

# Mathematische Rechenmethoden 2

Stefan Weinzierl

16. Juli 2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Differential- und Integralrechnung in mehreren Dimensionen</b>	<b>4</b>
2.1	Topologische Grundbegriffe . . . . .	4
2.2	Konvergenz in metrischen Räumen . . . . .	7
2.3	Stetigkeit . . . . .	8
2.4	Kurven . . . . .	9
2.5	Funktionen in mehreren Variablen . . . . .	12
2.6	Vektorfelder . . . . .	17
2.7	Integralrechnung in mehreren Variablen . . . . .	25
2.8	Integration auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	35
2.8.1	Definition einer Mannigfaltigkeit . . . . .	35
2.8.2	Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
2.8.3	Die Sätze von Gauß und Stokes . . . . .	42
2.8.4	Differentialformen . . . . .	44
2.9	Variationsrechnung . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>55</b>
3.1	Distributionen . . . . .	55
3.2	Die Fourier-Transformation . . . . .	58
3.3	Beispiele partieller Differentialgleichungen . . . . .	60
3.3.1	Die Potentialgleichung . . . . .	60
3.3.2	Die Schwingungsgleichung . . . . .	62
3.3.3	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	65

# 1 Einführung

Inhalt:

- Differential - und Integralrechnung in mehreren Dimensionen
- Vektoranalysis
- Partielle Differentialgleichungen

Literatur:

- O. Forster, Analysis 2 und 3, Vieweg

## 2 Differential- und Integralrechnung in mehreren Dimensionen

Im letzten Semester haben wir uns eingehend mit der Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer Variablen beschäftigt. Hierbei war der Definitionsbereich und Wertebereich jeweils eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Wir wollen dies nun verallgemeinern, indem wir  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{R}^n$  ersetzen.

Wir unterscheiden drei Situationen:

- Ist der Definitionsbereich weiterhin eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , aber der Wertebereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , so spricht man von einer **Kurve**.
- Ist hingegen der Definitionsbereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , der Wertebereich aber weiterhin eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , so spricht man von einer **Funktion in mehreren Variablen**.
- Im allgemeinsten Fall ist der Definitionsbereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und der Wertebereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$ . In diesem Fall spricht man von einem **Vektorfeld**.

### 2.1 Topologische Grundbegriffe

Um Begriffe wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf den allgemeinen Fall übertragen zu können, benötigen wir einige Grundbegriffe.

Wir beginnen mit dem Begriff einer **Metrik**: Sei  $X$  eine Menge. Eine Metrik auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ d(x, y) = d(y, x), \\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Man spricht von einem **metrischen Raum**, falls die Menge  $X$  eine Metrik besitzt. Die Größe  $d(x, y)$  bezeichnet als den Abstand der Punkte  $x$  und  $y$ .

Bemerkung: Aus den oben aufgeführten Eigenschaften folgt, daß

$$d(x, y) \geq 0$$

für alle  $x, y \in X$  gilt. Dies zeigt man wie folgt:

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Wir interessieren uns insbesondere für den Fall, daß die Menge  $X$  ein Vektorraum ist. Sei  $V$  nun also ein reeller Vektorraum. Wir definieren nun den Begriff einer **Norm** auf dem Vektorraum  $V$ . Wir werden sehen, daß dieser Begriff eng mit dem Begriff der Metrik verknüpft ist. Unter einer Norm auf  $V$  versteht man eine Abbildung

$$\begin{aligned} || \cdot || &: V \rightarrow \mathbb{R}, \\ \vec{x} &\rightarrow ||\vec{x}||, \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} ||\vec{x}|| = 0 &\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}, \\ ||\lambda\vec{x}|| &= |\lambda| \cdot ||\vec{x}||, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ ||\vec{x} + \vec{y}|| &\leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||. \end{aligned}$$

Satz: Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einer Norm. Dann wird durch

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$$

eine Metrik auf  $V$  definiert. Ein reeller Vektorraum mit einer Norm ist also automatisch ein metrischer Vektorraum.

Beispiele: Eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Man nennt diese Norm die euklidische Norm (oder auch Zwei-Norm). Weitere Beispiele für Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  sind die Maximum-Norm oder allgemeiner die  $p$ -Normen. Die Maximum-Norm ist definiert durch

$$||\vec{x}||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

Sei  $p \geq 1$ . Die  $p$ -Norm ist definiert durch

$$||\vec{x}||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Die euklidische Norm ergibt sich für  $p = 2$ . Man kann weiter zeigen, daß man die Maximum-Norm aus den  $p$ -Normen durch den Grenzfall  $p \rightarrow \infty$  erhält.

Wir werden oft von einer **offener Menge** sprechen. Dieser Begriff wird durch eine Topologie auf einem Raum definiert. Ein **topologischer Raum** ist eine Menge  $M$  zusammen mit einer Familie  $\mathcal{T}$  von Untermengen von  $M$ , so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}, M \in \mathcal{T}$
2.  $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$

3. Für jede Indexmenge  $A$  gilt  $U_\alpha \in \mathcal{T}; \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

$\mathcal{T}$  bezeichnet man als Topologie auf  $M$ , die Mengen  $U \in \mathcal{T}$  nennt man offene Mengen. Man bezeichnet eine Teilmenge  $\mathcal{U}$  als abgeschlossen, falls das Komplement  $M \setminus \mathcal{U}$  offen ist. Die Eigenschaft 2 impliziert daß der Durchschnitt endliche vieler offener Mengen wieder offen ist, die Eigenschaft 3 bedeutet, daß die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen (auch unendlich vieler) wieder offen ist.

Einen topologischen Raum bezeichnet man als **Hausdorff**-Raum, falls es zu jedem Paar verschiedener Punkte  $p_1, p_2 \in M$  offene Mengen  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$  gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$p_1 \in U_1, \quad p_2 \in U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Wir wollen den Begriff einer Topologie für einen metrischen Raum etwas genauer betrachten. Sei  $X$  ein metrischer Raum mit der Metrik  $d$ . Wir definieren die offene Kugel mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $r$  durch

$$B(x_0, r) = \{x \in X, d(x, x_0) < r\}$$

Wir bezeichnen eine Teilmenge  $U \subset X$  als **Umgebung** des Punktes  $x_0 \in X$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so daß

$$B(x_0, \varepsilon) \subset U.$$

Wir bezeichnen eine Teilmenge  $U \subset X$  als **offen**, falls für alle  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so daß

$$B(x, \varepsilon) \subset U.$$

Die so definierten offenen Mengen definieren eine Topologie und wir erhalten den folgenden Satz: Ein metrischer Raum ist ein topologischer Raum. Somit haben wir die Implikationen:

$$\text{normierter Raum} \Rightarrow \text{metrischer Raum} \Rightarrow \text{topologischer Raum.}$$

Wir haben darüberhinaus die zusätzliche Eigenschaft, daß ein metrischer Raum ein Hausdorff-Raum ist. Dies beweist man wie folgt: Seien  $x, y \in X$  zwei Punkte mit  $x \neq y$ . Wir setzen  $\varepsilon = d(x, y)/2$  und definieren

$$U = B(x, \varepsilon), \quad V = B(y, \varepsilon).$$

Diese beiden Umgebungen sind disjunkt. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein  $z \in U \cap V$  und es gälte

$$2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon,$$

also  $2\varepsilon < 2\varepsilon$ , was zum Widerspruch führt.

Wir definieren noch den Begriff eines Randpunktes: Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Randpunkt** von  $Y$ , wenn in jeder Umgebung von  $x$  sowohl ein Punkt von  $Y$  als auch ein Punkt  $X \setminus Y$  liegt. Die Menge aller Randpunkte von  $Y$  wird mit  $\partial Y$  bezeichnet.

Wir haben die folgenden Eigenschaften:

- Die Menge  $Y \setminus \partial Y$  ist offen.
- Die Menge  $Y \cup \partial Y$  ist abgeschlossen.
- Der Rand  $\partial Y$  ist abgeschlossen.

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Man nennt  $A$  **beschränkt**, falls

$$\sup \{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty.$$

Sei  $A$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Wir bezeichnen  $A$  als **kompakt**, falls  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist.

## 2.2 Konvergenz in metrischen Räumen

In diesem Abschnitt betrachten wir metrische Räume. Wir verallgemeinern nun die Konvergenzkriterien, die wir von Folgen reeller Zahlen kennen, auf Folgen von Punkten in metrischen Räumen. Im wesentlichen werden wir dabei den Betrag durch den Abstand (welcher durch die Metrik definiert ist) ersetzen.

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $(x_n)$  eine Folge von Punkten aus  $X$ . Die Folge  $(x_n)$  nennt man konvergent gegen den Punkt  $x \in X$ , in Symbolen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

falls zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so daß

$$x_k \in U \quad \forall k \geq N.$$

Alternativ läßt sich dies wie folgt formulieren: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß

$$d(x_k, x) < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

Wir bezeichnen eine Folge als **Cauchy-Folge**, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so daß

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Interessanter ist allerdings die Frage, ob jede Cauchy-Folge auch eine konvergente Folge. Räume in der diese

Umkehrung gilt, bezeichnen wir als **vollständige Räume**. Einen Raum bezeichnet man daher als vollständig, falls in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

Für den  $\mathbb{R}^n$  läßt sich zeigen, daß in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert, der  $\mathbb{R}^n$  ist also vollständig.

Allgemein bezeichnet man einen vollständigen und normierten Vektorraum als **Banachraum**.

## 2.3 Stetigkeit

Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und

$$f : X \rightarrow Y$$

eine Abbildung.  $f$  heißt **stetig** im Punkte  $x_0 \in X$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. wenn für jede Folge  $(x_j)$  von Punkten aus  $X$  mit  $\lim x_j = x_0$  gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f(x_0).$$

Alternativ kann man die Stetigkeit auch über das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium definieren:  $f$  ist genau dann im Punkte  $x_0$  stetig, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß

$$\tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ mit } d(x, x_0) < \delta.$$

Hierbei bezeichnet  $d$  die Metrik auf  $X$  und  $\tilde{d}$  die Metrik auf  $Y$ .

Die Abbildung  $f$  nennt man stetig auf  $X$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $x \in X$  stetig ist.

Wir behandeln noch die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen: Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume, sowie

$$f_n : X \rightarrow Y, \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$f : X \rightarrow Y$$

Abbildungen. Man sagt, die Folge  $(f_n)$  **konvergiert gleichmäßig** gegen  $f$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so daß

$$d(f_k(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ und } \forall k \geq N.$$

Der Punkt hierbei ist, daß  $N$  von  $x$  unabhängig ist.

**Satz:** Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f_n : X \rightarrow Y$  eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion  $f : X \rightarrow Y$  konvergiert. Dann ist auch  $f$  stetig.

**Bemerkung:** Es genügt nicht, nur die punktweise Konvergenz zu fordern.

## 2.4 Kurven

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Unter einer Kurve im  $\mathbb{R}^n$  versteht man eine stetige Abbildung

$$\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Wir bezeichnen mit  $f_k$  die Funktion

$$f_k : I \rightarrow \mathbb{R},$$

die die  $k$ -te Komponente von  $f$  beschreibt. Es ist also

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Eine Kurve  $\vec{f}(t)$  ist differenzierbar, falls alle Funktionen  $f_k(t)$  für  $1 \leq k \leq n$  differenzierbar sind.

Beispiel 1: Sei  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ . Die Abbildung

$$\vec{f} : t \rightarrow \vec{v}t + \vec{x}_0$$

beschreibt eine Gerade im  $\mathbb{R}^n$  durch den Punkt  $\vec{x}_0$  und mit dem Richtungsvektor  $\vec{v}$ .

Beispiel 2: Sei  $r > 0$  und  $c \neq 0$ . Die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ct \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Schraubenlinie im  $\mathbb{R}^3$ .

Bemerkung: In der Physik betrachtet man oft die Variable  $t \in \mathbb{R}$  als Zeit und  $\vec{f}(t) \in \mathbb{R}^n$  als Ort eines Teilchens. Die Kurve  $\vec{f}(t)$  beschreibt dann die Bahn eines Teilchens.

Sei  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve. Man bezeichnet die Größe

$$\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \dots \\ f_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

als Tangentialvektor an die Kurve zum Parameterwert  $t$ .

Bemerkung: Betrachtet man  $t$  als die Zeit und  $\vec{f}(t)$  als den Ort eines Teilchens, so entspricht  $\vec{f}'(t)$  der Geschwindigkeit.

Wir betrachten nun die Bogenlänge einer Kurve. Hierzu sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Unterteilt man das Intervall in  $n$  Teilintervalle

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

und verbindet man die Punkte  $\vec{f}(t_{j-1})$  und  $\vec{f}(t_j)$  durch eine Gerade, so erhält man einen Polygonzug. Die Länge dieses Polygonzugs ist

$$\sum_{j=1}^n \|\vec{f}(t_j) - \vec{f}(t_{j-1})\|.$$

Die Länge der Kurve wird nun definiert als der Grenzwert dieser Polygonzüge bei immer feineren Unterteilungen. Man erhält somit für die Länge der Kurve zwischen  $a$  und  $b$

$$L = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt.$$

Beispiel: Sei  $r > 0$ . Wir betrachten die Kurve

$$\begin{aligned} \vec{f} &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}(t) &= \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Kurve beschreibt eine Kreislinie. Es ist

$$\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r.$$

Somit erhält man für die Kurvenlänge

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{f}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r,$$

was natürlich mit dem Umfang des Kreises übereinstimmt.

