_j\right\} = \delta_{ij}.$$

Bemerkung: Die Funktionen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und die Poisson-Klammern haben einen engen Bezug zur Quantenmechanik. In der Quantenmechanik ersetzt man die Funktionen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ durch Operatoren $\hat{A}$ und die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ durch das $1/(i\hbar)$-fache des Kommutators $[\hat{A}, \hat{B}]$ der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. In der Quantenmechanik hat man daher die Kommutationsrelationen

$$\left[\hat{q}_i, \hat{q}_j\right] = 0, \quad \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] = 0, \quad \left[\hat{q}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}.$$

Wir betrachten noch das Verhalten der Poisson-Klammern unter Berührungstransformationen. Sei

$$q_i' = q_i'(\vec{q}, \vec{p}, t), \qquad p_i' = p_i'(\vec{q}, \vec{p}, t),$$

eine Berührungstransformation, die zum Beispiel durch die generierende Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)$ erzeugt wird. Für diese Berührungstransformation gilt:

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)}{\partial q_i}, \qquad p_i' = -\frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)}{\partial q_i'}.$$

Wir betrachten nun die Variablen $\vec{q}$ und $\vec{p}$ als unabhängig und die Größen $\vec{q}\,'(\vec{q},\vec{p},t)$ und $\vec{p}\,'(\vec{q},\vec{p},t)$ als abhängig. Durch Ableiten der ersten Gleichung nach q_j finden wir

$$0 = \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q_i \partial q_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_j}.$$

Diese Gleichung können wir nach $\frac{\partial q'_i}{\partial q_j}$ auflösen und finden

$$\frac{\partial q'_i}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} \left(M^{-1}\right)_{ik} \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q_k \partial q_i}, \qquad M_{ik} = \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q_i \partial q'_k}.$$

Leiten wir dagegen die erste Gleichung nach p_j ab, so finden wir

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial p_j},$$

also

$$\frac{\partial q'_i}{\partial p_j} = \left(M^{-1}\right)_{ij}.$$

Leiten wir weiter die zweite Gleichung nach q_j und p_j ab, so finden wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p'_i}{\partial q_j} &= -\frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q'_i \partial q_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q'_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_j}, \\
\frac{\partial p'_i}{\partial p_j} &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q'_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial p_j}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Poisson-Klammern der Variablen $\vec{q}\,'$ und $\vec{p}\,'$ bezüglich $\vec{q}$ und $\vec{p}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\{q'_i, q'_j\} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial q'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left[-\left(M^{-1}\right)_{il} \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_l \partial q_k} \left(M^{-1}\right)_{jk} + \left(M^{-1}\right)_{ik} \left(M^{-1}\right)_{jl} \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_l \partial q_k} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left[\left(M^{-1}\right)_{ik} \left(M^{-1}\right)_{jl} - \left(M^{-1}\right)_{il} \left(M^{-1}\right)_{jk} \right] \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_l \partial q_k} = 0.
\end{aligned}$$

Ebenso findet man nach einer etwas längeren Rechnung

$$\begin{aligned}
\{p'_i, p'_j\} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial p'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) = 0, \\
\{q'_i, p'_j\} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Relationen

$$\left\{q'_i, q'_j\right\} = 0, \qquad \left\{p'_i, p'_j\right\} = 0, \qquad \left\{q'_i, p'_j\right\} = \delta_{ij}$$

läßt sich nun zeigen, daß die Poisson-Klammer $\{A,B\}$ zweier Funktionen $A(\vec{q},\vec{p},t)$ und $B(\vec{q},\vec{p},t)$ invariant unter den Berührungstransformationen ist, d.h.

$$\{A,B\}_{\vec{q},\vec{p}} \;=\; \left\{A',B'\right\}_{\vec{q}\,',\vec{p}\,'} .$$

Es ist

$$A'\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right) \;=\; A\left(\vec{q}\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right),\vec{p}\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right),t\right)$$

und umgekehrt natürlich auch

$$A\left(\vec{q},\vec{p},t\right) \;=\; A'\left(\vec{q}\,'\left(\vec{q},\vec{p},t\right),\vec{p}\,'\left(\vec{q},\vec{p},t\right),t\right).$$

Analoge Beziehungen gelten für die Funktionen B und B'. Somit ist

$$\begin{aligned}
&\{A,B\}_{\vec{q},\vec{p}} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A'\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right)}{\partial q_k}\frac{\partial B'\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right)}{\partial p_k} - \frac{\partial A'\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right)}{\partial p_k}\frac{\partial B'\left(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\right)}{\partial q_k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial A'}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i}\frac{\partial p'_i}{\partial q_k}\right)\left(\frac{\partial B'}{\partial q'_j}\frac{\partial q'_j}{\partial p_k} + \frac{\partial B'}{\partial p'_j}\frac{\partial p'_j}{\partial p_k}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{\partial A'}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial p_k} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i}\frac{\partial p'_i}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial B'}{\partial q'_j}\frac{\partial q'_j}{\partial q_k} + \frac{\partial B'}{\partial p'_j}\frac{\partial p'_j}{\partial q_k}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial A'}{\partial q'_i}\frac{\partial B'}{\partial q'_j}\left\{q'_i,q'_j\right\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial A'}{\partial q'_i}\frac{\partial B'}{\partial p'_j}\left\{q'_i,p'_j\right\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i}\frac{\partial B'}{\partial q'_j}\left\{p'_i,q'_j\right\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i}\frac{\partial B'}{\partial p'_j}\left\{p'_i,p'_j\right\}_{\vec{q},\vec{p}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial A'}{\partial q'_i}\frac{\partial B'}{\partial p'_j}\delta_{ij} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i}\frac{\partial B'}{\partial q'_j}\left(-\delta_{ij}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A'}{\partial q'_i}\frac{\partial B'}{\partial p'_i} - \frac{\partial A'}{\partial p'_i}\frac{\partial B'}{\partial q'_j}\right) \\
&= \left\{A',B'\right\}_{\vec{q}\,',\vec{p}\,'} .
\end{aligned}$$

Somit folgt die Aussage, daß die Poisson-Klammern unter Berührungstransformationen invariant sind.

