

Elektrodynamik und klassische Feldtheorie

Stefan Weinzierl

26. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Historisches	5
2	Spezielle Relativitätstheorie	6
2.1	Postulate	6
2.2	Abstand, Metrik und Vierervektoren	6
2.3	Die Eigenzeit	10
2.4	Die Lorentztransformation	11
2.5	Transformation der Geschwindigkeit	12
2.6	Die Vierergeschwindigkeit	13
2.7	Die relativistische Mechanik	14
2.8	Die Lorentzgruppe	17
2.9	Tensoren	20
3	Vektoranalysis und Integralsätze	23
3.1	Vektoranalysis im dreidimensionalen Raum	23
3.2	Vektoranalysis im vierdimensionalen Raum	24
3.3	Die Integralsätze im dreidimensionalen Raum	27
3.4	Integralsätze im vierdimensionalen Raum	28
4	Die Maxwell'schen Gleichungen in integraler Form	29
4.1	Das Induktionsgesetz	30
4.2	Das Gauß'sche Gesetz	30
4.3	Das Gesetz von Biot und Savart	31
4.4	Die Lorentz-Kraft	31
4.5	Die Kontinuitätsgleichung	32
5	Die Maxwell'schen Gleichungen in lokaler Form	33
5.1	Das Induktionsgesetz	33
5.2	Das Gauß'sche Gesetz	34
5.3	Die Kontinuitätsgleichung	35
5.4	Das Gesetz von Biot und Savart	35
5.5	Zusammenfassung der Maxwell'schen Gleichungen	37
6	Elektromagnetische Potentiale und Eichinvarianz	39
6.1	Skalare Potentiale und Vektorpotentiale	39
6.2	Eichinvarianz	40
6.3	Partielle inhomogene Differentialgleichungen	42
6.4	Probleme mit Randwertbedingungen	44

7	Die Maxwell'schen Gleichungen in kovarianter Form	47
7.1	Die Lorentzkraft und der Feldstärketensor	47
7.2	Die Kontinuitätsgleichung und die Viererstromdichte	49
7.3	Die Maxwell'schen Gleichungen	49
7.4	Viererpotential	51
7.5	Zusammenfassung der kovarianten Formulierung	53
8	Das Wirkungsprinzip	54
8.1	Die Lagrangedichte für die Wechselwirkung zwischen Teilchen und elektromagnetischen Feldern	54
8.2	Felder als dynamische Variablen	57
8.3	Die Lagrangedichte der Elektrodynamik	59
8.4	Zusammenfassung der Lagrangedichtenformulierung	60
9	Erhaltungssätze	62
9.1	Die Hamilton-Funktion	62
9.2	Noether'sche Erhaltungsgrößen	65
9.3	Translationsinvarianz und der Energie-Impuls-Tensor	66
9.4	Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes	68
10	Formulierung der Maxwell'schen Theorie mittels Differentialgeometrie	70
10.1	Mannigfaltigkeiten	71
10.2	Differentialformen	72
10.3	Hodge-Theorie	74
11	Elektrostatik	75
11.1	Multipolentwicklung	77
11.2	Orthogonale Funktionen	79
11.3	Elektrostatische Probleme mit Axialsymmetrie	82
11.4	Allgemeine Anordnung ohne Axialsymmetrie	83
11.5	Nachtrag zu elektrischen Dipol- und Quadrupolfeldern	87
12	Magnetostatik	89
12.1	Magnetische Dipoldichte und magnetisches Moment	90
12.2	Das Feld eines magnetischen Dipols	91
12.3	Die Larmor-Präzession	93
13	Die Maxwell'schen Gleichungen in Materie	95
13.1	Zusammenhang der Verschiebung mit dem elektrischen Feld	96
13.2	Zusammenhang zwischen Induktions- und magnetischen Feld	98
13.3	Ohm'sches Gesetz	100
13.4	Stetigkeitsbedingungen	101
13.5	Der Energie-Impuls-Tensor in Materie	103