Sei  $\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve. Man nennt  $\vec{f}$  **regulär**, falls

$$\vec{f}'(t) \neq \vec{0}$$

für alle  $t \in I$  ist. Gilt dagegen  $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$ , so bezeichnet man  $t_0$  als **singulären** Punkt. Ein Beispiel hierzu ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{f} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}(t) &= \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Diese Kurve hat einen singulären Punkt für  $t_0 = 0$ .

Wir betrachten nun zwei reguläre Kurven

$$\vec{f}: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{g}: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die sich in einem Punkte schneiden, es gilt also

$$\vec{f}(t_1) = \vec{g}(t_2)$$

für ein  $t_1 \in I_1$  und ein  $t_2 \in I_2$ . Wir definieren den **Schnittwinkel**  $\theta$  der beiden Kurven als den Winkel zwischen den Tangentialvektoren an dem Schnittpunkt. Wir erhalten also

$$\cos \theta = \frac{\vec{f}'(t_1) \cdot \vec{g}'(t_2)}{\|\vec{f}'(t_1)\| \|\vec{g}'(t_2)\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Zum Schluss betrachten wir noch Parametertransformationen. Sei  $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $[c, d] \subset \mathbb{R}$  ein weiteres Intervall. Sei weiter

$$\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$\begin{aligned}\vec{g} = \vec{f} \circ \varphi &: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \vec{g}(\tau) &= \vec{f}(\varphi(\tau)),\end{aligned}$$

wieder eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$ . Man sagt, daß die Kurve  $\vec{g}$  aus  $\vec{f}$  durch die Parametertransformation  $\varphi$  hervorgeht. Die Kurvenpunkte im  $\mathbb{R}^n$  von  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  sind dieselben, sie werden aber unter Umständen verschieden durchlaufen. Es können die folgenden beiden Fälle auftreten:

1.  $\varphi$  ist streng monoton wachsend. In diesem Fall werden die Punkte von  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  gleich durchlaufen und man nennt  $\varphi$  orientierungstreu. Für die Anfangs- und Endpunkte gilt in diesem Fall

$$\vec{f}(a) = \vec{g}(c), \quad \vec{f}(b) = \vec{g}(d).$$

2.  $\varphi$  ist streng monoton fallend. In diesem Fall werden die Punkte von  $\vec{g}$  umgekehrt durchlaufen bezüglich  $\vec{f}$ . Man nennt  $\varphi$  in diesem Fall orientierungsumkehrend. Für die Anfangs- und Endpunkte gilt in diesem Fall

$$\vec{f}(a) = \vec{g}(d), \quad \vec{f}(b) = \vec{g}(c).$$

Betrachtet man die Variable  $t$  als die Zeit, so entspricht eine orientierungsumkehrenden Parametertransformation einer Zeitumkehr.

Für den Tangentialvektor der Kurve  $\vec{g}(\tau)$  folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\vec{g}'(\tau) = \vec{f}'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau).$$

Insbesondere unterscheiden sich die Tangentialvektoren  $\vec{g}'(\tau)$  und  $\vec{f}'(t)$ , wobei  $t = \varphi(\tau)$  ist, nur um den skalaren Faktor  $\varphi'(\tau)$ .

Für die Bogenlängen gilt:

$$\int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt = \int_c^d \|\vec{g}'(\tau)\| d\tau.$$

Dies läßt sich leicht mit Hilfe der Substitutionsregel zeigen. Die beiden Kurven haben also die gleiche Bogenlänge, d.h. die Bogenlänge ist von der Parametrisierung unabhängig.

Wir betrachten ein Beispiel: Die Kurve

$$\begin{aligned} \vec{f} &: [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{r^2 - t^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beschreibt einen Halbkreis. Sei nun

$$\begin{aligned} \varphi &: [0, \pi] \rightarrow [-r, r], \\ \varphi(\tau) &= r \cos \tau \end{aligned}$$

eine Parametertransformation. Diese Transformation bildet das Intervall  $[0, \pi]$  bijektiv auf das Intervall  $[-r, r]$  ab. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{g} &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{g}(\tau) &= \begin{pmatrix} r \cos \tau \\ r \sin \tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß auch diese Kurve einen Halbkreis beschreibt.

Bemerkung: Die Parametertransformation  $\varphi$  in diesem Beispiel ist orientierungsumkehrend.

## 2.5 Funktionen in mehreren Variablen

Sei  $U$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Wir betrachten nun Funktionen

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist **partiell differenzierbar in der  $i$ -ten Koordinate**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

existiert. Man schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

Diese Formel zeigt auch, wie man die  $i$ -te partielle Ableitung berechnet: Man hält alle anderen Variablen  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  fest und nimmt die gewöhnliche Ableitung nach der Variablen  $x_i$ .

Wir nennen eine Funktion **partiell differenzierbar**, falls sie in allen Variablen partiell differenzierbar ist. Ebenso nennen wir eine Funktion **stetig partiell differenzierbar**, falls sie partiell differenzierbar ist und alle Ableitungen stetig sind.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Wir können partielle Ableitungen auch hintereinander ausführen und erhalten höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) \right).$$

Man beachte, daß diese Schreibweise impliziert, daß zunächst die Ableitung nach  $x_j$  ausgeführt wird, und das Zwischenergebnis dann nach  $x_i$  abgeleitet wird. Wir interessieren uns dafür unter welchen Voraussetzungen das Endergebnis nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt:

Satz: Sei  $f$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

Allgemeiner gilt: Ist  $f$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar, so vertauschen die  $k$ -ten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_1)}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_k)}} f(x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $\sigma$  eine Permutation von  $(i_1, \dots, i_k)$  ist.

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir sagen, daß  $f$  in  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  ein **lokales Maximum** hat, falls eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $\vec{x}_0$  existiert, so daß

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}),$$

für alle  $\vec{x} \in U$ . Gilt dagegen

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}),$$

für alle  $\vec{x} \in U$ , so spricht man von einem **lokalen Minimum**.

Es ist unmittelbar einsichtig, daß eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums oder lokalen Maximums das Verschwinden aller partiellen Ableitungen an der Stelle  $\vec{x}_0$  ist:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0.$$

Würde eine partielle Ableitung nicht verschwinden, so gibt es in jeder Umgebung von  $\vec{x}_0$  einen Punkt, an dem  $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$  gilt, sowie einen Punkt an dem  $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$  gilt. Ist zum Beispiel die  $i$ -te partielle Ableitung ungleich Null, so betrachtet man hierzu zwei Punkte, die um einen infinitesimalen positiven bzw. negativen Wert in Richtung des  $i$ -ten Einheitsvektors verschoben sind.

Um eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums oder Maximums zu finden betrachten wir die zweiten Ableitungen und definieren die **Hessesche Matrix**:

$$H_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{x}), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Da nach Voraussetzung  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, vertauschen die partiellen Ableitungen und die Hessesche Matrix ist offensichtlich symmetrisch:

$$H_{ij}(\vec{x}) = H_{ji}(\vec{x}).$$

Wir bezeichnen eine symmetrische  $n \times n$  Matrix  $A$  als **positiv definit**, falls für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  gilt:

$$\xi^T A \xi > 0.$$

Wir bezeichnen sie als **negativ definit**, falls für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  gilt:

$$\xi^T A \xi < 0.$$

Wir bezeichnen die Matrix  $A$  als **indefinit**, falls es ein  $\xi \in \mathbb{R}^n$  und ein  $\eta \in \mathbb{R}^n$  gibt, so daß

$$\xi^T A \xi > 0, \quad \eta^T A \eta < 0.$$

Man findet auch die Begriffe “positiv semi-definit” und “negativ semi-definit”. Eine symmetrische  $n \times n$  Matrix  $A$  nennt man **positiv semi-definit** bzw. **negativ semi-definit**, falls für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\xi^T A \xi \geq 0, \quad \text{bzw.} \quad \xi^T A \xi \leq 0.$$

Satz: Eine reelle symmetrische  $n \times n$  Matrix  $A$  besitzt eine Orthonormalbasis  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  von Eigenvektoren und alle Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind reell.

$$A \vec{e}_j = \lambda_j \vec{e}_j.$$

Wir betrachten nun den Vektor  $\xi$  in dieser Basis:

$$\xi = \sum_{i=1}^n c_i \vec{e}_i,$$

und erhalten durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \xi^T A \xi &= \left( \sum_{i=1}^n c_i \vec{e}_i^T \right) A \left( \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j (\vec{e}_i^T A \vec{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j (\vec{e}_i^T \lambda_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die folgenden Aussagen: Eine reelle symmetrische  $n \times n$  Matrix  $A$  ist positiv definit, falls alle Eigenwerte positiv sind.  $A$  ist negativ definit, falls alle Eigenwerte negativ sind.  $A$  ist indefinit, falls mindestens ein positiver und mindestens ein negativer Eigenwert existiert.  $A$  ist positiv semi-definit, falls alle Eigenwerte nicht negativ sind.  $A$  ist negativ semi-definit, falls alle Eigenwerte nicht positiv sind.

Um zu entscheiden, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist, ist es nicht notwendig die Eigenwerte zu bestimmen. Ein Kriterium, daß die Bestimmung der Eigenwerte vermeidet, wurde von Hurwitz angegeben: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine reelle symmetrische  $n \times n$  Matrix.  $A$  ist positive definit, falls

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt.

Wir kehren zur Betrachtung der lokalen Minima und Maxima einer Funktion zurück. Wir erhalten die folgende Aussage: Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt, so daß

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Ist die Hessesche Matrix  $H_{ij}(\vec{x}_0)$  positiv definit, so besitzt  $f$  in  $\vec{x}_0$  ein lokales Minimum. Ist sie negativ definit, so besitzt  $f$  in  $\vec{x}_0$  ein lokales Maximum. Ist die Hessesche Matrix indefinit, so sagt man, daß  $f$  in  $\vec{x}_0$  einen **Sattelpunkt** besitzt.

Beispiel 1: Sei

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Im Punkte  $\vec{x}_0 = (0, 0)$  verschwinden die partiellen Ableitungen:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2x|_{\vec{x}=(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2y|_{\vec{x}=(0,0)} = 0.$$

Die Hessesche Matrix ist gegeben durch

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit und  $f$  hat an der Stelle  $\vec{x}_0 = (0, 0)$  ein Minimum.

Beispiel 2: Sei nun

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Im Punkte  $\vec{x}_0 = (0, 0)$  verschwinden die partiellen Ableitungen:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2x|_{\vec{x}=(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\vec{x}=(0,0)} = -2y|_{\vec{x}=(0,0)} = 0.$$

Die Hessesche Matrix ist gegeben durch

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit und  $f$  hat an der Stelle  $\vec{x}_0 = (0, 0)$  einen Sattelpunkt.

## 2.6 Vektorfelder

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall einer Abbildung, in dem der Definitionsbereich  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und der Wertebereich  $W$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  ist:

$$\begin{aligned}\vec{f} &: U \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \vec{f}(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Man bezeichnet  $\vec{f}$  als ein Vektorfeld. Jedem Punkt  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  wird ein Vektor  $\vec{f} \in \mathbb{R}^m$  zugeordnet. Schreiben wir  $\vec{f}$  in Komponenten

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

so haben wir  $m$  Abbildungen

$$\begin{aligned}f_j &: U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow f_j(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Wir schreiben im folgenden  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Wir betrachten drei Beispiele für Vektorfelder:

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}_1(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}, \\ \vec{f}_2 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}_2(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \vec{f}_3 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}_3(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Diese Vektorfelder sind in Abbildung 1 graphisch dargestellt.

Wir bezeichnen eine Abbildung  $\vec{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  als im Punkte  $\vec{x}_0 \in U$  **total differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned}A &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \vec{x} &\rightarrow A\vec{x},\end{aligned}$$

gibt, so daß in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  gilt:

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{\xi}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + A\vec{\xi} + o(\|\vec{\xi}\|).$$

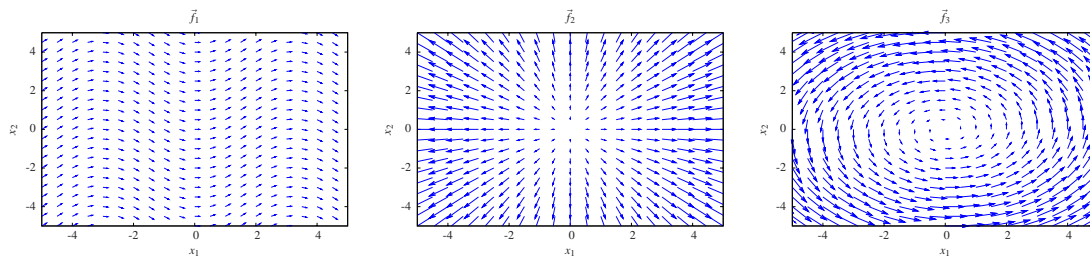


Abbildung 1: Darstellung der drei Vektorfelder aus dem Beispiel.

Die kleine “o”-Schreibweise bedeutet, daß das Restglied durch eine Funktion  $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$  gegeben ist, für die gilt

$$\lim_{\|\vec{\xi}\| \rightarrow 0} \frac{\vec{\varphi}(\vec{\xi})}{\|\vec{\xi}\|} = 0.$$

Das Restglied verschwindet also schneller als der lineare Term für  $\|\vec{\xi}\| \rightarrow 0$ . Die Bedingung an die totale Differenzierbarkeit bedeutet also, daß sich die Abbildung in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\vec{x}_0$  durch eine Konstante  $\vec{f}(\vec{x}_0)$  und einen linearen Term  $A\vec{\xi}$  beschreiben läßt.