3.7 Der Phasenraum und der Satz von Liouville

Als Phasenraum eines physikalischen Systems mit n Freiheitsgraden bezeichnet man den Raum der Dimension $(2n)$ der durch die Punkte

$$(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

gegeben ist. Wir wollen im folgenden einen Punkt des Phasenraums durch die Notation

$$\vec{r} \;=\; (r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots, r_{2n}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

bezeichnen. Wir führen weiter die $(2n)\times(2n)$-Matrix J ein, die durch

$$J \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{1}_{n\times n} \\ -\mathbf{1}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

definiert ist. Offensichtlich ist

$$J \cdot J \;=\; -\mathbf{1}_{(2n)\times(2n)}$$

und

$$J^{-1} = J^T = -J.$$

Mit Hilfe der Matrix J lassen sich die Hamilton-Gleichungen kompakt wie folgt aufschreiben:

$$\frac{d}{dt} r_i \;=\; \sum_{j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j}.$$

Wir betrachten nochmal die Berührungstransformationen und definieren die $(2n)\times(2n)$ Matrizen M und M^{-1} wie folgt

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} & \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

M und M^{-1} sind die Jacobi-Matrizen der Hin- und Rücktransformation. Daher sind sie auch zueinander invers, d.h.

$$M^{-1} \cdot M \;=\; \mathbf{1}_{(2n)\times(2n)}.$$

Nun wissen wir aber, daß für eine Berührungstransformation zusätzlich die Relationen

$$\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} = -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i}$$

gelten. Wir haben also

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_j}{\partial p'_i} & -\frac{\partial q_j}{\partial p'_i} \\ -\frac{\partial p_j}{\partial q'_i} & \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} & -\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} \\ -\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \end{pmatrix}^T$$

Nun ist aber auch

$$-J \cdot M \cdot J = -\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} & -\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} \\ -\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \end{pmatrix},$$

und somit

$$M^{-1} = (-J \cdot M \cdot J)^T = -J \cdot M^T \cdot J.$$

Somit folgt aus $M^{-1} \cdot M = \mathbf{1}$

$$M^T \cdot J \cdot M = J.$$

Wir können diese Gleichung wie folgt interpretieren: Die Jacobi-Matrix einer Berührungstransformation läß die Matrix J invariant. Es läßt sich zeigen, daß die Menge aller $(2n) \times (2n)$-Matrizen M, die $M^T \cdot J \cdot M = J$ erfüllen, eine Gruppe bilden, die man als **reelle symplektische Gruppe** $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Weiter läßt sich zeigen, daß für $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ stets

$$\det M = 1$$

gilt.

Wir betrachten nun im Phasenraum Lösungen $\vec{r}(t)$ der Hamilton-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} r_i = \sum_{j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j}$$

zu den Anfangesbedingungen

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0.$$

Um die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen deutlich zu machen, schreiben wir $\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$. Man bezeichnet eine solche Lösung auch als **Fluss** im Phasenraum. Wir können nun die Frage stellen, wie ändert sich der Wert $\vec{r}(t)$, falls wir die Anfangsbedingungen $\vec{r}_0$ zur Zeit t_0 ändern ? Es gilt die folgende Aussage:

$$\frac{\partial}{\partial r_{0,j}} r_i(t, t_0, \vec{r}_0) \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}).$$

Dies ist der Satz von Liouville. Wir beweisen diesen Satz wie folgt: Für $t = t_0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial r_{0,j}} r_i(t_0, t_0, \vec{r}_0) = \mathbf{1}_{(2n)\times(2n)}$$

und die Aussage ist klarerweise erfüllt, da die Einheitsmatrix in der Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ enthalten ist. Da $\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$ eine Lösung der Hamilton-Gleichungen ist, gilt

$$\frac{d}{dt} r_i(t, t_0, \vec{r}_0) = \sum_{k=1}^{2n} J_{ik} \frac{\partial H(\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0), t)}{\partial r_k}.$$

Differenzieren wir nun nach $r_{0,j}$, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}} = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=1}^{2n} J_{ik} \frac{\partial^2 H(\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0), t)}{\partial r_k \partial r_l} \frac{\partial r_l(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}.$$

Mit der Notation

$$M_{ij} = \frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}, \qquad R_{kl} = \frac{\partial^2 H(\vec{r}, t)}{\partial r_k \partial r_l}$$

können wir diese Gleichung auch kompakt in Matrixschreibweise angeben:

$$\frac{d}{dt} M = J \cdot R \cdot M.$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(M^T \cdot J \cdot M\right) &= \left(\frac{d}{dt} M\right)^T \cdot J \cdot M + M^T \cdot J \cdot \left(\frac{d}{dt} M\right) \\
&= M^T \cdot R^T \cdot J^T \cdot J \cdot M + M^T \cdot J \cdot J \cdot R \cdot M. \\
&= M^T \cdot \left(R^T - R\right) \cdot M = 0,
\end{aligned}$$

da $R^T = R$ ist. Also folgt $M^T \cdot J \cdot M = \text{const}$, und da wir schon wissen, daß zum Zeipunkt $t = t_0$ M die Einheitsmatrix ist, gilt

$$M^T \cdot J \cdot M = J.$$

Dies zeigt, daß M eine symplektische Matrix ist. Wir haben damit die lokale Form des Satzes von Liouville bewiesen.
Bemerkung: Insbesondere gilt

$$\det M = \det\left(\frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}\right) = 1.$$