14 Die Strahlung des elektromagnetischen Feldes	105
14.1 Die Helmholtz-Gleichung	105
14.2 Das Lienard-Wiechert Potential	108
14.3 Abstrahlung einer beschleunigten Ladung	110
14.4 Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen	114
14.5 Multipolstrahlung	117
14.6 Dipolstrahlung	118
14.7 Elektromagnetische Wellen	122
14.8 Die Wellengleichung in Materie	125
15 Grenzen der Elektrodynamik	126
15.1 Die Selbstenergie	126
15.2 Regularisierung	127
15.3 Renormierung	127
15.4 Die Renormierungsgruppengleichung	127
16 Allgemeine Relativitätstheorie	129
16.1 Riemann'sche Geometrie	132
16.2 Die kovariante Ableitung	134
16.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang	137
16.4 Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld	138
16.5 Der Krümmungstensor	138
16.6 Die Einstein'schen Feldgleichungen	142
16.7 Die Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie	145
16.8 Die Schwarzschild-Lösung	149
16.9 Kosmologische Aspekte	151
17 Klassische Yang-Mills Theorie	153
17.1 Eichinvarianz	154
17.2 Lie-Gruppen und Lie-Algebren	155
17.3 Faserbündel	157
17.4 Zusammenhangsformen auf Hauptfaserbündeln	159
17.5 Elektrodynamik als Eichtheorie	161
17.6 Nicht-abelsche Eichtheorien	161

1 Einführung

Literatur:

- F. Scheck, Theoretische Physik 3 (Klassische Feldtheorie), Springer
- J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons
- L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Band II, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag

1.1 Historisches

625-547 v. Chr.	Thales von Milet	Körper ändern ihre Eigenschaften, wenn man sie an anderen Körpern reibt (Reibungselektrizität).
~ 1250	P. Peregrinus	Richtung von Kompaßnadeln zeigt auf Magneten, $\text{div } \vec{B} = 0$.
1766	J. P. Priestley	$V = \text{const}$ in einer Metallkugel, Vermutung des $1/r^2$ -Gesetzes.
1769	J. Robinson	$1/r^{2\pm 0.06}$.
1772	H. Cavendish	$1/r^{2\pm 0.02}$.
1785	Ch. A. Coulomb	Bestimmung des $1/r^2$ -Gesetzes mit der Drehwaage.
1813	S.D. Poisson	$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$.
1820	H. C. Oersted	Kompaßnadel bewegt sich bei Entladung einer Leidener Flasche.
1820	A. M. Ampère	Kräfte zwischen Strömen (eine Woche später).
1820	J. Biot, F. Savart	Biot-Savart-Gesetz (6 Wochen später).
1820	A. M. Ampère	$\text{rot } \vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$.
1831	M. Faraday	$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c$.
1843	M. Faraday	$\text{div } \vec{j} + \dot{\rho} = 0$.
1864	J. C. Maxwell	Verschiebungsstrom und Maxwellsche Gleichungen.
1888	H. Hertz	elektromagnetische Wellen.
1905	A. Einstein	Spezielle Relativitätstheorie.
1915	A. Einstein	Allgemeine Relativitätstheorie.
1948	R.P. Feynman, J. Schwinger, S.-I. Tomonaga	Quantenelektrodynamik
1954	C.N. Yang, R.L. Mills	nicht-abelsche Eichtheorien
1967	S. Glashow, A. Salam, S. Weinberg	elektroschwache Wechselwirkung
1972	H. Fritzsche, M. Gell-Mann	starke Wechselwirkung
1972	't Hooft, Veltman	Renormierung

2 Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Postulate

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem sich ein Körper, der keinen äußeren unterliegt, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Verschiedene Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit geradlinig-gleichförmiger Geschwindigkeit.

Relativitätsprinzip: Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in gleicher Form.

Prinzip einer endlichen Signalgeschwindigkeit (Maximalgeschwindigkeit der Wirkungsausbreitung).

Die Signalgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem gleich, und gleich der Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2.99792 \cdot 10^8 \text{m/s.}$$

Grenzfall der klassischen Mechanik: $c \rightarrow \infty$. In der klassischen Mechanik gilt das Galileische Relativitätsprinzip: Räumliche Beziehungen hängen vom Bezugssystem ab. Die Zeit wird allerdings als absolut betrachtet.

In der speziellen Relativitätstheorie ist die Zeit keine absolute Größe mehr. Beispiel: Zwei Inertialsysteme K und K' , wobei sich K relativ zu K' nach rechts relativ der Achsen x und x' bewege. Von irgendeinem Punkt A auf der x -Achse werden Signale in zwei entgegengesetzte Richtungen ausgesandt. Da die Signalgeschwindigkeit im System K in beiden Richtungen gleich c ist, werden, gemessen im System K , die von A aus in gleicher Entfernung befindlichen Punkte B und C von den Signalen in gleicher Zeit erreicht. Diese beiden Ereignisse der Ankunft der Signale ist für einen Beobachter im System K' aber keineswegs gleichzeitig.

2.2 Abstand, Metrik und Vierervektoren

Ereignis charakterisiert durch den Ort, an dem es stattfindet, und durch den Zeitpunkt, an dem es geschieht. Ein Ereignis ist also durch drei Ortskoordinaten und einer Zeitkoordinate in einem vier-dimensionalen Raum gegeben.