Neben der totalen Differenzierbarkeit haben wir natürlich noch die partiellen Ableitungen der  $i$ -ten Komponente  $f_i$  nach der  $j$ -ten Koordinate:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h}.$$

Diese partiellen Ableitungen definieren eine  $m \times n$  Matrix  $J_{ij}$

$$J_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die man als **Jacobi-Matrix** oder Funktional-Matrix bezeichnet. Auch die Bezeichnung **Differential** wird verwendet, und man findet die Notation

$$D\vec{f}(\vec{x}) = J(\vec{x}).$$

Für den Zusammenhang zwischen totaler Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit haben wir die folgenden Sätze:

**Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\vec{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, die im Punkte  $\vec{x}_0 \in U$  total differenzierbar sei, d.h.

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{\xi}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + A\vec{\xi} + o(\|\vec{\xi}\|).$$

Dann ist  $\vec{f}$  im Punkte  $\vec{x}_0$  stetig und alle Komponenten  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  von  $\vec{f}$  sind im Punkte  $\vec{x}_0$  partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = A_{ij}.$$

Satz: Sei wieder  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Es sei weiter vorausgesetzt, daß die Abbildung  $\vec{f}$  im Punkte  $\vec{x}_0 \in U$  stetig partiell differenzierbar ist, d.h. alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$$

existieren und sind stetig. Dann ist  $\vec{f}$  in  $\vec{x}_0$  total differenzierbar.

Wir haben also die folgenden Implikationen:

$$\text{stetig partiell differenzierbar} \Rightarrow \text{total differenzierbar} \Rightarrow \text{partiell differenzierbar}.$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

Für die totale Ableitung gilt die Kettenregel: Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Mengen und

$$\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Abbildungen mit  $\vec{g}(U) \subset V$ . Sei weiter vorausgesetzt, daß die Abbildung  $\vec{g}$  im Punkte  $\vec{x}_0 \in U$  total differenzierbar sei und daß die Abbildung  $\vec{f}$  im Punkte  $\vec{y}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0)$  total differenzierbar sei. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$\vec{f} \circ \vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

im Punkte  $\vec{x}_0$  total differenzierbar und für ihr Differential gilt

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}_0) = D\vec{f}(\vec{y}_0) \cdot D\vec{g}(\vec{x}_0).$$

Betrachten wir hierzu ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \vec{g} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{g}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ 1 + 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \\ \vec{f} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{f}(\vec{y}) &= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Abbildung ist somit

$$\begin{aligned} \vec{f} \circ \vec{g} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ (1 + 2x_1x_2)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei weiter

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 = \vec{g}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für die Differentiale findet man

$$\begin{aligned} D\vec{g}(\vec{x}_0) &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}_{x_1=1, x_2=1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \\ D\vec{f}(\vec{y}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2y_2 \end{pmatrix}_{y_1=2, y_2=3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$D\vec{f}(\vec{y}_0) \cdot D\vec{g}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Andererseits erhält man dieses Ergebnis auch aus der direkten Rechnung:

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 2x_2 \\ 4x_2(1 + 2x_1x_2) & 4x_1(1 + 2x_1x_2) \end{pmatrix}_{x_1=1, x_2=1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Wir führen im Zusammenhang mit Vektorfeldern noch einige wichtige Begriffe ein: Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion von  $n$  Variablen. Die partiellen Ableitungen von  $\varphi$  definieren ein Vektorfeld, welches man als den **Gradienten** von  $\varphi$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \text{grad } \varphi(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Gradient einer skalaren Funktion ist also ein Vektorfeld, daß in der  $j$ -ten Komponente die  $j$ -te partielle Ableitung enthält. Führt man den Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  ein,

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

so läßt sich dieses Vektorfeld auch als

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

schreiben.

Bemerkung:  $\vec{\nabla}$  ist ein Operator, der auf eine Größe, wie zum Beispiel eine Funktion, die abgeleitet werden kann, wirkt. Man sollte diese Größe daher immer mitangeben. Mathematische Beziehungen, in denen die Größe auf die ein Operator wirkt fehlt, machen nur Sinn, wenn sie für alle möglichen Größen des Problems (wie zum Beispiel für alle Testfunktionen) gelten.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi(\vec{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten für den Gradienten

$$\text{grad } \varphi(\vec{x}) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir hatten bereits gesehen, daß eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums bzw. eines lokalen Minimums im Punkte  $\vec{x}_0$  das Verschwinden aller partiellen Ableitungen in diesem Punkte ist. Das Verschwinden aller partiellen Ableitungen ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}_0) = \vec{0},$$

d.h. der Gradient verschwindet.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\vec{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die **Divergenz** dieses Vektorfeldes als eine skalare Funktion der  $n$  Variablen

$$\text{div } \vec{f}: U \rightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$\text{div } \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_j}$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Nabla-Operators schreibt man auch oft

$$\text{div } \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}).$$

Beispiel: Wir betrachten das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \vec{f} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{f}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ 3x_2 - x_1 \\ 5x_3 + 7x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = 2x_1 + 3 + 5 = 2x_1 + 8.$$

Es ist auch interessant die Divergenz der drei Vektorfelder aus Abbildung 1 zu berechnen. Man findet:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f}_1(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin x_1 = 0, \\ \operatorname{div} \vec{f}_2(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_2(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 = 2, \\ \operatorname{div} \vec{f}_3(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_3(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0. \end{aligned}$$

Von diesen drei Beispielen hat also nur  $\vec{f}_2$  eine nicht-verschwindende Divergenz. Die Divergenz beschreibt die Quellen und Senken eines Vektorfeldes.

Wir betrachten noch die folgende Kombination von Gradient und Divergenz: Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion von  $n$  Variablen. Wir wenden erst den Gradienten auf  $\varphi$  an, und dann die Divergenz auf das resultierende Vektorfeld. Wir erhalten somit wieder eine skalare Funktion:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &: U \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Delta \varphi(\vec{x}) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(\vec{x})}{\partial x_j^2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators können wir wieder schreiben:

$$\Delta \varphi(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}).$$

Wir bezeichnen mit

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

den **Laplace-Operator**.

Wir betrachten noch den Spezialfall eines Vektorfeldes in drei Dimensionen:

$$\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Hier können wir noch eine weitere Operation einführen, die man als **Rotation** bezeichnet und wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators und des Kreuzproduktes läßt sich dies auch schreiben als

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}).$$

Beispiel: Sei

$$\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kehren wir nocheinmal zu den Vektorfeldern aus Abbildung 1 zurück. Diese Vektorfelder sind Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ , daher ist die Operation der Rotation nicht unmittelbar darauf anwendbar. Wir können aber trotzdem für ein Vektorfeld  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  die anti-symmetrische Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1$$

betrachten. Wir finden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \sin x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} 1 = \cos(x_1), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_{22} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{21} &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_{32} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{31} &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_2) = 2. \end{aligned}$$

Die Rotation beschreibt die Wirbel eines Vektorfeldes.

Rechenregeln: Seien

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

Vektorfelder und

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

Funktionen. Wir betrachten nun einige Rechenregeln des Nabla-Operators. Wir nehmen an, daß alle Felder und Funktionen zweimal stetig partiell differenzierbar sind. Im Folgenden wollen wir implizit annehmen, daß in Regeln in denen das Vektorprodukt bzw. die Rotation vorkommt,  $n = 3$  vorausgesetzt wird. In allen anderen Regeln ist  $n$  beliebig.

Rotation eines Gradientenfeldes:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Beweis: Wir betrachten die erste Komponente von  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi = 0.$$

Gleiches gilt für die anderen Komponenten. Ein Gradientenfeld ist also rotationsfrei.

Divergenz eines Rotationsfeldes:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= 0.\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ein Rotationsfeld ist also divergenzfrei.

Produktregeln:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (\varphi \vec{f}) &= (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \vec{f} + \varphi \operatorname{div} \vec{f}, \\ \vec{\nabla} (\varphi \vec{f}) &= (\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{f} + \varphi \vec{\nabla} \vec{f}.\end{aligned}$$

Beweis:

$$\vec{\nabla} (\varphi \vec{f}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi \vec{f}) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) \vec{f} + \sum_{j=1}^n \varphi \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{f} = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{f} + \varphi \vec{\nabla} \vec{f}.$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} (\varphi \vec{f}) &= (\operatorname{grad} \varphi) \times \vec{f} + \varphi \operatorname{rot} \vec{f}, \\ \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{f}) &= (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{f} + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{f},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{f} \times \vec{g}) &= (\operatorname{rot} \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\operatorname{rot} \vec{g}), \\ \vec{\nabla}(\vec{f} \times \vec{g}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}).\end{aligned}$$

Man beachte das für den Laplace-Operator gilt:

$$\Delta(\varphi\psi) = (\Delta\varphi)\psi + 2(\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}\psi) + \varphi\Delta\psi.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi\psi) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\varphi\psi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) \psi + \varphi \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi \right) \psi + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \psi + \varphi \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi \right] \\ &= (\Delta\varphi)\psi + 2(\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}\psi) + \varphi\Delta\psi.\end{aligned}$$

Die zweimalige Anwendung einer Rotation läßt sich Vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{f} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{f}) - \Delta \vec{f}, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f}.\end{aligned}$$

## 2.7 Integralrechnung in mehreren Variablen

In diesem Abschnitt möchten wir uns mit der Integration in mehreren Variablen beschäftigen. Sei  $Q$  ein achsenparalleler kompakter Quader im  $\mathbb{R}^n$ .  $Q$  ist gegeben durch

$$Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n,$$

wobei jedes  $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall ist. Auf diesem Quader betrachten wir eine stetige Funktion von  $n$  Variablen

$$\begin{aligned}f &: Q \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow f(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Halten wir  $x_2, \dots, x_n$  fest und integrieren wir über das Intervall  $I_1$ , so erhalten wir eine Funktion von  $(n-1)$  Variablen

$$F_1(x_2, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, \dots, x_n).$$

Ist  $f$  stetig, so ist auch  $F_1$  wieder stetig.

Wir können diesen Prozess nun fortsetzen und definieren  $F_{12}$  als eine Funktion von  $(n-2)$  Variablen, die wir durch Integration von  $F_1$  über  $I_2$  erhalten:

$$F_{12}(x_3, \dots, x_n) = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 F_1(x_2, \dots, x_n) = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \left( \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, \dots, x_n) \right).$$

Setzen wir dies für alle Variablen fort, so erhalten wir nach der letzten Integration eine reelle Zahl, die wir als das Integral von  $f$  über  $Q$  bezeichnen:

$$I = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \dots \left( \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \left( \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, \dots, x_n) \right) \right).$$

Wir schreiben oft auch

$$I = \int_Q dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots, x_n)$$

oder

$$I = \int_Q d^n x f(x_1, \dots, x_n),$$

bzw.

$$I = \int_Q d^n x f(\vec{x}).$$

Bemerkung: Das Integral  $I$  ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Integrationen ausgeführt werden.

Beispiel: Sei  $Q = [1, 2] \times [0, 1]$  und

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^3.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx_1 \int_0^1 dx_2 (x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^3) = \int_1^2 dx_1 \left( x_1^2x_2 + \frac{3}{2}x_1x_2^2 + \frac{5}{4}x_2^4 \Big|_{x_2=0}^{x_2=1} \right) \\ &= \int_1^2 dx_1 \left( x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_1 \Big|_{x_1=1}^{x_1=2} \\ &= \frac{8}{3} + 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren den **Träger** (engl. support) der Funktion  $f$  als die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte, in denen die Funktion von Null verschieden ist:

$$\text{supp } f = \overline{\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) \neq 0\}}.$$

Wir bezeichnen mit  $C_c(\mathbb{R}^n)$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompakten Träger. Diese Menge ist ein Vektorraum. Aus dieser Definition folgt, daß es zu jedem  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  einen achsenparallelen Quader  $Q$  gibt, so daß  $f$  außerhalb von  $Q$  verschwindet. Für  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  setzen wir nun

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) = \int_Q d^n x f(\vec{x}).$$

Das Integral hat die folgenden drei Eigenschaften:

1. **Linearität:** Für  $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x [f(\vec{x}) + g(\vec{x})] &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(\vec{x}), \\ \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \lambda f(\vec{x}) &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}). \end{aligned}$$

2. **Monotonie:** Gilt  $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) \leq \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(\vec{x}).$$

3. **Translationsinvarianz:** Für alle  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Das Integral ordnet also jeder Funktion  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  eine reelle Zahl zu und definiert so eine Abbildung

$$\begin{aligned} I : C_c(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Eine Abbildung von einem Funktionenraum in die reellen Zahlen nennt man ein **Funktional**. Die obigen drei Eigenschaften des Integrals besagen, daß das Integral ein lineares, monotones und translationinvariantes Funktional auf dem Funktionenraum  $C_c(\mathbb{R}^n)$  ist.

Eine wichtige Aussage der Integralrechnung lautet, daß diese drei Eigenschaften das Integral fast vollständig charakterisieren. Es gilt der folgende Satz: Sei  $J : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares, monotonen und translationsinvariantes Funktional. Dann gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}_+$ , so daß

$$J(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}).$$

Bemerkung: Ein lineares, monotonen und translationsinvariantes Funktional  $J : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man auch ein **Haarsches Maß** auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Der obige Satz sagt aus, daß auf dem  $\mathbb{R}^n$  bis auf einen konstanten Faktor genau ein Haarsches Maß gibt.

Wir haben oben das Integral über den  $\mathbb{R}^n$  für stetige Funktionen mit kompakten Träger definiert. Nun gibt es darüberhinaus noch weitere Funktionen, für die das Integral sinnvoll definiert werden kann.