Der Satz von Liouville wird auch oft in integraler Form angegeben. In der integralen Form wird die physikalische Implikation des Satzes von Liouville besonders deutlich. Hierzu betrachten wir zur Zeit t_0 ein Gebiet U von Anfangskonfigurationen im Phasenraum. Diese Gebiet hat im Phasenraum das Volumen

$$\mathrm{vol}(U) = \int\limits_U d^{2n} r_0.$$

Wir betrachten nun die Evolution dieser Anfangswerte bis zum Zeitpunkt t. Zum Zeitpunkt t geht der Anfangswert $\vec{r}_0 \in U$ über in den Punkt $\vec{r}(t,t_0,\vec{r}_0)$. Die Menge aller $\vec{r}(t,t_0,\vec{r}_0)$, $\vec{r}_0 \in U$ definiert wieder ein Gebiet, daß wir mit V bezeichnen wollen. Die Lösungen der Hamilton-Gleichungen definieren also eine Abbildung $U \to V$. Für das Volumen von V gilt

$$\mathrm{vol}(V) = \int\limits_V d^{2n} r = \int\limits_U d^{2n} r_0 \underbrace{\det\left(\frac{\partial r_i(t,t_0,\vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}\right)}_{=1} = \int\limits_U d^{2n} r_0 = \mathrm{vol}(U).$$

In anderen Worten: Das Phasenraumvolumen einer Menge von Phasenraumpunkten ist unter der Evolution bezüglich der Hamilton-Gleichungen zeitlich konstant. Dies ist die integrale Form des Satzes von Liouville.

3.8 Die Hamilton-Jacobische Theorie

Wir haben bereits im Rahmen der Diskussion der kanonischen Transformationen anhand des Beispiels des harmonischen Oszillators gesehen, daß eine geschickt gewählte kanonische Transformation die Hamilton-Fukntion und die Bewegungsgleichungen vereinfachen kann. Im Falle des harmonischen Oszillators sind wir von der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

ausgegangen und haben die kanonische Transformation

$$\begin{aligned} q' &= \arctan \frac{m\omega q}{p}, \\ p' &= \frac{1}{2} m\omega q^2 + \frac{p^2}{2m\omega} \end{aligned}$$

betrachtet. Dies führte auf die neue und einfache Hamilton-Funktion

$$H'(q',p') = \omega p'.$$

Wir wollen nun diesen Sachverhalt systematischer untersuchen und stellen die Frage, unter welchen Bedingungen eine kanonische Transformation eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q},\vec{p})$ in die triviale Hamilton-Funktion

$$H'(\vec{q}',\vec{p}') = 0$$

überführt. Wir beschränken uns auf Berührungstransformationen des zweiten Typs. Gesucht ist also eine generierende Funktion $\Sigma(\vec{q},\vec{p}\,',t)$, so daß $H' = 0$ gilt. Aus $H' = 0$ folgt sofort, daß alle neuen Variablen Konstanten der Bewegung sind:

$$\vec{q}\,'(t) = \vec{q}\,'_0, \qquad \vec{p}\,'(t) = \vec{p}\,'_0.$$

Für eine Berührungstransformation des zweiten Typs gilt

$$H' = H + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \qquad p_i = \frac{\partial \Sigma}{\partial q_i}.$$

Somit erhalten wir

$$H\left(\vec{q},\nabla_{\vec{q}}\Sigma,t\right) + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung in den $(n+1)$ Variablen $\vec{q}$ und t für die unbekannte Funktion $\Sigma(\vec{q},\vec{p}\,',t)$. Die n Variablen $\vec{p}\,'$ können wir hierbei wegen $\vec{p}\,'(t) = \vec{p}\,'_0$ als Parameter betrachten. Diese partielle Differentialgleichung wird als die **Hamilton-Jacobische Differentialgleichung** bezeichnet.

Bemerkung: Mit dieser Vorgehensweise haben wir im allgemeinen das Problem nicht vereinfacht, sondern nur verschoben. Die Hamilton-Gleichungen, die aus $H' = 0$ folgen, sind nun zwar trivial, allerdings muß zunächst um auf diese Form zu kommen, die generierende Funktion $\Sigma(\vec{q},\vec{p}\,',t)$ durch Lösen der partiellen Hamilton-Jacobi-Gleichung bestimmt werden. Partielle Differentialgleichungen sind im allgemeinen schwieriger zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungen, daher führt diese Methode im allgemeinen nicht zu einer Vereinfachung. In speziellen Fällen kann dieses Verfahren aber durchaus hilfreich sein.

Wir bemerken noch, daß sich die Hamilton-Jacobi-Gleichung vereinfacht, falls H nicht explizit von der Zeit abhängt. In diesem Fall können wir

$$\Sigma\left(\vec{q},\vec{p}\,',t\right) = W\left(\vec{q},\vec{p}\,'\right) - Et$$

setzen und die Hamilton-Jacobi-Gleichung reduziert sich auf

$$H\left(\vec{q},\nabla_{\vec{q}}W\right) = E.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $W(\vec{q},\vec{p}\,')$ in den n Variablen $\vec{q}$. Die n Variablen $\vec{p}\,'$ können wieder als Parameter betrachtet werden. Die Funktion $W(\vec{q},\vec{p}\,')$ wird auch als **verkürzte Wirkungsfunktion** bezeichnet.

3.9 Das Routhsche Verfahren

Wir wollen noch ein weiteres Verfahren betrachten. Wir haben bereits gesehen, daß die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik gegenüber der Lagrangeschen Formulierung einen Vorteil hat, falls alle Ortskoordinaten zyklisch sind. In diesem Fall sind die n kanonischen Impulse p_i Erhaltungsgrößen und die Lösung des Problems reduziert sich auf das Lösen der n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Man erhält die Hamilton-Funktion wie immer durch eine Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t) - L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t\right),$$

wobei $\dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ aus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

bestimmt wird. Nun tritt allerdings ausgesprochen selten der Fall auf, daß alle Ortsvariablen zyklisch sind. Üblicherweise sind einige – aber nicht alle – Ortsvariablen zyklisch. Betrachten wir also den Fall, daß k der n Variablen zyklisch sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß dies die ersten k Variablen sind. Wir betrachten also ein System, daß durch eine Lagrange-Funktion