Betrachte wieder die Bezugssysteme K und K' : Betrachte ein erstes Ereignis, das darin besteht daß vom Punkt (x_1, y_1, z_1) zur Zeit t_1 ein Lichtsignal ausgesandt wird. Dieses Signal trifft zur Zeit t_2 am Punkt (x_2, y_2, z_2) ein (Ereignis 2). Da sich das Signal mit Geschwindigkeit c ausbreitet, hat es die Entfernung

$$c(t_2 - t_1)$$

zurückgelegt. Andererseits ist die Entfernung natürlich

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Daher gilt:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = 0.$$

In K' seien die Koordinaten des ersten Ereignisses x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 und die des zweiten Ereignisses x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 . Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt auch in diesem System

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 = 0.$$

Definition: Sind x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten von zwei beliebigen Ereignissen, so heißt die Größe

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$$

der Abstand zwischen diesen beiden Ereignissen.

Aus der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt: Verschwindet der Abstand zwischen zwei Ereignissen in einem Bezugssystem, so auch in allen anderen.

Allgemeiner gilt: Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist in allen Bezugssystemen gleich.

Beweis: Sind zwei Ereignisse infinitesimal benachbart, so ist der Abstand

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Gilt $ds = 0$ in einem Inertialsystem, so verschwindet ds' in einem anderen System ebenfalls. ds und ds' sind infinitesimale Größen gleicher Ordnung. Aus diesen beiden Umständen folgt, daß sie zueinander proportional sein müssen:

$$ds^2 = a ds'^2$$

Die Proportionalitätskonstante a kann nicht von den Raum- und Zeitkoordinaten abhängen, da dies der Homogenität von Raum und Zeit widersprechen würde. a kann auch nicht von der Richtung der Relativgeschwindigkeit anhängen, da dies im Widerspruch zur Isotropie des Raumes stehen würde. Daher kann a nur vom Betrag der Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme abhängen. Betrachte die Bezugssysteme K, K_1 und K_2 . Sei \vec{v}_1 die Geschwindigkeit von K_1 relativ zu K , \vec{v}_2 die Geschwindigkeit von K_2 relativ zu K und \vec{v}_{12} die Geschwindigkeit von K_2 relativ zu K_1 . Dann gilt

$$ds^2 = a(v_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(v_2) ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(v_{12}) ds_2^2,$$

und daher

$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} = a(v_{12}).$$

Nun hängt v_{12} auch vom Winkel zwischen \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ab, die linke Seite dagegen nicht. Daher muß $a(v)$ gleich einer Konstanten sein, die wie aus derselben Gleichung folgt, gleich 1 sein muß. Daher

$$ds^2 = ds'^2,$$

und aus der Gleichheit infinitesimaler Abstände folgt auch die endlicher Abstände:

$$s = s'.$$

$s_{12}^2 > 0$ zeitartiger Abstand;
es gibt ein Bezugssystem, in dem die Ereignisse 1 und 2 am gleichen Ort stattfinden.

$s_{12}^2 < 0$ raumartiger Abstand;
es gibt ein Bezugssystem, in dem die Ereignisse 1 und 2 gleichzeitig stattfinden.

$s_{12}^2 = 0$ lichtartiger Abstand;
Lichtkegel

Zwei Ereignisse können miteinander nur dann kausal verbunden sein, wenn der Abstand zwischen ihnen ≥ 0 ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß sich keine Wirkung mit einer Geschwindigkeit ausbreiten kann, die größer als die des Lichtes ist.

Vierervektoren: Die Koordinaten (ct, x, y, z) eines Ereignisses können als Komponenten eines Vektors in einem vier-dimensionalen Raum betrachtet werden.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3), \\ &= (x^0, \vec{x}). \end{aligned}$$

Wir verwenden griechische Indices μ, ν, \dots , die die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen, um die Komponenten eines Vierervektors zu bezeichnen. Lateinische Indizes i, j, \dots werden verwendet, um die Komponenten eines räumlichen Dreiervektors zu bezeichnen. Sie nehmen die Werte 1, 2, 3 an.

Der Abstand zweier Ereignisse x_a und x_b ist:

$$s_{ab} = (x_a^0 - x_b^0)^2 - (x_a^1 - x_b^1)^2 - (x_a^2 - x_b^2)^2 - (x_a^3 - x_b^3)^2.$$

Wir definieren den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Abstand läßt sich dann schreiben als:

$$s_{ab} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} (x_a^\mu - x_b^\mu) (x_a^\nu - x_b^\nu).$$

Einsteinsche Summenkonvention: Solche Summen werden üblicherweise unter Fortlassung des Summenzeichens geschrieben. Allgemein soll die Regel gelten, daß über Indizes, die paarweise auftreten, summiert wird, das Summationszeichen aber nicht aufgeschrieben wird. Dabei muß in jedem Paar der eine Index oben stehen, der andere unten stehen.