Wir erinnern uns an die Definition des Integrals in einer Dimension: Wir hatten zunächst die Menge aller Treppenfunktionen  $T[a, b]$  auf einem Intervall  $[a, b]$  definiert. Dies sind alle Funktionen  $t$ , für die es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

gibt, so daß  $t$  auf jedem offenen Intervall  $]x_{j-1}, x_j[$  konstant ist. Der Wert auf diesem Intervall sei mit  $c_j$  bezeichnet. Das Integral einer Treppenfunktion definiert man als

$$\int_a^b t(x) dx = \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige beschränkte Funktion und  $t \in T[a, b]$ . Man schreibt  $f \geq t$  falls  $f(x) \geq t(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt. Für  $f$  definiert man das Ober- und Unterintegral wie folgt:

$$\int_a^{b^*} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b t(x) dx; t \in T[a, b], t \geq f \right\},$$

$$\int_{a^*}^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b t(x) dx; t \in T[a, b], t \leq f \right\},$$

Ist für eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das Oberintegral gleich dem Unterintegral, so bezeichnet man die Funktion als Riemann-integrierbar und setzt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx.$$

In einem zweiten Schritt haben wir dann den Integralbegriff auf nicht-kompakte Intervalle erweitert. Dies führte zur Definition der uneigentlichen Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Wir wollen nun den Integralbegriff im  $\mathbb{R}^n$  auf eine größere Klasse als die stetigen Funktionen mit kompakten Träger erweitern. Dies wird uns auf die Definition des **Lebesgue-Integrals** führen.

Wir betrachten eine Funktionenfolge  $f_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$  von stetigen Funktionen mit kompakten Träger, die monoton wachsend sein soll, d.h.

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$$

Bemerkung: Dies ist eine Bedingung, die für jedes  $\vec{x}$  gelten muss, d.h.

$$f_1(\vec{x}) \leq f_2(\vec{x}) \leq f_3(\vec{x}) \leq \dots \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Für jedes  $\vec{x}$  konvergiert die Folge  $f_n(\vec{x})$  entweder gegen eine reelle Zahl oder uneigentlich gegen plus Unendlich. Wir definieren nun eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ f(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}).$$

Die Menge der Funktionen, die sich so als Limiten von Funktionenfolgen aus  $C_c(\mathbb{R}^n)$  erhalten lassen, bezeichnen wir als die Menge  $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren das Integral für  $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(\vec{x}) dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Analog können wir eine monoton fallende Funktionenfolge  $f_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$  betrachten:

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots$$

Für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  konvergiert diese Folge entweder gegen eine reelle Zahl oder uneigentlich gegen minus Unendlich. Dies definiert wieder eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ f(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}).$$

Die Menge der Funktionen, die sich so als Limiten von Funktionenfolgen aus  $C_c(\mathbb{R}^n)$  erhalten lassen, bezeichnen wir als die Menge  $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren das Integral für  $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(\vec{x}) dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Es läßt sich zeigen, daß die Funktionen, die sowohl zu  $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$  als auch zu  $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$  gehören, genau die Funktionen sind, die in  $C_c(\mathbb{R}^n)$  liegen:

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n).$$

Mit Hilfe der Funktionen aus  $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$  definieren wir für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  das Ober- und Unterintegral:

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f(\vec{x}) dx = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(\vec{x}) dx; \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n), \varphi \geq f \right\},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n *} f(\vec{x}) dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(\vec{x}) dx; \varphi \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n), \varphi \leq f \right\}.$$

Man nennt die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  **Lebesgue-integrierbar**, falls

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n *} f(\vec{x}) dx = \int_{\mathbb{R}^n}^* f(\vec{x}) dx < \infty$$

gilt. In diesem Fall setzt man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) dx = \int_{\mathbb{R}^n}^* f(\vec{x}) dx = \int_{\mathbb{R}^n *} f(\vec{x}) dx.$$

Den Funktionen aus  $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$  in der Definition des Lebesgue-Integrals entsprechen die Treppenfunktionen in der Definition des Riemann-Integrals.

Satz: Jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist auch Lebesgue-integrierbar.

Satz: Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar, so ist auch die Funktion  $|f|$  Lebesgue-integrierbar.

Bemerkung: Der obige Satz, daß jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist, bezieht sich nur auf Riemann-Integral im eigentlichen Sinne. Für uneigentliche Integrale ist diese Aussage im allgemeinen nicht korrekt, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ falls } n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Integriert man diese Funktion von Null bis Unendlich, so gilt für das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty dx f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n dx f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln 2.$$

Diese Funktion ist allerdings nicht Lebesgue-integrierbar, denn dann wäre auch die Funktion  $|f|$  Lebesgue-integrierbar. Das Integral über  $|f|$  entspricht der harmonischen Reihe, welche divergiert.

Die Klasse der Funktionen, die Lebesgue-integrierbar sind, ist größer als die Klasse der (eigentlich) Riemann-integrierbaren Funktionen. Hierzu betrachten wir die Dirichlet-Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Das Riemann-Integral existiert nicht, da alle Obersummen stets 1 und alle Untersummen stets 0 sind. Andererseits läßt sich zeigen, daß die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  eine Lebesgue-Nullmenge in der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist. Daher existiert das Lebesgue-Integral und hat den Wert Null.

Hierzu müssen wir noch den Begriff einer **Lebesgue-Nullmenge** erläutern: Sei  $M$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren die charakteristische Funktion  $\chi_M$  durch

$$\chi_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Wir bezeichnen eine Menge als integrierbar, falls ihre charakteristische Funktion Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das Volumen (oder Lebesgue-Maß) der Menge  $M$  durch

$$\text{Vol}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \chi_M(\vec{x}).$$

Wir bezeichnen eine Menge als Nullmenge, falls sie Lebesgue-integrierbar ist und das Lebesgue-Maß Null hat.

Seien zwei Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wir nennen die Funktionen  $f$  und  $g$  **fast überall gleich**, falls die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})\}$$

eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Satz: Seien  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen, die fast überall gleich sind. Ist  $f$  Lebesgue-integrierbar, so ist auch  $g$  Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} dx g(\vec{x}).$$

Fazit: Bei der Berechnung von Integralen kommt es auf Nullmengen nicht an.

Wir wenden uns nun den Rechen-techniken für Integrale zu. In der Praxis führt man oft eine Koordinatentransformation durch. Wir wollen nun hierzu die Transformationsformel für das Integral betrachten.

Wir kennen bereits für die Integration einer Variable die Substitutionsregel: Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow W_1$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $f : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $W_1 \subset D_2 \subset \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Wir verallgemeinern diese Formel nun auf den  $\mathbb{R}^n$ . Seien  $U$  und  $V$  zwei offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und

$$\vec{\varphi} : U \rightarrow V$$

eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, die außerdem noch die Bedingung erfüllt, daß auch die Umkehrabbildung

$$(\vec{\varphi})^{-1} : V \rightarrow U$$

stetig differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit  $D\vec{\varphi}$  die Funktionalmatrix

$$D\vec{\varphi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Sei nun

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_U d^n x |\det D\vec{\varphi}(\vec{x})| f(\vec{\varphi}(\vec{x})) = \int_V d^n y f(\vec{y}).$$

Diese Formel bezeichnet man als die Transformationsformel für Integrale.

Betrachten wir zunächst den Fall  $n = 1$ . Da  $\varphi$  invertierbar sein soll, nehmen wir an, daß

$$\varphi : [a, b] \rightarrow W_1$$

streng monoton wachsend ist. In diesem Fall ist  $W_1 = [\varphi(a), \varphi(b)]$  und

$$D\varphi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x) > 0.$$

Somit lautet die Transformationsformel

$$\int_a^b dx f(\varphi(x)) \varphi'(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy f(y).$$

Dies ist die uns schon bekannte Substitutionsregel. Ist  $\varphi$  streng monoton fallend, so ist  $W_1 = [\varphi(b), \varphi(a)]$  und  $\varphi'(x) < 0$ . In diesem Fall hat man

$$\int_a^b dx f(\varphi(x)) \varphi'(x) = - \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} dy f(y) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy f(y).$$

Als nächstes betrachten wir den Fall  $n = 2$ . Ein Beispiel ist die Transformation auf die Polarkoordinaten. Sei

$$U = \{(r, \phi) : r > 0, 0 < \phi < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten

$$\vec{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{\varphi}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

Die Bildmenge von  $\vec{\varphi}$  ist der  $\mathbb{R}^2$  bis auf die positive  $x_1$ -Achse. Dies ist der  $\mathbb{R}^2$  bis auf eine Nullmenge. Es ist

$$D\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist somit

$$\det D\vec{\varphi} = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.$$

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir erhalten aus der Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2x f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 f(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\phi r f(r \cos \phi, r \sin \phi)$$

Wir betrachten auch die Transformation auf Kugelkoordinaten für  $n = 3$ . Sei hier

$$U = \{(r, \theta, \phi) : r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Wir betrachten die Koordinatentransformation

$$\vec{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{\varphi}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix lautet in diesem Fall

$$D\vec{\varphi}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante dieser Matrix findet man

$$\det D\vec{\varphi}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta.$$

Sei nun  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Aus der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x f(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \end{aligned}$$

Wir betrachten nochmal die Transformationsformel

$$\int_U d^n x |\det D\vec{\varphi}(\vec{x})| f(\vec{\varphi}(\vec{x})) = \int_V d^n y f(\vec{y}).$$

wobei  $\vec{\varphi}: U \rightarrow V$  eine bijektive Abbildung ist und sowohl  $\vec{\varphi}$  als auch  $\vec{\varphi}^{-1}$  stetig partiell differenzierbar sind.  $U$  und  $V$  sind offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Die Funktionalmatrix ist eine  $n \times n$ -Matrix, dessen Einträge gegeben sind durch

$$(D\vec{\varphi})_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}.$$

Wir definieren uns nun eine weitere  $n \times n$ -Matrix  $g$ , deren Einträge durch

$$g_{j_1 j_2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_1}} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_2}}$$

gegeben sind. Diese Matrix wird als **Maßtensor** bezeichnet. Offensichtlich gilt in Matrixschreibweise

$$g = (D\vec{\varphi})^T (D\vec{\varphi}).$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Determinante, so findet man

$$\det g = (\det D\vec{\varphi})^2,$$

da die Determinante der transponierten Matrix gleich der Determinante der ursprünglichen Matrix ist. Die rechte Seite ist ein Quadrat und daher nie negativ. Wir können also problemlos die Wurzel nehmen und erhalten

$$\sqrt{\det g} = |\det D\vec{\varphi}|.$$

Man bezeichnet  $|g| = \det g$  als **Gramsche Determinante**. Somit lässt sich die Transformationsformel auch schreiben als

$$\int_U d^n x \sqrt{|g|} f(\vec{\varphi}(\vec{x})) = \int_V d^n y f(\vec{y}).$$

Diese Form ist in Hinblick auf Verallgemeinerungen nützlich.

## 2.8 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Die Transformationsformel erlaubt es uns, das Integral über ein  $n$ -dimensionales Gebiet  $V$  zu reparametrisieren und durch ein Integral über ein (einfacheres)  $n$ -dimensionales Gebiet  $U$  auszudrücken. Hierbei sind  $U$  und  $V$  Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Wir wollen dies nun verallgemeinern und betrachten nun die Integration über  $k$ -dimensionale Gebiete  $M$ . Diese Gebiete sollen wieder Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sein, wobei  $k \leq n$ . Wir sagen, daß  $M$  in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettet ist.

In der Anwendung wichtig sind vor allem Gebiete, die in den dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  eingebettet sind. Für  $k = 2$  spricht man in diesem Fall von einer Fläche und für  $k = 1$  spricht man von einer Kurve. Im allgemeinen sind diese eingebetteten Gebiete keine Geraden oder Ebenen, sondern beliebig gekrümmte Objekte. Während der  $\mathbb{R}^3$  ein Vektorraum ist, sind diese eingebetteten Gebiete im allgemeinen keine Vektorräume mehr. Dies führt uns zu der Definition von Mannigfaltigkeiten.

### 2.8.1 Definition einer Mannigfaltigkeit

Wir betrachten zunächst zwei topologische Räume  $M$  und  $N$  sowie eine bijektive Abbildung

$$\varphi : M \rightarrow N$$

zwischen den beiden Räumen. Da  $f$  bijektiv sein soll, existiert die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : N \rightarrow M.$$

Man bezeichnet  $\varphi$  als **Homeomorphismus**, falls sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$  stetig sind.

Man bezeichnet  $\varphi$  als einen  **$C^1$ -Diffeomorphismus**, falls sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$  stetig partiell differenzierbar sind. Etwas allgemeiner bezeichnet man  $\varphi$  als einen  **$C^k$ -Diffeomorphismus**, falls sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar sind. Ist sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$  beliebig oft partiell differenzierbar, so spricht man von einem  **$C^\infty$ -Diffeomorphismus**. Anstelle von  **$C^\infty$ -Diffeomorphismus** verwendet man auch die Sprechweise **glatter Diffeomorphismus**.

Besonders wichtig ist der Fall, in dem einer der beiden Räume, sagen wir  $N$ , der  $\mathbb{R}^n$  ist. Man kann die Abbildungen  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  benutzen, um Rechnungen im Raum  $M$  auf den Raum  $\mathbb{R}^n$  zurückzuführen.

Eine **offene Karte** von  $M$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U$  eine offene Untermenge von  $M$  und  $\varphi$  ein Homeomorphismus von  $U$  auf eine offene Untermenge von  $\mathbb{R}^n$  ist.

Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Dimension  $n$  ist ein Hausdorff-Raum mit einer Familie offener Karten  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ , so daß

M1:

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

M2: Für jedes Paar  $\alpha, \beta \in A$  ist die Abbildung  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  eine beliebig oft differenzierbare Abbildung von  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  auf  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wird auch oft als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit oder glatte Mannigfaltigkeit bezeichnet. Da wir uns nur mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten beschäftigen werden, werden wir oft die Bezeichnung "differenzierbar" weglassen und daher einfach und kurz von Mannigfaltigkeiten sprechen.

Die Familie offener Karten  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  bezeichnet man als **Atlas**.

Für  $p \in U_\alpha$  und

$$\varphi_\alpha(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)),$$

bezeichnet man die Menge  $U_\alpha$  als die **Koordinatenumgebung** von  $p$ . Die Zahlen  $x_i(p)$  bezeichnet man als die **lokalen Koordinaten** von  $p$ .

Bemerkung:  $M$  schaut lokal in jeder Koordinatenumgebung wie der  $\mathbb{R}^n$  aus, doch gilt dies nicht global.

## Beispiele

a)  $\mathbb{R}^n$ : Der Raum  $\mathbb{R}^n$  ist eine Mannigfaltigkeit.  $\mathbb{R}^n$  kann mit einer einzigen Karte überdeckt werden.

b)  $S^1$ : Die Kreislinie

$$S^1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\|^2 = 1\}$$

ist eine Mannigfaltigkeit. Für einen Atlas benötigt man mindestens zwei Karten. Eine Möglichkeit besteht in der stereographischen Projektion. Sei die Kreislinie durch die Punkte  $(x_1, x_2)$  im  $\mathbb{R}^2$  gegeben, die

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

erfüllen. Wir projizieren vom Punkte  $(0, 1)$  (“Nordpol”) auf die  $x_1$ -Achse. Hierzu legen wir eine Gerade durch die Punkte  $(0, 1)$  und  $p = (x_1, x_2)$  und bestimmen den Schnittpunkt  $(z_1, 0)$  mit der  $x_1$ -Achse. Man findet

$$z_1 = \frac{x_1}{1 - x_2}.$$

Dies definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: S^1 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_1(p) &= z_1. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\varphi_1$  bildet jeden Punkt der Kreislinie auf die  $x_1$ -Achse ab, mit Ausnahme des Punktes  $(0, 1)$ . Sie überdeckt also nicht die komplette Mannigfaltigkeit. Wir benötigen also eine zweite Karte, die den Punkt  $(0, 1)$  enthält. Hierzu können wir die Projektion vom Punkte  $(0, -1)$  (“Südpol”) benutzen. Hier findet man

$$z'_1 = \frac{x_1}{1 + x_2}.$$

Dies definiert nun eine zweite Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_2 &: S^1 \setminus \{(0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_2(p) &= z'_1 \end{aligned}$$

und somit eine zweite Karte. Diese beiden Karten zusammen überdecken die gesamte Kreislinie und bilden somit einen Atlas der Mannigfaltigkeit. Für die erste Karte ergibt sich die Umkehrabbildung  $\varphi_1^{-1}$  zu

$$x_1 = \frac{2z_1}{z_1^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2 + 1}.$$

Für die zweite Karte findet man für  $\varphi_2^{-1}$

$$x_1 = \frac{2z'_1}{z_1'^2 + 1}, \quad x_2 = -\frac{z_1'^2 - 1}{z_1'^2 + 1}.$$

Wir betrachten noch die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ z'_1 &= \frac{x_1}{1 + x_2} = \frac{\frac{2z_1}{z_1^2 + 1}}{1 + \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2 + 1}} = \frac{1}{z_1}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist auf

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_1^{-1}(S^1 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\})$$

beliebig oft differenzierbar.

c)  $S^n$ : Die  $n$ -Sphäre, definiert durch

$$S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\vec{x}|^2 = 1\}$$

d)  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ : Der projektive Raum definiert als alle Linien durch den Ursprung im  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \dots, x'_n), \quad \lambda \neq 0.$$

e) Die Menge aller Rotationsmatrizen in zwei Dimensionen:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

Die Menge all dieser Matrizen bildet eine Mannigfaltigkeit, die homeomorph zur Kreislinie  $S^1$  ist.

### Gegenbeispiele

Zum besseren Verständniss der Definition einer Mannigfaltigkeit seien einige Beispiele angeführt, die **keine** Mannigfaltigkeiten sind:

a) Eine ein-dimensionale Linie vereinigt mit einer zwei-dimensionalen Fläche, wie zum Beispiel durch

$$x_3(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

definiert. Die so definierte Punktmenge ist an einigen Punkten homeomorph zu  $\mathbb{R}$ , an anderen Punkten homeomorph zu  $\mathbb{R}^2$ . In der Definition einer Mannigfaltigkeit wird aber verlangt, daß die Menge an allen Punkten homeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  für ein festes  $n$  ist.

b) Der Kegel

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Die Umgebung des Punktes  $(0,0,0)$  läßt sich nicht homoemorph auf den  $\mathbb{R}^2$  abbilden.

c) Ein einzelnes Kegelsegment

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Hier läßt sich zwar eine Umgebung des Punktes  $(0,0,0)$  stetig auf den  $\mathbb{R}^2$  abbilden, aber nicht differenzierbar.

d) Das Liniensegment

$$[0, 1]$$

Hier gibt es zu den Endpunkten keine offene Umgebungen.

## 2.8.2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

In der Anwendung sind  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten von Bedeutung, die in dem  $\mathbb{R}^n$  eingebettet sind.

Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(V, \varphi^{-1})$  eine Karte, d.h.  $V$  ist eine offene Menge von  $M$  und  $\varphi^{-1}$  ein Diffeomorphismus

$$\varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

(Wir haben hier gegenüber der Definition einer Karte die Bezeichnungen  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  vertauscht. Da diese Abbildung invertierbar sind, spielt es keine große Rolle welche man mit  $\varphi$  bzw.  $\varphi^{-1}$  bezeichnet.) Sei  $U = \varphi^{-1}(V)$  das Bild von  $V$ .  $U$  ist eine offene Menge im  $\mathbb{R}^k$ . Die Abbildung

$$\varphi : U \rightarrow V$$

geht dann von den lokalen Koordinaten in die Mannigfaltigkeit. Es ist

$$U \subset \mathbb{R}^k, \quad V \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten nun eine Abbildung

$$\vec{\varphi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

mit der Eigenschaft

$$\vec{\varphi}|_U = \varphi.$$

In Komponenten haben wir

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_k) \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix}.$$

Da  $\varphi$  bijektiv ist, gilt für die Funktionalmatrix

$$\text{Rank } D\vec{\varphi}(\vec{x}) = k, \quad \forall \vec{x} \in U.$$

Die Funktionalmatrix ist eine  $n \times k$ -Matrix mit Rang  $k$ . Wir definieren nun wieder den Maßtensor durch

$$g_{j_1 j_2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_1}} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_2}}$$

Der Maßtensor ist eine  $k \times k$ -Matrix und es gilt wieder

$$g = (D\vec{\varphi})^T (D\vec{\varphi}).$$

Allerdings handelt es sich hier nun um die Multiplikation einer  $k \times n$ -Matrix mit einer  $n \times k$ -Matrix. Nehmen wir nun an, daß wir für die Mannigfaltigkeit  $M$  nur eine Karte benötigen. Dann definieren wir das Integral einer Funktion  $f(y_1, \dots, y_n)$  über die Mannigfaltigkeit  $M$  durch

$$\int_M dS(\vec{y}) f(\vec{y}) = \int_U d^k x \sqrt{|g|} f(\vec{\phi}(\vec{x})).$$

Auf der linken Seite bezeichnet  $dS(\vec{y})$  das  $k$ -dimensionale Flächenelement (engl. "surface").

Bemerkungen: Ist  $k = n$ , so reduziert sich diese Definition auf die uns schon bekannte Transformationsformel

$$\int_M d^n y f(\vec{y}) = \int_U d^n x \sqrt{|g|} f(\vec{\phi}(\vec{x})).$$

Ist hingegen  $k = 1$ , so stellt die Mannigfaltigkeit  $M$  eine Kurve dar, die in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettet ist. Sei  $I \subset M$  ein kompaktes Gebiet dieser Kurve und  $[a, b] = \vec{\phi}^{-1}(I) \subset \mathbb{R}$ . Betrachten wir weiter den Spezialfall  $f(\vec{y}) = 1$ , so erhalten wir

$$\text{vol}(I) = \int_I dS(\vec{y}) = \int_a^b dx \sqrt{|g|} = \int_a^b dx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{dx}\right)^2}.$$

Dies ist nichts anderes als die uns schon bekannte Bogenlänge der Kurve.

Als eine Anwendung betrachten wir die Integration auf einer Kugeloberfläche. Sei hierzu

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Sei  $U$  das Gebiet

$$U = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

und  $\vec{\phi}$  die Abbildung

$$\vec{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{\phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D\vec{\phi} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi & -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \sin \phi & R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$g = (D\vec{\phi})^T (D\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich  $\sqrt{|g|}$  zu

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{R^4 \sin^2 \theta} = R^2 \sin \theta.$$

Wir wollen nun die Funktion

$$F(\theta, \phi) = \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta$$

über die Kugeloberfläche integrieren:

$$\int_M dS(\vec{y}) F = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (R^2 \sin \theta) \left( \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta \right) = \frac{3}{2} R^2 \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{3}{2} R^2 \left( \frac{2}{3} \right) = R^2.$$

Bemerkung: Auf der Kugeloberfläche bezeichnet man die dort definierten Funktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

als Kugelflächenfunktionen. Hierbei ist  $-l \leq m \leq l$  und die  $P_l^m$  stellen die assoziierten Legendre-Funktionen dar:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

$P_l$  ist das  $l$ -te Legendre-Polynom. Für die Kugelflächenfunktionen mit negativen  $m$  gilt

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}(\theta, \phi)^*.$$

Die ersten Kugelflächenfunktionen sind explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \\ Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}. \end{aligned}$$

Auf der Oberfläche der Einheitskugel sind die Kugelflächenfunktionen orthogonal, d.h. es gilt

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

### 2.8.3 Die Sätze von Gauß und Stokes

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Integralsätze näher betrachten. Dies ist zum einen der Satz von Gauß, der es erlaubt das Integral über ein dreidimensionales Raumgebiet der Divergenz eines Vektorfeldes durch ein Flächenintegral über das Vektorfeld selbst zu ersetzen. Als zweites wollen wir dann den Satz von Stokes betrachten, der es erlaubt ein Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes durch ein Linienintegral über das Vektorfeld selbst auszudrücken. Diese beiden Sätze sind der Physik der Elektrodynamik sehr wichtig.

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand. Der Rand von  $A$  sei mit  $\partial A$  bezeichnet. Da  $A$   $n$ -dimensional ist, ist der Rand eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Allgemein bezeichnet man  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  als **Hyperflächen**. (Diese Bezeichnung leitet sich von dem Fall  $n=3$  ab: Im  $\mathbb{R}^3$  sind die zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten Flächen.) Sei

$$\hat{n} : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf dem Rand, d.h. in jedem Punkt  $\vec{x}$  von  $\partial A$  ist  $\hat{n}(\vec{x})$  orthogonal zu jedem Tangentialvektor von  $\partial A$  am Punkte  $\vec{x}$ .  $\hat{n}(\vec{x})$  zeigt vom Rand  $\partial A$  nach aussen und ist auf Eins normiert:

$$\hat{n}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x}) = 1.$$

Betrachten wir nun ein Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Der **Gaußsche Satz** lautet:

$$\int_A d^n x \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \int_{\partial A} dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x}).$$

Der Gaußsche Satz besagt, daß das Integral über ein  $n$ -dimensionales Gebiet der Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem  $(n-1)$ -dimensionalen Integral über dem Rand des Gebietes der Normalkomponente des Vektorfeldes bezüglich des Randes ist.

Beispiel: Wir betrachten ein Beispiel im  $\mathbb{R}^3$ . Das Vektorfeld sei

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}.$$

Es ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{|\vec{x}|^2}.$$

Sei  $A$  die Kugel um den Ursprung mit Radius  $R$ . Dann ist

$$\int_A d^n x \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \vartheta \frac{1}{r^2} = 4\pi \int_0^R dr = 4\pi R.$$

Andererseits können das Integral über die Kugeloberfläche betrachten. Es ist

$$dS(\vec{x}) = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

sowie

$$\vec{F}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x}) = \frac{1}{R}.$$

Somit erhalten wir

$$\int_{\partial A} dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin \vartheta \frac{1}{R} = 4\pi R.$$

Hiermit haben wir den Gaußschen Satz an einem Beispiel verifiziert.

Wir betrachten nun den  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $B$  eine kompakte Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit glattem Rand. Den Rand bezeichnen wir mit  $\partial B$ . Weiter sei

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein Vektorfeld.

Der **Satz von Stokes** besagt

$$\int_B dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \int_{\partial B} ds(\vec{x}) \hat{t}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Hierbei ist  $\hat{t}(\vec{x})$  der Einheitstangentenvektor im Punkte  $\vec{x}$  an den Rand  $\partial B$ . Diese Orientierungen sind so korreliert, daß die geschlossene Kurve  $\partial B$  die in Richtung von  $\hat{t}(\vec{x})$  durchlaufen wird und  $\hat{n}$  eine Rechtsschraube bilden.