$$L(q_{k+1}, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, ..., \dot{q}_n, t)$$

beschrieben wird. In diesem Fall liegt es nahe, nur eine Legendre-Transformation bezüglich der Variablen $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_k$ zu betrachten. Für eine beliebige Lagrange-Funktion

$$L(q_1, ..., q_k, q_{k+1}, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, ..., \dot{q}_n, t),$$

in der die ersten k Variablen nicht notwendigerweise zyklisch sein müssen, definieren wir die Legendre-Transformierte bezüglich der Variablen $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_k$:

$$R(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_k, \dot{q}_{k+1}, ..., \dot{q}_n, t) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i\right) - L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, ..., \dot{q}_n, t),$$

wobei $\dot{q}_i$ für $1 \leq i \leq k$ aus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

bestimmt wird. Die Funktion R wird als **Routhsche Funktion** bezeichnet. Aus dieser Funktion folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i &= \frac{\partial R}{\partial p_i}, & 1 \leq i \leq k, \\
\frac{d}{dt} p_i &= -\frac{\partial R}{\partial q_i}, & 1 \leq i \leq k, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} &= 0, & (k+1) \leq j \leq n.
\end{aligned}$$

Für die ersten k Variablen haben wir also Differentialgleichungen vom Typ der Hamilton-Gleichungen, während wir für die restlichen $(n-k)$ Variablen Differentialgleichungen vom Typ der Euler-Lagrange-Gleichungen finden.

Bemerkung: Das Routhsche Verfahren ist besonders dann vorteilhaft, falls die ersten k Variablen zyklisch sind. Die k konjugierten Impulse p_i sind dann konstant, d.h.

$$\frac{d}{dt}p_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

und die Lösung des Problems reduziert sich auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q_i &= \frac{\partial R}{\partial p_i}, & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} &= 0, & (k+1) \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von k Differentialgleichungen erster Ordnung und $(n-k)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zur Lösung sind daher noch $k+2(n-k) = 2n-k$ Integrationen durchzuführen.

4 Anwendungen

4.1 Der starre Körper

Bisher haben wir uns in der Mechanik immer mit idealisierten Massenpunkten beschäftigt. Wir wollen nun auch ausgedehnte Körper betrachten. Das einfachste Modell eines ausgedehnten Körpers ist das eines **starren Körpers**. Hierbei wird angenommen, daß der Körper nicht deformierbar ist. Es treten daher unter dieser Annahme insbesondere keine inneren Schwingungen auf.

Wir können uns einen starren Körper durch n Punktteilchen der Massen m_i, $1 \leq i \leq n$ aufgebaut vorstellen, eventuell mit elektrischen Ladungen q_i. Wir sind an den Eigenschaften des starren Körpers für großes n interessiert. Wir werden daher im folgenden immer $n \geq 3$ voraussetzen, dies schließt einige degenerierte Spezialfälle für $n = 1$ oder $n = 2$ aus. Da der Körper starr sein soll, fordern wir, daß die relativen Abstände der Massenpunkte konstant sind, d.h.

$$\left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right| = \text{const}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Für $n = 2$ legt dies genau eine Zwangsbedingung fest, für $n = 3$ sind es drei Zwangsbedingungen, für $n > 3$ kommen für jedes weitere Teilchen drei weitere Zwangsbedingungen hinzu. Wir haben also für $n \geq 3$ immer

$$3n - 6$$

Zwangsbedingungen. Wir haben also ein physikalisches System mit $(3n)$ Koordinaten und $(3n - 6)$ Zwangsbedingungen. Somit hat der starre Körper

$$(3n) - (3n-6) = 6$$

Freiheitsgrade. Wir können den starren Körper daher durch sechs verallgemeinerte Koordinaten beschreiben. Es bietet sich an, hierfür die drei Schwerpunktskoordinaten

$$\vec{X} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i, \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

und drei Winkelkoordinaten, die die Orientierung des starren Körpers im Raum beschreiben, zu verwenden. Wir können die Koordinaten eines jeden Massenpunktes durch

$$\vec{x}_i(t) = \vec{X}(t) + R(t) \cdot \left(\vec{x}_i(0) - \vec{X}(0)\right)$$

angeben. Hierbei ist $R(t)$ eine 3×3-Matrix aus der Gruppe $SO(3)$. Die Matrix $R(t)$ beschreibt die Drehung bzw. Orientierung des starren Körpers im Raum. Für jede $SO(3)$-Matrix gilt

$$R^T = R^{-1}, \qquad \det R = 1.$$

Wir können die Drehmatrix R durch drei Euler-Winkel parametrisieren:

$$R = A_z(\alpha) \cdot B_x(\beta) \cdot C_z(\gamma),$$

wobei

$$A_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die drei Euler-Winkel α, β und γ vervollständigen den Satz der verallgemeinerten Koordinaten. Wir fassen zusammen: Die sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers können durch die drei Schwerpunktskoordinaten X_1, X_2 und X_3, sowie durch die drei Euler-Winkel α, β und γ beschrieben werden.

Wir verwenden nun die Notation

$$\vec{\xi}^{(i)} = \vec{x}_i(0) - \vec{X}(0).$$

Der Vektor $\vec{\xi}^{(i)}$ beschreibt also die Differenz des Ortsvektors des i-ten Massenpunktes zum Ortsvektor des Schwerpunkts zur Zeit $t = 0$.
Für die Geschwindigkeit des i-ten Massenpunktes gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_i(t) &= \dot{\vec{X}}(t) + \dot{R}(t) \cdot \left(\vec{x}_i(0) - \vec{X}(0)\right) \\ &= \dot{\vec{X}}(t) + \dot{R}(t) \cdot \vec{\xi}^{(i)}. \end{aligned}$$