Also:

$$s_{ab} = g_{\mu\nu} (x_a - x_b)^\mu (x_a - x_b)^\nu.$$

Wir nennen einen Vierervektor x^μ mit einem oberen Index einen kontravarianten Vektor, ein Vierervektor x_μ mit einem unteren Index wird kovarianter Vektor genannt. Der Zusammenhang zwischen ko- und kontra-varianten Vektoren ist durch

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

gegeben. Somit läßt sich der Abstand auch schreiben als

$$s_{ab} = (x_a - x_b)_\mu (x_a - x_b)^\mu = (x_a - x_b)^\mu (x_a - x_b)_\mu.$$

Bemerkung: Die durch die quadratische Form $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ definierte Geometrie ist keine euklidische Geometrie. Man nennt sie pseudo-euklidische Geometrie. Der spezielle Fall eines vierdimensionalen Raumes mit der Metrik $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ wird auch als Minkowski-Raum bezeichnet.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Relativitätsprinzip: Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in gleicher Form.

Prinzip einer endlichen Signalgeschwindigkeit (Maximalgeschwindigkeit der Wirkungsausbreitung).

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem sich ein Körper, der keinen äußeren Kräften unterliegt, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Kontravarianter Vierervektor:

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Kovarianter Vierervektor:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Abstand

$$s_{ab} = g_{\mu\nu} (x_a - x_b)^\mu (x_a - x_b)^\nu$$

ist invariant.

2.3 Die Eigenzeit

Wir beobachten aus einem Inertialsystem K' eine Uhr, die sich beliebig bewegt. Diese Bewegung können wir näherungsweise durch eine Sequenz geradliniger-gleichförmiger Bewegungen beschreiben. Man kann daher in jedem Zeitmoment der Uhr ein Inertialsystem K zuordnen, in dem diese ruht. Im Koordinatensystem K' legt die Uhr im infinitesimalen Zeitintervall dt' die Strecke

$$\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

zurück. Gefragt wird, welches Zeitintervall dt sie danach anzeigt. Aus der Invarianz des Abstandes folgt:

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2$$

und daher

$$dt = dt' \sqrt{1 - \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{c^2 dt'^2}} = dt' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Integration liefert für eine beliebige Bewegung

$$t_2 - t_1 = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Bemerkung 1: Die Eigenzeit eines sich bewegenden Gegenstandes ist immer kleiner als das entsprechende Zeitintervall im unbewegten System.

Bemerkung 2: Die ist kein Widerspruch zum Relativitätsprinzip, da zum Vergleich eine Uhr im "bewegten" System, aber mehrere Uhren im "unbewegten" System notwendig sind.

Bemerkung 3: Auch eine Uhr, die auf einer geschlossenen Kurve bewegt wird, stellt keine Widerspruch dar, da sie sich nicht dauernd in einem Inertialsystem befinden kann.

2.4 Die Lorentztransformation

Gesucht: Formel, die es uns gestatte, aus den Koordinaten x, y, z, t eines Ereignisses in einem Bezugssystem K die Koordinaten x', y', z', t' desselben Ereignisses in einem anderen Inertialsystem K' zu berechnen.

Zur Erinnerung: Galilei-Transformation:

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

System K bewegt sich mit Geschwindigkeit v relativ zum System K' entlang der x -Achse.

Die relativistische Verallgemeinerung muß den Abstand invariant lassen. Daher kommen nur Parallelverschiebungen und Drehungen in Frage. Parallelverschiebungen sind hier nicht so interessant, da sie nur die Lage des Ursprungs ändern. Jede Drehung im vierdimensionalen Raum kann in sechs Einzeldrehungen in den Ebenen xy, yz, zx, tx, ty und tz zerlegt werden. Drehungen in den ersten drei Ebenen entsprechen gewöhnlichen räumlichen Drehungen. Betrachte als Beispiel für die letzten drei die Drehung in der tx -Ebene, die y - und z -Koordinaten ändern sich hier nicht. Diese Drehung muß die Differenz

$$ct^2 - x^2$$

invariant lassen. Aufgrund der pseudo-euklidischen Metrik mit negativen Vorzeichen erhalten wir hier einen imaginären Drehungswinkel und damit hyperbolische trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} ct' &= x \sinh \phi + ct \cosh \phi, \\ x' &= x \cosh \phi + ct \sinh \phi, \end{aligned}$$

oder in Viererschreibweise

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

mit

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung von ϕ : Betrachte hierzu den Koordinatenursprung des Systems K im System K' :

$$ct' = ct \cosh\phi, \quad x' = ct \sinh\phi,$$

und daher

$$\tanh\phi = \frac{x'}{ct'} = \frac{v}{c}.$$

Somit

$$\sinh\phi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Im Grenzfall $v \ll c$ findet man die Galilei-Transformation.