Bemerkung: Da die Rotation eines Vektorfeldes involviert ist, gilt der Satz von Stokes in dieser Form nur im  $\mathbb{R}^3$ .

Wir führen noch zwei Sätze von Green an: Seien  $f$  und  $g$  Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  und  $A$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit glattem Rand. Der **erste Satz von Green** besagt, daß

$$\int_A d^n x \left[ f(\vec{x}) \Delta g(\vec{x}) + \left( \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right) \cdot \left( \vec{\nabla} g(\vec{x}) \right) \right] = \int_{\partial A} dS(\vec{x}) f(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \left( \vec{\nabla} g(\vec{x}) \right).$$

Dieser Satz ist eine direkte Anwendung des Gauß'schen Satzes wenn man dort das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \vec{\nabla} g(\vec{x})$$

einsetzt und die Produktregel für die Differentiation verwendet,

$$\vec{\nabla} \cdot (f(\vec{x}) \vec{\nabla} g(\vec{x})) = (\vec{\nabla} f(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} g(\vec{x})) + f(\vec{x}) \Delta g(\vec{x}).$$

Der **zweite Satz von Green** lautet:

$$\int_A d^n x [f(\vec{x}) \Delta g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \Delta f(\vec{x})] = \int_{\partial A} dS(\vec{x}) [f(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla} g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x})].$$

## 2.8.4 Differentialformen

Wir haben im vorherigen Abschnitt die Integralsätze von Gauß und Stokes kennengelernt. Diese Integralsätze sind Spezialfälle eines allgemeineren Satzes, der als der allgemeine Stokessche Integralsatz bekannt ist. Mit Hilfe einer geeigneten Notation läßt sich der allgemeine Stokessche Integralsatz kompakt als

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

darstellen. In dieser Formel stell  $\omega$  eine Differentialform dar, die wir nun einführen wollen.

Betrachten wir zunächst ein-dimensionale Integrale, welche wir durch einen Grenzwertprozeß definieren können:

$$\int_{\mathbb{R}} dx f(x) = \lim \sum_j f(x_j) \Delta x_j$$

Ebenso zwei-dimensionale Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dy g(x, y) = \lim \sum_j \sum_k g(x_j, y_k) \Delta x_j \Delta y_k$$

Anstelle der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x, y)$  werden wir nun neue Objekte

$$f(x) dx, \quad g(x, y) dx \wedge dy$$

einführen, die über ein Gebiet der entsprechenden Dimension integriert werden können, einführen. Der Grund hierfür sind die übersichtlicheren Transformationseigenschaften.

## Tangentialvektoren

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\vec{\gamma}: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve. Man bezeichnet

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \right|_{t_0} \in \mathbb{R}^n$$

als Tangentialvektor an  $M$  im Punkte  $\vec{\gamma}(t_0)$ . Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an  $M$  im Punkte  $p = \vec{\gamma}(t_0)$  wird mit  $T_p M$  bezeichnet.  $T_p M$  ist ein Vektorraum. Die Dimension des Tangentialraumes ist gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit.

Wir bezeichnen mit  $T_p^* M$  den dualen Vektorraum von  $T_p M$ , d.h. die Menge aller Linearformen

$$\phi: T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Elemente von  $\phi \in T_p^* M$  heißen auch Kotangentialvektoren.

## Differentialformen erster Ordnung

Eine Differentialform erster Ordnung ist eine Abbildung

$$\omega: M \rightarrow \bigcup_p T_p^* M$$

mit  $\omega(p) \in T_p^* M$ . Die Differentialform  $\omega$  ordnet also jedem Punkt  $p \in M$  einen Kotangentialvektor  $\omega(p) \in T_p^* M$  zu. Wir bezeichnen den Wert von  $\omega(p)$  auf dem Tangentialvektor  $v \in T_p M$  mit

$$\langle \omega(p), v \rangle$$

Wir bezeichnen mit  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  die Standardorthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Wir können jeden Tangentialraum  $T_p M$  als einen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  betrachten. (Ist die Mannigfaltigkeit  $M$  der  $\mathbb{R}^n$  selbst, so ist auch der Tangentialraum an jedem Punkt der  $\mathbb{R}^n$ .) Wir führen nun eine Basis des Kotangentialraumes ein: Wir definieren die Differentiale

$$dx_1, \dots, dx_n$$

durch

$$\langle dx_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Mit Hilfe dieser Basis des Kotangentialraumes läßt sich jede Differentialform erster Ordnung schreiben als

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i(\vec{x}) dx_i.$$

Eine Differentialform erster Ordnung kann entlang einer Kurve integriert werden. Sei  $\omega$  eine Differentialform erster Ordnung und  $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Wir verwenden die Bezeichnung  $\gamma = \vec{\gamma}([a, b])$  für das Bild von  $\vec{\gamma}$ . Dann wird das Integral von  $\omega$  über  $\gamma$  definiert als

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \omega(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t) \rangle dt.$$

Mit Hilfe der Koordinatendarstellung findet man für die rechte Seite

$$\int_a^b \langle \omega(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t) \rangle dt = \int_a^b dt \sum_{i=1}^n f_i(\vec{\gamma}(t)) \frac{d\gamma_i(t)}{dt}.$$

Beispiel: Sei

$$\omega = 3dx_1 + (5 + x_1)dx_2 + x_3dx_3$$

und

$$\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 dt \left[ 3 \frac{d}{dt} t + (5+t) \frac{d}{dt} t^2 + (1+t) \frac{d}{dt} (1+t) \right] \\ &= \int_0^1 dt [3 + 2t(5+t) + (1+t)] = \int_0^1 dt [4 + 11t + 2t^2] \\ &= 4 + \frac{11}{2} + \frac{2}{3} = \frac{61}{6}. \end{aligned}$$

### Differentialformen höherer Ordnung

Wir haben bisher gesehen, daß Differentialformen erster Ordnung über Kurven integriert werden können. Wir möchten nun eine Verallgemeinerung, die eine Integration über höher dimensionale Gebiete erlaubt. Wir beginnen mit der Definition des Dachproduktes von Linearformen: Seien  $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$  Linearformen, also Abbildungen

$$\omega_j : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann wird die Abbildung

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \omega_1, v_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \omega_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \omega_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Dachproduktes:

- Das Dachprodukt ist linear in jedem Argument:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge (a\omega'_i + b\omega''_i) \wedge \dots \wedge \omega_k = a(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega'_i \wedge \dots \wedge \omega_k) + b(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega''_i \wedge \dots \wedge \omega_k)$$

- Das Dachprodukt ist alternierend:

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)} = \text{sign}(\sigma) \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$$

Insbesondere ist

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1,$$

$$\omega_1 \wedge \omega_1 = 0.$$

Wir bezeichnen die Menge aller alternierenden linearen  $k$ -Formen auf  $V$  mit

$$\wedge^k V^*$$

Definition: Eine **Differentialform der Ordnung  $k$**  (oder kurz  $k$ -Form) ist eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \bigcup_p \wedge^k T_p^* M$$

mit  $\omega(p) \in \wedge^k T_p^* M$ . Für  $k = 1$  stimmt diese Definition mit der schon bekannten Definition für Differentialformen erster Ordnung überein. Eine Differentialform nullter Ordnung ist eine reellwertige Funktion.

Koordinatendarstellung von Differentialformen  $k$ -ter Ordnung:

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Ableitungen von Differentialformen: Sei

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

eine  $k$ -Form. Dann bezeichne  $d\omega$  die  $(k+1)$ -Form

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei

$$df_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_i} dx_i.$$

Bemerkung: Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann bezeichnet man mit  $df$  das **totale Differential** von  $f$ :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Das totale Differential  $df$  einer Funktion  $f$  ist eine Einsform.

Rechenregeln: Seien  $\omega$  und  $\omega'$  zwei  $k$ -Formen und  $\sigma$  eine  $l$ -Form. Dann gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} d(a\omega + b\omega') &= ad\omega + bd\omega', \\ d(\omega \wedge \sigma) &= (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (d\sigma), \\ d(d\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Zurückziehen von Differentialformen: Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  und

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

eine  $k$ -Form in  $U$ . Weiter sei eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^m$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V \rightarrow U$$

vorgegeben. Dann definiert man eine  $k$ -Form  $\varphi^*\omega$  in  $V$  durch

$$\varphi^*\omega = \frac{1}{k!} \sum (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Hierbei ist  $d\varphi_{i_j}$  das totale Differential von  $\varphi_{i_j}$ , also

$$d\varphi_{i_j} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \varphi_{i_j}}{\partial x_l} dx_l.$$

Wir definieren nun die Integration von  $k$ -Formen über  $k$ -dimensionale Gebiete. Wir beginnen mit dem Fall  $k = n$ . Sei  $\omega$  also eine  $n$ -Form. In diesem Fall läßt sich  $\omega$  schreiben als

$$\omega = f(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Sei  $A$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Wir setzen

$$\int_A \omega = \int_A d^n x f(\vec{x}).$$

Betrachten wir nun den Fall  $k < n$ : Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A$  eine kompakte Teilmenge von  $M$ , ebenfalls mit der Dimension  $k$ . Sei ferner  $\omega$  eine  $k$ -Form. Wir nehmen an, daß es eine lokale Karte

$$\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow U$$

von  $M$  gibt, so daß  $A \in U$ . Wir möchten nun das Integral von  $\omega$  über  $A$  definieren. Hierzu nutzen wir aus, daß wir die  $k$ -Form  $\omega$  mit Hilfe von  $\varphi$  auf den  $\mathbb{R}^k$  zurückziehen können. Auf dem  $\mathbb{R}^k$  erhalten wir dann eine  $k$ -Form  $\varphi^* \omega$ , die wir über dem kompakten Gebiet  $\varphi^{-1}(A)$  wie oben integrieren können. Wir setzen also

$$\int_A \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$

Für eine Eins-Form reduziert sich diese Definition auf die uns schon bekannte Vorschrift zur Integration einer Eins-Form. In der obigen Definition zur Integration einer  $k$ -Form haben wir vorausgesetzt, daß  $M$  orientierbar ist und  $\varphi$  die Orientierungstreue ist. Diese Begriffe sollen noch kurz erläutert werden: Wir bezeichnen eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

als **Orientierungstreu**, falls für die Determinante der Funktionalmatrix stets

$$\det D\varphi > 0$$

gilt. Wir erinnern uns, daß eine Mannigfaltigkeit per Definition einen Atlas von Karten besitzt. Seien  $\varphi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  und  $\varphi_j : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  zwei Karten. Auf dem Überlapp der Karten gibt es eine Parametertransformation

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Gibt es einen Atlas, so daß für zwei beliebige überlappende Karten des Atlas die Parametertransformation stets orientierungstreu ist, so nennt man die Mannigfaltigkeit **orientierbar**. Zum besseren Verständnis sei ein Gegenbeispiel angegeben: Das Möbiusband ist nicht orientierbar. Wir bezeichnen eine Mannigfaltigkeit als **positiv orientiert**, falls sie die gleiche Orientierung

wie der  $\mathbb{R}^k$  bezüglich der Standardbasis  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  besitzt.

Beispiel für die Integration einer Differentialform: Im  $\mathbb{R}^3$  sei die Differentialform

$$\omega = 3x_3 dx_2 \wedge dx_3 + (x_1^2 + x_2^2) dx_3 \wedge dx_1 + x_1 x_3 dx_1 \wedge dx_2$$

gegeben. Sei  $M$  die folgende zweidimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 x_2\}$$

und  $A$  die folgende kompakte Teilmenge von  $M$ :

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in M : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Wir möchten

$$\int_A \omega$$

berechnen. Wir wählen zunächst eine lokale Karte von  $M$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow M, \\ (y_1, y_2) &\rightarrow (y_1, y_2, y_1 y_2) \end{aligned}$$

Die einzelnen Koordinatenabbildungen sind

$$\varphi_1 = y_1, \quad \varphi_2 = y_2, \quad \varphi_3 = y_1 y_2,$$

und daher

$$d\varphi_1 = dy_1, \quad d\varphi_2 = dy_2, \quad d\varphi_3 = y_2 dy_1 + y_1 dy_2.$$

Somit

$$\begin{aligned} \int_A \omega &= \int_{\varphi^{-1}(A)} (\varphi)^* \omega = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(A)} 3y_1 y_2 dy_2 \wedge (y_2 dy_1 + y_1 dy_2) + (y_1^2 + y_2^2) (y_2 dy_1 + y_1 dy_2) \wedge dy_1 + y_1 (y_1 y_2) dy_1 \wedge dy_2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(A)} (y_1^2 y_2 - 4y_1 y_2^2 - y_1^3) dy_1 \wedge dy_2 = \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 (y_1^2 y_2 - 4y_1 y_2^2 - y_1^3) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Wir können nun den **allgemeinen Stokesschen Integralsatz** formulieren: Sei  $M$  eine orientierbare  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $A$  eine kompakte Teilmenge von  $M$  mit glattem Rand und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form auf  $M$ . Dann gilt

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

wobei der Rand  $\partial A$  so orientiert ist, daß der äußere Normalenvektor plus die  $(k-1)$  Tangentialvektoren die gleiche Orientierung wie  $M$  besitzen, d.h.

$$\det(\hat{n}, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_{k-1}) > 0.$$

Dieser Satz erlaubt es uns, das Integral der Ableitung einer Differentialform über ein kompaktes Gebiet durch das Integral der Differentialform über dem Rand des Gebietes auszudrücken. Spezialfälle dieses allgemeinen Satzes sind der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, der Satz von Gauß und der klassische Satz von Stokes in drei Dimensionen. Wir wollen auf diese Spezialfälle noch etwas genauer eingehen und beginnen mit dem Fall, in dem sich der allgemeine Satz auf den Satz von Gauß reduziert:

Sei  $A$  ein kompaktes  $n$ -dimensionales Gebiet und  $\omega$  eine  $(n-1)$ -Form. Wir können  $\omega$  wie folgt schreiben:

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei der Hut bedeuten soll, daß das entsprechende Differential ausgelassen wird. Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \vec{f} &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \vec{f}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \dots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so ist

$$\left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_j} \right) = \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}),$$

und die linke Seite somit

$$\int_A d\omega = \int_A (\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x})) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_A d^n x \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}).$$

Andererseits zeigt man durch eine etwas längere Rechnung

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial A} dS(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x}).$$

Wir erhalten somit den Satz von Gauß.