Da R eine orthogonale Matrix ist, folgt aus

$$R^T \cdot R = \mathbf{1}$$

durch Ableiten

$$\dot{R}^T \cdot R + R^T \cdot \dot{R} = \mathbf{0},$$

und somit

$$R^T \cdot \dot{R} = -\dot{R}^T \cdot R = -\left(R^T \cdot \dot{R}\right)^T.$$

$(R^T \cdot \dot{R})$ ist also eine antisymmetrische Matrix. Wir betrachten nun die gesamte kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{X}} + \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right)^T \cdot \left(\dot{\vec{X}} + \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\xi}^{(i)\,T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\xi}^{(i)\,T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}. \end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} &= \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\xi}^{(i)}\right) = \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{x}_i(0) - \vec{X}(0)\right)\right] \\ &= \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \left(M\vec{X}(0) - M\vec{X}(0)\right) = 0.\end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\xi}^{(i)\,T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{\vec{X}} = 0.$$

Somit reduziert sich die kinetische Energie auf

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\xi}^{(i)\,T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\xi}^{(i)\,T} \cdot \dot{R}^T \cdot R \cdot R^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(R^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right)^2.\end{aligned}$$

Nun wissen wir aber schon, daß $(R^T \cdot \dot{R})$ antisymmetrisch ist. Daher gibt es Größen ω_1, ω_2 und ω_3, so daß

$$\left(R^T \cdot \dot{R}\right) \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^{(i)},$$

wobei wir $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ gesetzt haben. Die Größen $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ werden als **Winkelgeschwindigkeiten** bezeichnet. Aufgrund der Identität

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

erhalten wir für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{\omega}^2 \, \vec{\xi}^{(i)\,2} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right)^2\right).$$

Wir definieren nun den **Trägheitstensor** eines starren Körpers durch

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\vec{\xi}^{(k)\,2} \delta_{ij} - \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}\right).$$

Der Trägheitstensor ist ein Tensor zweiter Stufe und läßt sich durch eine 3×3-Matrix angeben. Mit Hilfe des Trägheitstensors läßt sich die kinetische Energie nun wie folgt schreiben:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I \vec{\omega}.$$

Der zweite Term beschreibt die Rotationsenergie. Die gesamte kinetische Energie läßt sich also als die Summe der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung und der Rotationsenergie schreiben.

Aus der Definition des Trägheitstensor ist unmittelbar ersichtlich, daß der Tensor symmetrische ist:

$$I_{ij} \;=\; I_{ji}.$$

Nun besagt ein Satz aus der linearen Algebra, daß eine reelle symmetrische Matrix immer durch eine orthogonale Matrix auf Diagonalform gebracht werden kann, d.h. man findet $O \in SO(3,\mathbb{R})$ so daß

$$O^T \cdot I \cdot O \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 werden auch als **Hauptträgheitsmomente** bezeichnet. Die Rotationsmatrix beschreibt nichts anderes als eine Rotation des Koordinatensystems zum Zeitpunkt $t = 0$. Wählt man nun das Koordinatensystem so, daß der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat, so sind die Hauptträgheitsmomente gegeben durch

$$\lambda_1 = \sum_{k=1} m_k \left(\xi_2^{(k)\,2} + \xi_3^{(k)\,2} \right), \quad \lambda_2 = \sum_{k=1} m_k \left(\xi_3^{(k)\,2} + \xi_1^{(k)\,2} \right), \quad \lambda_3 = \sum_{k=1} m_k \left(\xi_1^{(k)\,2} + \xi_2^{(k)\,2} \right).$$

Dies zeigt, daß die Hauptträgheitsmomente immer größer gleich Null.
Bemerkung: Die obigen drei Formeln gelten nur in dem Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor diagonal ist. Man findet dieses Koordinatensystem (und die Hauptträgheitsmomente) durch Aufstellen des Trägheitstensors in einem beliebigen Koordinatensystem und der anschliessenden Diagonalisierung.

Bezüglich der Hauptträgheitsmomente kann man nun die folgenden drei Fälle unterscheiden:

- Alle Eigenwerte sind paarweise verschieden. Man spricht hier auch von einem **unsymmetrischen Kreisel**.
- Zwei Eigenwerte sind gleich, während der dritte Eigenwert hiervon verschieden ist. In diesem Fall spricht man von einem **symmetrischen Kreisel**.
- Alle drei Eigenwerte sind gleich. Dieser Fall wird auch als **Kugelkreisel** bezeichnet. Bemerkung: Es wird nur gefordert, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ gilt. Hieraus folgt im allgemeinen nicht, daß der starre Körper Kugelgestalt hat.

Betrachten wir nun den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers. Es ist

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{X} + R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \left(\dot{\vec{X}} + \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \\
&= M\vec{X} \times \dot{\vec{X}} + \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{X} \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) + \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \dot{\vec{X}} + \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right)\right] \\
&= M\vec{X} \times \dot{\vec{X}} + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right).
\end{aligned}$$

Die mittleren Terme verschwinden wieder wegen

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\xi}^{(i)} = 0.$$

Betrachten wir nun eine Relation der Form $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ und transformieren wir diese Relation mit einer Matrix $R^T \in SO(3,\mathbb{R})$, so lautet die transformierte Relation $R^T \vec{c} = (R^T \vec{a}) \times (R^T \vec{b})$. Auflösen nach $\vec{c}$ liefert die Identität

$$\vec{a} \times \vec{b} = R \cdot \left[\left(R^T \cdot \vec{a}\right) \times \left(R^T \cdot \vec{b}\right)\right].$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) &= \sum_{i=1}^{n} m_i R \cdot \left[\left(R^T \cdot R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \left(R^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i R \cdot \left[\vec{\xi}^{(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^{(i)}\right)\right].
\end{aligned}$$

Aufgrund der Identität

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$

ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i R \cdot \left({\vec{\xi}^{(i)}}^{\,2} \vec{\omega} - \vec{\xi}^{(i)} \left(\vec{\xi}^{(i)} \cdot \vec{\omega}\right)\right) = R \cdot I \cdot \vec{\omega}.$$

Somit erhalten wir für den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = M\vec{X} \times \dot{\vec{X}} + R \cdot I \cdot \vec{\omega}.$$

Der Gesamtdrehimpuls setzt sich also zusammen aus einem Bahndrehimpuls, der durch die Schwerpunktsbewegung gegeben ist und einem Rotationsdrehimpuls, der durch den zweiten Term beschrieben wird.