Übliche Abkürzungen:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Längenkontraktion: Ein Stab der Länge l , der im System K ruht und parallel zur x -Achse orientiert ist, hat im System K' die Länge

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

(Bestimme hierzu die x' -Koordinaten x'_1 und x'_2 des Anfangs- und des Endpunktes zu demselben Zeitpunkt t' im System K' .)

2.5 Transformation der Geschwindigkeit

Das System K bewege sich relativ zum System K' mit der Geschwindigkeit V längs der x -Achse. Die Geschwindigkeit eines Teilchens in K sei

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

die entsprechenden Größen in K' seien

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

Die infinitesimalen Größen stehen mittels der Lorentztransformation

$$dx' = \gamma(dx + V dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(dt + \frac{V}{c^2} dx\right)$$

in Verbindung. Division der ersten drei Gleichungen durch die vierte liefert:

$$v'_x = \frac{v_x + V}{1 + \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 + \frac{v_x V}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 + \frac{v_x V}{c^2}\right)}.$$

Spezialfall: $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$:

$$v' = \frac{v + V}{1 + \frac{vV}{c^2}}.$$

Die nach dieser Formel berechnete Summe zweier Geschwindigkeiten ist immer kleiner als c .

2.6 Die Vierergeschwindigkeit

Die Vierergeschwindigkeit eines Teilchens ist der Vektor

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

Um die Komponenten zu finden erinnern wir uns, daß

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

wobei v die gewöhnliche dreidimensionale Geschwindigkeit des Teilchens ist. Daher

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^1}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ergebnis:

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Die Komponenten von u^μ sind nicht unabhängig sondern erfüllen die Relation

$$u^\mu u_\mu = 1.$$

Die Vierergeschwindigkeit läßt sich daher geometrisch als Einheitsvektor auffassen, der die Weltlinie des Teilchens tangiert.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Lorentztransformation:

$$\begin{aligned} ct' &= x \sinh \phi + ct \cosh \phi, \\ x' &= x \cosh \phi + ct \sinh \phi, \end{aligned}$$

$$\sinh \phi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

oder in Viererschreibweise

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

mit

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeitdilatation:

$$t_2 - t_1 = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Längenkontraktion:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Addition von Geschwindigkeiten:

$$v'_x = \frac{v_x + V}{1 + \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 + \frac{v_x V}{c^2})}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 + \frac{v_x V}{c^2})}.$$

2.7 Die relativistische Mechanik

Die wichtigsten Elemente der klassischen Mechanik: Im Lagrangeformalismus betrachtet man verallgemeinerte Koordinaten $q_i(t)$ und die zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t) = \frac{\partial}{\partial t} q_i(t)$.
Lagrangefunktion

$$L(q_i, \dot{q}_i)$$

Wirkung:

$$S[q_i(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q_i, \dot{q}_i)$$

Prinzip der kleinsten Wirkung: Ein Teilchen bewegt sich so, daß das Wirkungsintegral ein Extremum annimmt.

Wirkungsintegral für freie Materieteilchen:

- muß invariant bezüglich Lorentztransformationen sein.
- nur Differentiale erster Ordnung.

Die Wirkung für ein freies Teilchen hat daher die Gestalt

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

Das Integral ist längs einer Weltlinie zwischen den Ereignissen a und b zu nehmen. Damit S ein Minimum hat muß $\alpha > 0$ gelten. Begründung: Für eine ruhende Uhr ist $ds = cdt$.

Wir schreiben auch

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt,$$

wobei L als Lagrange-Funktion bezeichnet wird. Mit

$$ds = cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

erhalten wir

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Im klassischen Grenzfall muß gelten:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} L = \text{const} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Wir entwickeln L :

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Daher $\alpha = mc$ und

$$S = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Der Impuls eines Teilchens ist der Vektor

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{mit } \vec{v} = \dot{\vec{x}}, \quad \left(\text{zur Erinnerung: } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

Die Energie eines Teilchens ist die Größe

$$\begin{aligned} E &= \vec{p}\vec{v} - L, & (\text{zur Erinnerung: } E = p_i \dot{q}_i - L), \\ &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v^2 + c^2 - v^2) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeiten erhält man

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

mc^2 bezeichnet man als Ruheenergie.