Der Fall  $n = 1$  und  $k = 0$  verdient besondere Betrachtung. In diesem Fall ist die Differentialform  $\omega$  eine Funktion einer Variablen. Wir schreiben

$$\omega = f(x).$$

Weiter haben wir

$$d\omega = f'(x)dx.$$

Wir betrachten ein kompaktes Intervall  $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . In diesem Fall reduziert sich der Satz auf den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\int_a^b dx f'(x) = f(b) - f(a).$$

Wir betrachten als weiteren Spezialfall den Fall  $n = 3$  und  $k = 2$ . In diesem Fall ist  $\omega$  eine Eins-Form, die wir als

$$\omega = \sum_{j=1}^3 f_j(\vec{x}) dx_j$$

schreiben können. Wir erhalten nun

$$d\omega = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j.$$

Das Dachprodukt ist antisymmetrisch, daher ist  $dx_i \wedge dx_i = 0$  und  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ . Man erhält also

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &= \left( \text{rot } \vec{f}(\vec{x}) \right) \cdot \hat{n}(\vec{x}) dS(\vec{x}). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  gesetzt. Für die rechte Seite findet man mit Hilfe der Definition des Integrals für eine Eins-Form

$$\int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} ds(\vec{x}) \hat{t}(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x}).$$

Somit erhält man in diesem Fall den ursprünglichen Satz von Stokes:

$$\int_B dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \text{rot } \vec{f}(\vec{x}) = \int_{\partial B} ds(\vec{x}) \hat{t}(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x}).$$

## 2.9 Variationsrechnung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Eulerschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Diese spielen in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle.

Zunächst betrachten wir einige Hilfssätze. Wir betrachten eine Funktion  $f(t, x_1, \dots, x_n)$  von  $(n + 1)$  Variablen. Diese Funktion integrieren wir über die Variable  $t$  von  $a$  bis  $b$ . Dies liefert eine neue Funktion  $g(x_1, \dots, x_n)$ , die nun nur noch von den  $n$  Variablen  $x_1$  bis  $x_n$  abhängt. Die Hilfssätze liefern Aussagen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion  $g$ .

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Ferner sei

$$f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(\vec{x}) = \int_a^b dt f(t, \vec{x})$$

stetig.

Ist darüberhinaus  $f(t, x_1, \dots, x_n)$  nach den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  stetig partiell differenzierbar, dann ist auch  $g(x_1, \dots, x_n)$  stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b dt f(t, x_1, \dots, x_n) = \int_a^b dt \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x_1, \dots, x_n).$$

Man darf also “unter dem Integralzeichen differenzieren”.

Wir kommen nun zu den Eulerschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung: Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und

$$L : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) \rightarrow L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion von  $(2n + 1)$  Variablen. (Hier betrachten wir die Variablen  $q_i$  und  $\dot{q}_i$  als unabhängig, die Schreibweise wurde nur mit Hinblick auf die Anwendung in der Physik so gewählt.) Zu vorgegebenen Vektoren  $\vec{q}_a \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{q}_b \in \mathbb{R}^n$  betrachten wir nun die Menge  $K$  aller zweimal stetig differenzierbaren Kurven

$$\vec{\phi} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit der Eigenschaft

$$\vec{\varphi}(a) = \vec{q}_a, \quad \vec{\varphi}(b) = \vec{q}_b.$$

Wir suchen nun diejenige Kurve  $\vec{\varphi} \in K$ , die das Funktional

$$S[\vec{\varphi}] = \int_a^b dt L(t, \vec{\varphi}(t), \vec{\varphi}'(t))$$

minimiert.

Satz: Notwendige Bedingungen für das Vorliegen eines Minimums sind durch die Eulerschen Differentialgleichungen gegeben:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Nehmen wir an  $\vec{\varphi}$  minimiert das Funktional  $S$ . Dann betrachten wir eine zweimal stetig differenzierbare Kurve  $\vec{\lambda}(t)$  mit  $\vec{\lambda}(a) = \vec{\lambda}(b) = \vec{0}$ . Da  $\vec{\varphi}$  das Funktional  $S$  minimiert, gilt

$$S[\vec{\varphi}] \leq S[\vec{\varphi} + \varepsilon \vec{\lambda}],$$

mit  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Insbesondere gilt

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{\varphi} + \varepsilon \vec{\lambda}] \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{\varphi} + \varepsilon \vec{\lambda}] &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b dt L(t, \vec{\varphi}(t) + \varepsilon \vec{\lambda}(t), \vec{\varphi}'(t) + \varepsilon \vec{\lambda}'(t)) \\ &= \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \lambda_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \lambda_i'(t) \right]. \end{aligned}$$

Den zweiten Ausdruck können wir partiell integrieren:

$$\int_a^b dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \lambda_i'(t) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \lambda_i(t) \right|_a^b - \int_a^b dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \lambda_i(t) = - \int_a^b dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \lambda_i(t).$$

Wegen  $\lambda_i(a) = \lambda_i(b) = 0$  verschwinden die Randterme. Wir erhalten also

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \lambda_i(t) = 0.$$

Da dies für beliebige "Variationen"  $\lambda_i$  gilt, folgt die Behauptung

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

## 3 Partielle Differentialgleichungen

### 3.1 Distributionen

Die Verwendung von Distributionen ist oft recht nützlich, um Rechnungen zu vereinfachen. In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst die formale Definition einer Distribution und gehen dann näher auf die Diracsche Deltadistribution ein.

Wir beginnen mit der Definition einer Distribution. Hierzu benötigen wir zunächst einmal einen Raum von Funktionen, die wir als **Testfunktionen** bezeichnen möchten. Als Testfunktionen betrachten wir alle beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompakten Träger. Den dazugehörigen Funktionenraum bezeichnen wir als  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Wir sagen eine Folge von Testfunktionen  $f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen eine Testfunktion  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$ , so daß

$$\text{supp}(f) \subset K \quad \text{und} \quad \text{supp}(f_j) \subset K \quad \text{für alle } j.$$

2. Für jeden Multiindex  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$  konvergiert die Folge der Ableitungen

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} f_j(x_1, \dots, x_n)$$

gleichmäßig auf  $K$  gegen

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} f(x_1, \dots, x_n).$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f_j \longrightarrow f.$$

Bemerkung: Die Forderung, daß jede Ableitung der Funktionenfolge gleichmäßig gegen die entsprechende Ableitung der Grenzwertfunktion konvergiert, ist eine wesentlich stärkere Bedingung als nur die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz.

Wir definieren nun eine Distribution als ein lineares Funktional

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \\ f \rightarrow T[f],$$

welches die folgende Bedingung erfüllt: Gilt für eine Folge von Testfunktionen  $f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und eine Testfunktion  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  die Relation  $f_j \longrightarrow f$ , so folgt stets

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T[f_j] = T[f].$$

Die Menge der Distributionen im  $\mathbb{R}^n$  bilden einen Vektorraum.

Wir betrachten zunächst ein einfaches Beispiel. Sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann wird durch

$$T_g[f] = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(\vec{x}) f(\vec{x})$$

eine Distribution definiert. Da auf diese Weise jede stetige Funktion  $g$  eine Distribution  $T_g$  definiert, unterscheidet man oft nicht zwischen  $g$  und  $T_g$ . Es soll jedoch betont werden, daß es sich bei  $g$  um eine Funktion und bei  $T_g$  um ein Funktional auf dem Raum der Testfunktionen handelt.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die Diracsche Deltadistribution. Sie ist definiert durch

$$T_\delta[f] = f(\vec{0}).$$

In Analogie mit dem ersten Beispiel verwendet man für linke Seite die Schreibweise

$$T_\delta[f] = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \delta(\vec{x}) f(\vec{x}),$$

so daß sich mit Hilfe der Definition die Regel

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \delta(\vec{x}) f(\vec{x}) = f(\vec{0})$$

für alle Testfunktionen  $f$  ergibt.

Bemerkung 1: Distributionen sind lineare Funktionale auf dem Raum der Testfunktionen. Ein Produkt von Distributionen ist **nicht** definiert. Man sollte sich auch nicht durch die suggestive Schreibweise  $\delta(\vec{x})$  dazu verleiten lassen, Distributionen miteinander zu multiplizieren.

Bemerkung 2:  $\delta(\vec{x})$  ist keine Funktion, kann aber durch eine Folge von Funktionen dargestellt werden. Hierzu definieren wir den Konvergenzbegriff für Distributionen. Wir sagen, daß eine Folge von Distributionen  $T_j$  gegen eine Distribution  $T$  konvergiert, falls für alle Testfunktionen  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_j[f] = T[f],$$

d.h. die Folge der reellen Zahlen  $T_j[f]$  konvergiert im herkömmlichen Sinne gegen  $T[f]$ .

Sei nun  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) = 1.$$

Dann setzt man

$$f_j(\vec{x}) = j^n f(j \cdot \vec{x}).$$

Diese Folge konvergiert dann im Sinne der Distributionen gegen  $\delta(\vec{x})$ . (Im Sinne einer Folge von Funktionen divergiert diese Folge natürlich für  $\vec{x} = \vec{0}$ .) Für  $f(\vec{x})$  kann man beispielsweise

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-|\vec{x}|^2}$$

verwenden. Mit  $\varepsilon = 1/j$  ergibt sich dann die Deltadistribution als Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  der Folge

$$f_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{(\varepsilon\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Völlig analog definiert man  $\delta(\vec{x} - \vec{a})$ , so daß gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \delta(\vec{x} - \vec{a}) f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

Die Ableitungen einer Distribution werden wie folgt definiert. Sei  $T_\mu$  eine Distribution. Für die Anwendung auf eine Testfunktion schreiben wir wieder

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \mu(\vec{x}) f(\vec{x}).$$

Man definiert die partielle Ableitung nach der  $i$ -ten Koordinate durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \mu(\vec{x}) \right) f(\vec{x}) = - \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \mu(\vec{x}) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \right).$$

Mehrfache Ableitungen werden analog definiert:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left( \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \mu(\vec{x}) \right) f(\vec{x}) = (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \mu(\vec{x}) \left( \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} f(\vec{x}) \right).$$

Als eine Anwendung betrachten wir in einer Dimension die Heavysidesche Stufenfunktion. Sie ist definiert durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Punkte  $x = 0$  weder stetig noch differenzierbar. Faßt man dagegen  $\Theta(x)$  als Distribution auf, so kann man differenzieren und es gilt

$$\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x).$$

Wir stellen also fest, daß im Rahmen der Theorie der Distributionen die Begriffe der Konvergenz und der Differenzierbarkeit wesentlich weiter gefaßt sind.

Zum Abschluß stellen wir noch einige wichtige Eigenschaften und Rechenregeln für die Diracsche Deltadistribution in einer Dimension zusammen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) f(x) = f(a),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x-a) f(x) = -f'(a),$$

$$\delta(x-a) f(x) = \delta(x-a) f(a).$$

Hat die Funktion  $g(x)$  nur einfache Nullstellen  $x_j$  (d.h.  $g(x_j) = 0$  aber  $g'(x_j) \neq 0$ ), dann gilt

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta(x-x_j).$$

Insbesondere gilt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Weitere Relationen für die Deltadistribution:

$$x\delta(x) = 0,$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x).$$

### 3.2 Die Fourier-Transformation

Fourier-Transformationen spielen in der Anwendung eine große Rolle. Man verwendet sie zum Beispiel zum Lösen partieller Differentialgleichungen.

Wir betrachten eine komplex-wertige Funktion auf dem  $\mathbb{R}^n$ , die Lebesgue-integrierbar ist:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\vec{x} \rightarrow f(\vec{x}).$$

Wir definieren die **Fourier-Transformierte**  $\hat{f}$  von  $f$  durch das Integral

$$\hat{f}(\vec{p}) = \int d^n x f(\vec{x}) e^{i\vec{x} \cdot \vec{p}}.$$

Hierbei bezeichnet

$$\vec{x} \cdot \vec{p} = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ .

Ist nun auch  $\hat{f}$  Lebesgue-integrierbar, so läßt sich in einem ersten Schritt zeigen, daß  $f$  mit einer stetigen Funktion, welche im Unendlichen verschwindet, übereinstimmt bis auf Punkte, die eine Lebesgue-Nullmenge bilden. Gehen wir nun davon aus, daß  $f$  stetig ist und im Unendlichen verschwindet, so haben wir die Umkehrformel der Fourier-Transformation:

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \hat{f}(\vec{p}) e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p}}.$$

Bemerkung: Man findet in der Literatur unterschiedliche Konventionen für die Aufteilung der Faktoren  $(2\pi)$ . Hier haben wir die Konvention verwendet, daß in der Definition von  $\hat{f}$  kein Faktor auftritt, während in der Formel für die Rücktransformation ein Faktor  $1/(2\pi)^n$  auftritt. Dies ist die in der Physik übliche Konvention. In der mathematischen Literatur findet man auch oft eine symmetrische Aufteilung. Innerhalb dieser Konvention haben sowohl die Transformationsformel als auch die Rücktransformationsformel einen Faktor  $1/(2\pi)^{n/2}$ .