Wir bezeichnen mit $\vec{K}_i$ die (äußere) Kraft, die auf den i-ten Massenpunkt wirkt. Somit ist das gesamte Drehmoment, welches auf den starren Körper wirkt, gegeben durch

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \times \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{X} + R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \vec{K}_i = \vec{X} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \vec{K}_i$$

Der letzte Term läß sich noch etwas umformen:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(R \cdot R^T \cdot \vec{K}_i \right) = R \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}^{(i)} \times \left(R^T \cdot \vec{K}_i \right) \right].$$

Somit lautet das Drehmoment also

$$\vec{M} = \vec{X} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i \right) + R \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}^{(i)} \times \left(R^T \cdot \vec{K}_i \right) \right].$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen des starren Körpers betrachten. Wir nehmen an, daß auf die Massenpunkte nur konservative Kräfte wirken. Die Kräfte können somit durch ein Potential beschrieben werden. Da per Definition der Körper starr sein soll, ändern sich die relativen Abstände zwischen den Massenpunkten nicht. Daher liefern in der Potentialfunktion Terme der Form

$$V \left(\left| \vec{x}_i - \vec{x}_j \right| \right)$$

nur **konstante** Beiträge und können daher ignoriert werden. Wäre der Körper deformierbar, so würden diese Terme innere Kräfte beschreiben. Es genügt daher, sich für das Potential auf äußere Kräfte zu beschränken.

Als verallgemeinerte Koordinaten des starren Körpers wählen wir die drei Schwerpunktskoordinaten X_1, X_2 und $X_\S$, sowie die drei Euler-Winkel α, β und γ, welche die Orientierung des starren Körpers im Raum beschreiben. Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten sind dann $\dot{\vec{X}}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$. Die Lagrange-Funktion des starren Körpers lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} - V \left(\vec{X}, \alpha, \beta, \gamma \right)$$

Wir müssen allerdings noch die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$ durch unsere verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten ausdrücken. Nun hatten wir allerdings die Größen ω_1, ω_2 und ω_3 definiert durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = R^T \cdot \dot{R}.$$

Die Rotationsmatrix R war gegeben durch

$$R = A_z(\alpha) \cdot B_x(\beta) \cdot C_z(\gamma),$$

wobei die einzelnen Drehmatrizen wie folgt definert wurden:

$$A_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun ein, so findet man

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\gamma}\cos\beta, \\ \omega_2 &= -\dot{\alpha}\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma, \\ \omega_3 &= -\dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 und ω_3 hängen also von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$ ab, aber auch von den verallgemeinerten Koordinaten α, β und γ.

Man findet nun als Bewegungsgleichungen sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die ersten drei beschreiben die Schwerpunktsbewegung:

$$M\ddot{X}_i = -\frac{\partial V(\vec{X}, \alpha, \beta, \gamma)}{\partial X_i}.$$

Für die verbleibenden drei Gleichungen findet man

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{3} \omega_i I_{ij} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \sum_{i,j=1}^{3} \omega_i I_{ij} \frac{\partial \omega_j}{\partial \varphi}, \qquad \varphi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Diese drei Gleichungen lassen sich auf zwei verschiedene Arten eleganter schreiben. Die erste Version ist bereits aus der Experimentalphysik bekannt und setzt die änderung des Drehimpulses in Beziehung zum Drehmoment:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}.$$

Eine zweite Form geht auf Euler zurück und lautet

$$I \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\xi}^{(i)} \times \left(R^T \cdot \vec{K}_i\right).$$

Diese Gleichung wird als **Euler-Gleichung** bezeichnet.
Die Herleitung dieser beiden Formen der Bewegungsgleichung aus der Euler-Lagrange-Gleichung ist etwas langwierig. Allerdings kann die Euler-Gleichung relativ leicht aus der Gleichung für den Drehimpuls hergeleitet werden: Setzen wir in

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$$

die Ausdrücke für $\vec{L}$ und $\vec{M}$ ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left[M\vec{X}\times\dot{\vec{X}}+R\cdot I\cdot\vec{\omega}\right] \;=\; \vec{X}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i\right)+R\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{\xi}^{(i)}\times\left(R^T\cdot\vec{K}_i\right)\right].$$

Nun ist die Änderung des Bahndrehimpulses gleich dem ersten Term auf der rechten Seite, daher gilt

$$\frac{d}{dt}\left(R\cdot I\cdot\vec{\omega}\right) \;=\; R\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{\xi}^{(i)}\times\left(R^T\cdot\vec{K}_i\right)\right],$$

bzw.

$$R^T\cdot\frac{d}{dt}\left(R\cdot I\cdot\vec{\omega}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\vec{\xi}^{(i)}\times\left(R^T\cdot\vec{K}_i\right).$$

Die linke Seite läßt sich wie folgt vereinfachen

$$R^T\cdot\frac{d}{dt}\left(R\cdot I\cdot\vec{\omega}\right) \;=\; R^T\cdot\left(R\cdot I\cdot\dot{\vec{\omega}}+\dot{R}\cdot I\cdot\vec{\omega}\right)=I\cdot\dot{\vec{\omega}}+R^T\cdot\dot{R}\cdot I\cdot\vec{\omega}.=I\cdot\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times\left(I\cdot\vec{\omega}\right).$$

Somit erhalten wir die Eulersche Gleichung.