Herleitung der Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen in Vierer-Schreibweise: Ausgangspunkt:

$$S = -mc \int_a^b ds$$

Variation der Koordinaten:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$$

Variationsprinzip:

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu(t)} S[x^\mu(t)] = 0.$$

Nebenrechnung:

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu} ds = \frac{\delta}{\delta x^\mu} \sqrt{dx_\nu dx^\nu} = \frac{1}{2\sqrt{ds^2}} 2dx_\nu \frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu = u_\nu \frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu$$

und somit

$$\delta ds = u_\nu \delta dx^\nu$$

Weiter

$$\begin{aligned}\delta S &= -mc \int_a^b \delta ds = -mc \int_a^b u_\nu \delta dx^\nu = -mc \int_a^b u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{ds} ds \\ &= -mc u_\nu \delta x^\nu \Big|_a^b + mc \int_a^b \left(\frac{d}{ds} u_\nu \right) \delta x^\nu ds\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{ds} u_\nu = 0,$$

d.h. die kräftefreie Bewegung eines Teilchens erfolgt mit konstanter Vierergeschwindigkeit.

Definition des kontravarianten Impulsvierervektors:

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Bemerkung: p^2 ist invariant.

2.8 Die Lorentzgruppe

Gruppenaxiome: Sei G eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung. G ist eine Gruppe, falls die folgenden Axiome gelten:

- Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Es gibt ein neutrales Element: $e \cdot a = a$.
- Es gibt zu jedem Element ein Inverses: $a^{-1} \cdot a = e$.

Beispiele: Matrixgruppen.

- $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$: Gruppe der nicht singulären $n \times n$ Matrizen: $\det M \neq 1$
- $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$: $\det M = 1$;
- $O(n)$: $MM^T = 1$
- $SO(n)$: $MM^T = 1$ und $\det M = 1$.
- $U(n)$: $MM^\dagger = 1$.
- $SU(n)$: $MM^\dagger = 1$ und $\det M = 1$.

Definition der Lorentzgruppe: Matrixgruppe, welche den metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ invariant läßt:

$$\Lambda^T g \Lambda = g,$$

oder, etwas ausführlicher mit Indizes:

$$\Lambda^\mu_{\sigma} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_{\tau} = g_{\sigma\tau}.$$

Diese Gruppe wird auch mit $O(1,3)$ bezeichnet. Wie leicht zu sehen ist, gilt

$$(\det \Lambda)^2 = 1,$$

und daher

$$\det \Lambda = \pm 1.$$

Gilt zusätzlich $\det \Lambda = 1$ bezeichnet man die Gruppe mit $SO(1,3)$ und spricht von der eigentlichen Lorentzgruppe.

Eine weitere Unterscheidung ergibt sich dadurch, ob die Zeitrichtung erhalten bleibt oder umgekehrt wird. Gilt

$$\Lambda^0_0 \geq 1,$$

so ist die Zeitrichtung erhalten und man spricht von der orthochronen Lorentzgruppe. Gilt dagegen

$$\Lambda^0_0 \leq -1,$$

so wird die Zeitrichtung umgekehrt. Bemerkung:

$$|\Lambda^0_0| \geq 1$$

folgt aus $\Lambda^\mu_{\sigma} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_{\tau} = g_{\sigma\tau}$ für $\sigma = \tau = 0$:

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Lambda^j_0)^2 = 1.$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Lorentzgruppe aus vier Komponenten besteht, jenachdem welche Werte

$$\det \Lambda \quad \text{und} \quad \Lambda^0_0$$

annehmen. Hiervon ist die "eigentliche orthochrone Lorentzgruppe", definiert durch

$$\Lambda^\mu_{\sigma} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_{\tau} = g_{\sigma\tau}, \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1,$$

am interessantesten. Die drei anderen Komponenten lassen sich durch ein Element der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe und den beiden diskreten Transformationen der Zeitumkehr

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Raumspiegelung

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Die Poincarégruppe: Die Poincarégruppe besteht aus den Elementen der Lorentzgruppe und den Translationen. Die Koordinaten transformieren sich wie folgt

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}.$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Relativistische Mechanik:

$$S = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Der kontravariante Impulsvierervektor:

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Die Lorentzgruppe: Invarianzgruppe von

$$\Lambda^\mu_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\tau = g_{\sigma\tau}.$$

Eigentliche orthochrone Lorentzgruppe: $\det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1$.

Die volle Lorentzgruppe wird aus der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe durch Raumspiegelung und Zeitumkehr erhalten.

2.9 Tensoren

Sei V ein Vektorraum und G eine Gruppe. Man sagt, G wirkt auf V , falls eine Abbildung gegeben ist,

$$G \times V \rightarrow V$$

die

$$g_1(g_2 v) = (g_1 g_2) v$$

erfüllt. In diesem Fall nennt man V eine Darstellung von G .