Wir betrachten nun einige Anwendungen: Ist die Funktion  $f$  stetig partiell differenzierbar und hat sie einen kompakten Träger, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (-ip_j) \hat{f}(\vec{p}) e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p}}.$$

Ist  $f$  darüberhinaus  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar, so hat man analog

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} f(\vec{x}) = (-i)^k \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} p_{j_1} \dots p_{j_k} \hat{f}(\vec{p}) e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p}}.$$

Eine Differentiation nach  $x_j$  bringt also in der Fouriertransformierten einen Faktor  $(-ip_j)$  herunter.

Wir betrachten noch die **Faltung** zweier Funktionen. Seien  $f$  und  $g$  zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Dann definiert man die Faltung  $f * g$  dieser beiden Funktionen durch

$$(f * g)(\vec{x}) = \int d^n y f(\vec{y}) g(\vec{x} - \vec{y}).$$

Für die Fourier-Transformierte der Faltung gilt

$$\widehat{(f * g)}(\vec{p}) = \hat{f}(\vec{p}) \hat{g}(\vec{p}).$$

Die Fourier-Transformation führt also eine Faltung in ein einfaches Produkt über.

Wir können die Fourier-Transformation auch auf Distributionen erweitern. Man findet für die Fourier-Transformierte der Diracschen Delta-Distribution

$$\hat{\delta}^n(\vec{p}) = \int d^n x \delta^n(\vec{x}) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} = 1.$$

Die Fourier-Transformierte der Diracschen Delta-Distribution ist also eine Konstante.

### 3.3 Beispiele partieller Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir partielle Differentialgleichungen betrachten. Hierbei handelt es sich um Differentialgleichungen, in denen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und in denen Ableitungen nach mehreren Variablen auftreten. Die Lösung partieller Differentialgleichungen ist im allgemeinen sehr schwierig und wir wollen uns auf einige elementare Beispiele beschränken. Hierbei werden wir die Techniken der Fourier-Transformation und der Distributionen verwenden.

#### 3.3.1 Die Potentialgleichung

Als erstes Beispiel betrachten wir die Potentialgleichung. Sie wird auch als Laplacesche Differentialgleichung oder Poissonsche Differentialgleichung bezeichnet. Gegeben sei im  $\mathbb{R}^n$  eine Funktion  $\rho(\vec{x})$ . Gesucht wird eine Funktion  $f(\vec{x})$ , welche

$$\Delta f(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

erfüllt. Wie üblich ist der Laplace-Operator durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

gegeben. Die Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{x}) = 0$$

wird als homogene Laplacesche Differentialgleichung bezeichnet. Lösungen der homogenen Laplaceschen Differentialgleichung werden auch als **harmonische Funktionen** bezeichnet.

Unter einer **Fundamental-Lösung** versteht man eine Funktion  $g(\vec{x})$ , welche die Gleichung

$$\Delta g(\vec{x}) = \delta^n(\vec{x})$$

erfüllt, wobei auf der rechten Seite die Diracsche Delta-Distribution auftritt. Ist eine Fundamental-Lösung bekannt, so erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch

$$f(\vec{x}) = \int d^n y \rho(\vec{y}) g(\vec{x} - \vec{y}),$$

wie man leicht nachrechnet:

$$\Delta f(\vec{x}) = \int d^n y \rho(\vec{y}) \Delta g(\vec{x} - \vec{y}) = \int d^n y \rho(\vec{y}) \delta^n(\vec{x} - \vec{y}) = \rho(\vec{x}).$$

Bemerkung: Wir können zu dieser einer speziellen Lösung natürlich immer eine Lösung der homogenen Gleichung hinzuaddieren und erhalten wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Wie bestimmt man nun eine Fundamental-Lösung? Hierzu verwendet man die Fourier-Transformation. Wir setzen

$$g(\vec{x}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \hat{g}(\vec{p}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}},$$

$$\delta^n(\vec{x}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}},$$

und bestimmen zunächst  $\hat{g}(\vec{p})$ . Hierzu setzen wir die Fourier-Darstellung in die zu lösende Differentialgleichung ein:

$$\Delta g(\vec{x}) = \delta^n(\vec{x}),$$

$$\Delta \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \hat{g}(\vec{p}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}},$$

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (-p^2) \hat{g}(\vec{p}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}.$$

Da diese Gleichung für alle  $\vec{x}$  gelten soll, folgt die Gleichheit der Integranden. Wir erhalten also

$$\hat{g}(\vec{p}) = -\frac{1}{p^2}.$$

Die Fundamental-Lösung  $g(\vec{x})$  erhalten wir nun durch die Fourier-Rücktransformation:

$$g(\vec{x}) = -\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}}{p^2}$$

Betrachten wir zunächst den Fall  $n = 3$ : Wir wählen unser Koordinatensystem so, daß  $\vec{x}$  entlang der positiven  $z$ -Achse liegt:  $\vec{x} = (0, 0, r)$ . In diesem Fall erhalten wir

$$-\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}}{p^2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta e^{-irp \cos \vartheta}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 du e^{irpu}, \quad u = -\cos \vartheta$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{1}{irp} (e^{irpu} - e^{-irpu}) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{\sin(rp)}{rp} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\pi}{2r}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|}.$$

In  $n$  Dimensionen findet man durch eine ähnliche Rechnung

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}|, & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)S_n} \frac{1}{|\vec{x}|^{n-2}}, & n \neq 2, \end{cases}$$

wobei

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

die Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel ist.

Wir betrachten noch die Lösungen der homogenen Gleichung. Dies sind die harmonischen Funktionen. Für die harmonischen Funktionen gilt das **Maximumsprinzip**. Dies besagt folgendes: Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion. Nimmt  $\varphi$  in einem Punkt  $\vec{x}_0 \in U$  ihr Maximum an, so ist  $\varphi$  konstant.

Wir können dies auch anders formulieren: Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $\varphi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion die auf  $U$  harmonisch ist. Dann nimmt die Funktion  $\varphi$  ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand von  $U$  an.

Fordert man nun von der Lösung der homogenen Gleichung die Randbedingung

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\vec{x}) = 0,$$

so impliziert das Maximumsprinzip

$$\varphi(\vec{x}) = 0$$

auf ganz  $\mathbb{R}^n$ .

Betrachten wir nun den Fall  $n \geq 3$  und sei  $\rho(\vec{x})$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit kompakten Träger. Dann hat die inhomogene Gleichung

$$\Delta f(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

eine eindeutige Lösung zu der Randbedingung

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = 0.$$

### 3.3.2 Die Schwingungsgleichung

Wir betrachten nun die Schwingungsgleichung. Die homogene Gleichung lautet

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(t, \vec{x}) = 0.$$

Diese Gleichung wird auch als Helmholtzsche Differentialgleichung bezeichnet. Die gesuchte Lösung  $\varphi(t, \vec{x})$  ist eine Funktion von  $(n+1)$  Variablen  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . Wie man leicht nachrechnet, stellen die ebenen Wellen

$$\varphi(t, \vec{x}) = e^{-i(\omega(\vec{p})t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad \omega(\vec{p}) = c|\vec{p}|,$$

Lösungen der homogenen Gleichung dar. Zur Verifikation betrachten wir

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{-i(\omega(\vec{p})t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \left( -|\vec{p}|^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) e^{-i(\omega(\vec{p})t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = 0.$$

Somit ist auch jede Überlagerung ebener Wellen eine Lösung:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \hat{\varphi}(\vec{p}) e^{-i(\omega(\vec{p})t - \vec{p} \cdot \vec{x})}.$$

Als nächstes wollen wir die Fundamental-Lösungen betrachten, d.h. Lösungen der Gleichung

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(t, \vec{x}) = \delta(t) \delta^n(\vec{x}).$$

Hier verfahren wir analog zur Potentialgleichung: Wir betrachten zunächst die Fouriertransformierten

$$\begin{aligned} g(t, \vec{x}) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \hat{g}(\omega, \vec{p}) e^{-i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \\ \delta(t) \delta^n(\vec{x}) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{-i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1: Hierbei ist  $\omega$  nun eine Integrationsvariable und keine Funktion von  $\vec{p}$ .

Bemerkung 2: Das Vorzeichen im Exponenten von  $\vec{p} \cdot \vec{x}$  ist Konvention und wurde wie bei der Lösung der homogenen Gleichung gewählt.

Mit diesem Ansatz findet man nun für die Fouriertransformierte

$$\left( -p^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{g}(\omega, \vec{p}) = 1$$

und somit

$$\hat{g}(\omega, \vec{p}) = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - p^2}.$$

Transformiert man zurück in den Ortsraum, so erhält man

$$g(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{e^{-i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})}}{\frac{\omega^2}{c^2} - p^2}.$$

Betrachten wir nun wieder den Fall  $n = 3$ , dies entspricht der physikalischen Situation von drei Raumvariablen und einer Zeitvariablen. Wir haben also

$$g(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})}}{\frac{\omega^2}{c^2} - p^2}.$$

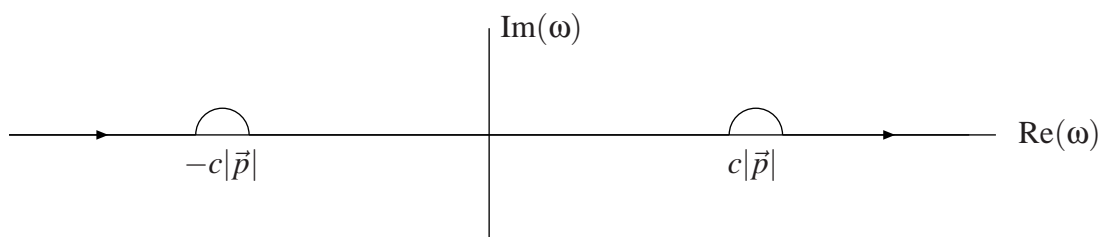
Hier tritt nun zunächst ein Problem auf: Hält man  $\vec{p}$  fest und integriert man über  $\omega$ , so sieht man das der Nenner für

$$\omega = \pm c|\vec{p}|$$

Null wird. Die Lösung dieses Problems kommt aus der Funktionentheorie: Man darf den Integrationsweg für  $\omega$ , der ursprünglich entlang der reellen Achse in der komplexen  $\omega$ -Ebene liegt, in die komplexe Ebene verschieben. Auf diese Art können die beiden Pole umgangen werden. Nun hat man aber bei jedem der beiden Pole die Möglichkeit, die Pole entweder "oben herum" oder "unten herum" zu umgehen. Man stellt daher Zusatzforderungen die festlegen, auf welche Art die Pole umgangen werden sollen. Eine mögliche Zusatzforderung wäre zu verlangen, daß

$$g(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{für alle } t < 0$$

gilt. Man kann zeigen, daß dies impliziert, daß beide Pole oben herum umgangen werden müssen. Wir haben also den folgenden Integrationsweg:

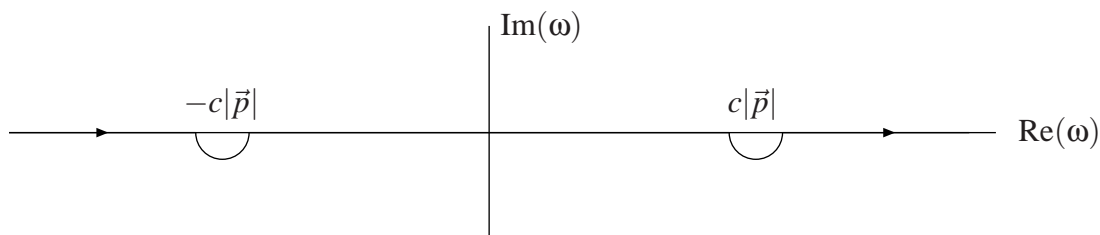


Nach einer etwas längeren Rechnung findet man

$$g(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \delta\left(t - \frac{1}{c} |\vec{x}|\right).$$

Offensichtlich ist  $g(t, \vec{x}) = 0$  für alle  $t < 0$ , da in diesem Fall das Argument der Delta-Distribution immer negativ ist. Man bezeichnet diese Fundamental-Lösung als **retardierte Greensche Funktion** und verwendet oft die Schreibweise  $g^+(t, \vec{x})$ .

Man könnte allerdings auch verlangen, daß  $g(t, \vec{x}) = 0$  für alle  $t > 0$ . In diesem Fall muß man den folgenden Integrationsweg wählen:



d.h. man weicht den Polen nach unten aus. In diesem Fall findet man

$$g(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \delta\left(t + \frac{1}{c} |\vec{x}|\right).$$

Man bezeichnet diese Fundamental-Lösung als **avancierte Greensche Funktion** und verwendet die Schreibweise  $g^-(t, \vec{x})$  für diese Lösung.

### 3.3.3 Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung lautet

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t, \vec{x}) = 0.$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu den obigen Beispielen ist diese Gleichung nicht homogen im Grad der Ableitungen: Die Ableitungen nach den Variablen  $x_j$  treten immer zweifach auf, die Ableitung nach der Variablen  $t$  dagegen nur einfach.

Wir beschränken uns hier darauf, eine Fundamental-Lösung der Gleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) g(t, \vec{x}) = \delta^n(\vec{x}) \delta(t)$$

anzugeben. Diese lautet

$$g(t, \vec{x}) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ -\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & t > 0. \end{cases}$$