Als ein Beispiel betrachten wir einen starren Körper, auf den keine äußeren Kräfte einwirken. Durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystem können wir erreichen, daß der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat:

$$I \;=\; \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Die Euler-Gleichung

$$I\cdot\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times\left(I\cdot\vec{\omega}\right) \;=\; 0$$

vereinfacht sich zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda_1\dot{\omega}_1 &= (\lambda_2-\lambda_3)\,\omega_2\omega_3,\\ \lambda_2\dot{\omega}_2 &= (\lambda_3-\lambda_1)\,\omega_1\omega_3,\\ \lambda_3\dot{\omega}_3 &= (\lambda_1-\lambda_2)\,\omega_1\omega_2.\end{aligned}$$

Für einen symmetrischen Kreisel gilt $\lambda_1=\lambda_2$ und somit

$$\dot{\omega}_3 \;=\; 0,$$

und daher

$$\omega_3(t) \;=\; \text{const.}$$

Das System reduziert sich daher auf

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \omega_0\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}, \qquad \omega_0 = \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1}\omega_3.$$

Als Lösung findet man

$$\omega_1(t) = \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad \omega_2(t) = \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$\omega_\perp$ und φ_0 werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit des kräftefreien symmetrischen Kreisels rotiert also mit ω_0 um die Achse des Hauptträgheitsmoments λ_3.

Die Behandlung des starren Körpers, den wir bisher durch eine endliche Anzahl starr miteinander verbundener Massepunkte beschrieben haben, läß sich auch ohne größere Probleme auf eine kontinuierliche Massenverteilung verallgemeinern. Für die Gesamtmasse hat man in diesem Fall

$$M = \int d^3x\, \rho(\vec{x}),$$

wobei $\rho(\vec{x})$ die Massendichte ist. Der Schwerpunkt ist gegeben durch

$$\vec{X} = \frac{1}{M}\int d^3x\, \rho(\vec{x})\,\vec{x}.$$

Für den Trägheitstensor findet man

$$I_{ij} = \int d^3\xi\, \rho(\vec{x}(0))\left(\vec{\xi}^2\delta_{ij} - \xi_i\xi_j\right),$$

wobei die Notation $\vec{\xi} = \vec{x}(0) - \vec{X}(0)$ verwendet wurde.

4.2 Kleine Schwingungen

Wir haben bei der Diskussion des starren Körpers angenommen, daß die relativen Abstände der einzelnen Massenpunkte zueinander konstant sind. Diese Annahme hat die Anzahl der Freiheitsgrade für ein System mit $n \geq 3$ Massenpunkte auf sechs Freiheitsgrade reduziert. Anschaulich entsprechen diese sechs Freiheitsgrade der Schwerpunktsbewegung und der Rotation des starren Körpers.

Eine realistischere Beschreibung würde dagegen nicht die Annahme machen, daß die relativen Abstände der einzelnen Massenpunkte zueinander konstant sind, sondern durch die etwas schwächere Annahme ersetzen, daß die Änderungen der relativen Abstände klein sind gegenüber den Änderungen der oben erwähnten sechs verallgemeinerten Koordinaten. Wir wollen weiter annehmen, daß die Änderung der relativen Abstände um eine Gleichgewichtslage herum stattfindet.

Auch in diesem Fall können wir die makroskopischen Eigenschaften der Schwerpunktsbewegung und der Rotation wie beim starren Körper beschreiben. Hinzu kommen nun noch kleine Schwingungen der relativen Abstände. Diese wollen wir nun betrachten. Da wir die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkts- und Rotationsfreiheitsgrade schon behandelt haben, konzentrieren wir uns nur auf die Schwingungsfreiheitsgrade.

Wir wollen ein konservatives System mit n Freiheitsgraden betrachten. Da das System konservativ ist, wird die potentielle Energie durch ein Potential

$$V(\vec{q})$$

beschrieben. Wir wollen weiter annehmen, daß dieses Potential ein Minimum an der Stelle $\vec{q} = \vec{q}_0$ besitzt. Mathematisch ausgedrückt fordern wir

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\vec{q}_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left.\frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\vec{q}_0} \quad \text{ist positiv definit.}$$

Die kinetische Energie des Systems läßt sich allgemein als

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\vec{q})\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

schreiben, wobei $C_{ij}(\vec{q}) = C_{ji}(\vec{q})$ gilt.
Die Gleichgewichtslage ist durch

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_0, \qquad \dot{\vec{q}}(t) = \vec{0}$$

gegeben. Wir wollen nun kleine Auslenkungen von der Gleichgewichtslage betrachten. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\eta_i(t) = q_i(t) - q_i(0), \qquad \dot{\eta}_i(t) = \dot{q}_i(t)$$

und entwickeln die kinetische Energie und die potentielle Energie in den kleinen Größen $\vec{\eta}$ und $\dot{\vec{\eta}}$ bis zur quadratischen Ordnung. Wir haben

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\vec{q}_0)\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j + O\left(\eta \dot{\eta}^2\right), \\ V &= V(\vec{q}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\vec{q}_0} \eta_i \eta_j + O\left(\eta^3\right). \end{aligned}$$

In der Entwicklung der Potentialfunktion verschwindet der Term linear in $\vec{\eta}$ wegen der Voraussetzung, daß an der Stelle $\vec{q} = \vec{q}_0$ ein Minimum vorliegt. Den konstanten Term $V(\vec{q}_0)$ in der Entwicklung der Potentialfunktion können wir in der weiteren Betrachtung ignorieren. Setzen wir

$$T_{ij} = C_{ij}(\vec{q}_0), \qquad V_{ij} = \left.\frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\vec{q}_0},$$

so können wir das System durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}\eta_i\eta_j$$

beschreiben. Wir bemerken, daß T_{ij} und V_{ij} nicht von den Variablen $\vec{\eta}$ und $\dot{\vec{\eta}}$ abhängen. T_{ij} und V_{ij} definieren jeweils reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrizen. Aufgrund eines Satzes aus der linearen Algebra folgt daher, daß sie jeweils reelle Eigenwerte haben. Wir wissen darüber hinaus, daß V_{ij} positiv definit ist. (V_{ij} ist Hessesche Matrix am Punkte des Minimums.) Daher sind alle Eigenwerte von V_{ij} positiv. Wir fordern nun weiter, daß auch die Matrix T_{ij} positiv definit ist. Dies ist eine vernünftige Annahme. Wäre T_{ij} nicht positiv definit, so könnten wir eine Geschwindigkeitskomponente immer weiter erhöhen, ohne daß die kinetische Energie zunimmt. Ist T_{ij} positiv definit, so hat auch T_{ij} nur positive Eigenwerte. Sind alle Eigenwerte positiv, so folgt sofort daß die Determinante ungleich Null ist und die Matrix daher invertierbar ist.