Beispiel 1: Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $G = GL(n, \mathbb{R})$. Die Abbildung $G \times V \rightarrow V$ ist durch die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor gegeben:

$$v'_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} v_j$$

Beispiel 2: Sei V der Minkowskiraum und G die Lorentzgruppe.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{Einsteinsche Summenkonvention})$$

Beispiel 3: Sei V ein n^2 -dimensionaler Vektorraum und $G = GL(n, \mathbb{R})$. Elemente aus V schreiben wir als v_{ij} mit $1 \leq i, j \leq n$. G wirkt auf V wie folgt:

$$v'_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n M_{ik} M_{jl} v_{kl}$$

Man nennt v_{ij} einen Tensor zweiter Stufe.

Beispiel 4: Sei V ein 16-dimensionaler Raum und G die Lorentzgruppe.

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}$$

$T^{\mu\nu}$ ist ein Tensor zweiter Stufe.

Beispiel 5: Sei V ein 64-dimensionaler Raum und G die Lorentzgruppe.

$$T'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\kappa \Lambda^\rho_\lambda T^{\sigma\kappa\lambda}$$

$T^{\mu\nu\rho}$ ist ein Tensor dritter Stufe.

Allgemein: Ein Tensor ist ein Element eines Vektorraums, auf den eine Gruppenwirkung gegeben ist. Die Anzahl der Kopien des Gruppenelements, die zur Definition der Gruppenwirkung benötigt werden, bezeichnet man als Rang des Tensors.

Pseudotensoren verhalten sich bei allen Transformationen, die sich auf Drehungen zurückführen lassen, wie Tensoren. Sie verhalten sich allerdings anders bei Spiegelungen (Raumspiegelung, Zeitumkehr), d.h. Transformationen, die sich nicht auf Drehungen zurückführen lassen: Hier unterscheiden sie sich von den Tensoren um ein Minuszeichen.

Pseudotensoren nullter Stufe nennt man Pseudoskalare. Pseudotensoren erster Stufe nennt man auch axiale Vektoren.

In der speziellen Relativitätstheorie unterscheiden wir außerdem zwischen oberen und unteren Indizes (kontravariante und kovariante Komponenten). Der Zusammenhang ist wieder durch den metrischen Tensor gegeben:

$$T^\mu_\nu = g_{\nu\rho} T^{\mu\rho}, \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma}$$

Tensoren mit bestimmten Symmetrieeigenschaften: Ein Tensor heißt symmetrisch falls gilt

$$S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$$

Ein Tensor heißt antisymmetrisch, falls

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$$

gilt. Insbesondere gilt für einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe $A^{00} = A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0$.

Beispiele für Tensoren in der speziellen Relativitätstheorie:

Rang 1: Ortsvektor x^μ , Impulsvektor p^μ .

Rang 2: Metrischer Tensor $g^{\mu\nu}$.

Rang 4: Total antisymmetrischer Tensor (Levi-Civita-Tensor) $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Der total antisymmetrische Tensor ist definiert durch

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0123} &= 1, \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 1 \text{ falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist,} \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -1 \text{ falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist,} \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 0 \text{ sonst.}\end{aligned}$$

Der total antisymmetrische Tensor ist ein Pseudotensor, er ändert bei Raumspiegelung und Zeitumkehr seine Komponenten nicht.

Das Produkt $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ bildet einen Tensor achter Stufe, wobei dieser Tensor echt ist. Durch Verjüngung bezüglich ein oder mehrerer Indexpaare erhalten wir Tensoren sechster, vierter oder zweiter Stufe. Alle diese Tensoren haben dieselbe Gestalt in allen Koordinatensystemen. Daher lassen sie sich durch δ_ν^μ ausdrücken, des einzigen echten Tensors, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen dieselben sind.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= - \begin{vmatrix} \delta_\alpha^\mu & \delta_\beta^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\delta^\mu \\ \delta_\alpha^\nu & \delta_\beta^\nu & \delta_\gamma^\nu & \delta_\delta^\nu \\ \delta_\alpha^\rho & \delta_\beta^\rho & \delta_\gamma^\rho & \delta_\delta^\rho \\ \delta_\alpha^\sigma & \delta_\beta^\sigma & \delta_\gamma^\sigma & \delta_\delta^\sigma \end{vmatrix}, \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} &= - \begin{vmatrix} \delta_\alpha^\mu & \delta_\beta^\mu & \delta_\gamma^\mu \\ \delta_\alpha^\nu & \delta_\beta^\nu & \delta_\gamma^\nu \\ \delta_\alpha^\rho & \delta_\beta^\rho & \delta_\gamma^\rho \end{vmatrix}, \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2 \begin{vmatrix} \delta_\alpha^\mu & \delta_\beta^\mu \\ \delta_\alpha^\nu & \delta_\beta^\nu \end{vmatrix}, \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} &= -6\delta_\alpha^\mu, \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24.\end{aligned}$$

Duale Tensoren: Sei $F^{\mu\nu}$ ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe. Der Pseudotensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

heißt der zu $F^{\mu\nu}$ duale Tensor.