Fassen wir kurz zusammen: T_{ij} und V_{ij} sind reelle symmetrische Matrizen, die positiv definit sind. Insbesondere sind sie invertierbar.

Aus der Lagrange-Funktion folgen nun die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_{j=1}^{n} V_{ij}\eta_j = 0.$$

Wir können diese Gleichungen auch in Matrizenschreibweise angeben:

$$T \cdot \ddot{\vec{\eta}} + V \cdot \vec{\eta} = \vec{0}.$$

Dies ist ein System von n linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da T invertierbar ist, kann diese Gleichung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\ddot{\vec{\eta}} + A \cdot \vec{\eta} = \vec{0}, \quad A = T^{-1} \cdot V.$$

Allerdings verliert man hier die Eigenschaft, daß man mit symmetrischen Matrizen arbeitet. Sind B und C symmetrische und invertierbare Matrizen ($B^T = B$ und $C^T = C$), so kann zwar zeigen, daß auch die Inversen wieder symmetrisch sind, allerdings ist das Produkt im allgemeinen nicht symmetrisch:

$$(B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T = C \cdot B.$$

Wir sehen also, daß das Produkt nur dann symmetrisch ist, falls B und C kommutieren.

Daher wählt man zur Lösung der Bewegungsgleichungen üblicherweise einen Weg, der immer im Bereich der symmetrischen Matrizen bleibt. Wir gehen hierzu in drei Schritten vor: Ausgehend von der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^T \cdot T \cdot \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^T \cdot V \cdot \vec{\eta}.$$

diagonalsieren wir im ersten Schritt die Matrix T. Da T symmetrisch ist, ist die Transformationsmatrix O_1 orthogonal. Wir haben also

$$O_1^T \cdot T \cdot O_1 \;=\; \mathrm{diag}\,(\mu_1, \ldots, \mu_n)\,.$$

Setzen wir

$$\vec{\eta}' \;=\; O_1^T \cdot \vec{\eta},$$

so lautet unsere Lagrange-Funktion nun

$$L \;=\; \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}'^T \cdot \left(O_1^T \cdot T \cdot O_1\right) \cdot \dot{\vec{\eta}}' - \frac{1}{2}\vec{\eta}'^T \cdot \left(O_1^T \cdot V \cdot O_1\right) \cdot \vec{\eta}'.$$

Im zweiten Schritt reskalieren wir nun alle Variablen mit den Wurzeln der im ersten Schritt bestimmten Eigenwerte:

$$\vec{\eta}'' \;=\; S \cdot \vec{\eta}', \qquad S = \mathrm{diag}\,(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n})\,.$$

Wir haben nun

$$L \;=\; \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}''^T \cdot \left(S^{-1} \cdot O_1^T \cdot T \cdot O_1 \cdot S^{-1}\right) \cdot \dot{\vec{\eta}}'' - \frac{1}{2}\vec{\eta}''^T \cdot \left(S^{-1} \cdot O_1^T \cdot V \cdot O_1 \cdot S^{-1}\right) \cdot \vec{\eta}''.$$

Nun ist allerdings

$$S^{-1} \cdot O_1^T \cdot T \cdot O_1 \cdot S^{-1} \;=\; \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) \cdot \mathrm{diag}\,(\mu_1, \ldots, \mu_n) \cdot \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) = \mathbf{1},$$

und somit vereinfacht sich die Lagrange-Funktion zu

$$L \;=\; \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}''^T \cdot \dot{\vec{\eta}}'' - \frac{1}{2}\vec{\eta}''^T \cdot \left(S^{-1} \cdot O_1^T \cdot V \cdot O_1 \cdot S^{-1}\right) \cdot \vec{\eta}''.$$

Die Matrix

$$V'' \;=\; S^{-1} \cdot O_1^T \cdot V \cdot O_1 \cdot S^{-1}$$

ist wieder symmetrisch und kann nun im dritten Schritt durch eine orthogonale Transformation O_2 diagonalisiert werden:

$$O_2^T \cdot V'' \cdot O_2 \;=\; \mathrm{diag}\left(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2\right).$$

Da V als positiv definit vorausgesetzt war, sind auch hier alle Eigenwerte positiv. Wir haben sie daher als Quadrate reeller Zahlen ω_i geschrieben. Wir setzen nun

$$\vec{\xi} \;=\; O_2^T \cdot \vec{\eta}'',$$

und erhalten die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{\xi}}^T \cdot \dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2}\vec{\xi}^T \cdot \mathrm{diag}\left(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2\right) \cdot \vec{\xi}.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen dieser Lagrange-Funktion lauten

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Dies sind n Gleichungen vom Typ eines harmonischen Oszillators. Sie sind nicht gekoppelt. Die Lösungen sind daher

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) \sin\left(\omega_i t + \varphi_i\right),$$

wobei $\xi_i(0)$ und φ_i durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Die Koordinaten ξ_i werden auch als **Normalkoordinaten** bezeichnet. Die Kreisfrequenzen ω_i bezeichnet man als **Eigenfrequenzen**.

Wir fassen zusammen: Kleine Auslenkungen von der Gleichgewichtslage führen zu Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Durch eine geeignete Wahl der n verallgemeinerten Koordinaten können wir erreichen, daß das System durch n entkoppelte Schwingungen beschrieben wird. Man spricht von Eigenschwingungen, die zugehörigen Kreisfrequenzen werden als Eigenfrequenzen bezeichnet.