Analog gilt für einen Vektor A^μ : Der Tensor dritter Stufe

$$\tilde{A}^{\mu\nu\rho} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\sigma$$

heißt der zum Vektor A^μ duale Tensor.

3 Vektoranalysis und Integralsätze

3.1 Vektoranalysis im dreidimensionalen Raum

Definition des Gradienten: Sei $\phi(x)$ eine Funktion auf dem \mathbb{R}^3 . Dann bezeichnet man als Gradientenfeld

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Definition der Divergenz: Sei \vec{V} ein Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^3 . Bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 schreiben wir

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^3 V^i(x) \hat{e}_i.$$

Dann bezeichnet man als Divergenz des Vektorfelds den Ausdruck

$$\text{div } \vec{V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} V^i(x)$$

Die Divergenz eines Gradientenfelds ist gleich

$$\text{div grad } \phi(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^i)^2} = \Delta \phi(x)$$

Definition der Rotation:

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x^j}$$

Bemerkung: Das Transformationsverhalten des Vektorfelds \vec{V} und seiner Rotation $\text{rot } \vec{V}$ unter Raumspiegelungen sind entgegengesetzt: Falls \vec{V} sein Vorzeichen unter einer Raumspiegelung

ändert, dann bleibt $\text{rot } \vec{V}$ invariant.

Einige Eigenschaften: Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes verschwindet (wegen der Anti-Symmetrie von ϵ^{ijk}):

$$\text{div rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} V_k = 0.$$

Die Rotation eines Gradientenfeldes ist gleich Null (ebenfalls aufgrund der Anti-Symmetrie von ϵ^{ijk}):

$$\text{rot grad } \phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \phi = 0.$$

Eine weitere hilfreiche Beziehung ist

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{l,m=1}^3 \epsilon^{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} V_m \\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^3 \epsilon^{ijk} \epsilon^{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} V_m \\ &= \sum_{j,l,m=1}^3 (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} V_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} V_j \right) - \Delta V_i \end{aligned}$$

3.2 Vektoranalysis im vierdimensionalen Raum

Gradientenfeld: Sei $\phi(x)$ eine Funktion auf dem Minkowski-Raum.

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi, \vec{\nabla} \phi \right).$$

Bemerkung:

$$\partial^\mu \phi = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi, -\vec{\nabla} \phi \right).$$

Vierer-Divergenz: Sei V^μ ein Vektorfeld auf dem Minkowski-Raum.

$$\partial_\mu V^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\mu(x) = \frac{1}{c} \frac{\partial V^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}.$$

Die Divergenz eines Gradientenfelds ist

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = \square \phi.$$

Antisymmetrische Ableitung eines Vierer-Vektors:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu.$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Gradient einer Funktion:

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi(x).$$

Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} V^i(x)$$

Rotation eines Vektorfeldes:

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x^j}$$

Laplace-Operator:

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Einige Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0, \\ \text{rot grad } \phi &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}. \end{aligned}$$

Im vierdimensionalen Minkowski-Raum: Gradientenfeld:

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi, \vec{\nabla} \phi \right).$$

Vierer-Divergenz:

$$\partial_\mu V^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\mu(x) = \frac{1}{c} \frac{\partial V^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}.$$

D'Alembert-Operator:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

3.3 Die Integralsätze im dreidimensionalen Raum

Gauß'scher Satz: Es sei F eine glatte, orientierbare, geschlossene Fläche, die in den \mathbb{R}^3 eingebettet ist und die daher ganz im Endlichen liegt. Es sei $V(F)$ das von dieser Fläche eingeschlossene Volumen und es sei \vec{U} ein glattes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{V(F)} \int \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \int \int_F d\sigma \vec{U} \cdot \hat{n}.$$

Hierbei ist \hat{n} die nach außen gerichtete Flächennormale am Ort des Flächenelements $d\sigma$.

Stoke'scher Satz: Es sei C ein glatter, geschlossener Weg und es sei $F(C)$ eine von C begrenzte, ebenfalls glatte (orientierbare) Fläche. Für ein glattes Vektorfeld \vec{V} , das auf F inklusive seines Randes definiert ist, gilt

$$\int \int_{F(C)} d\sigma (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} = \oint_C ds \cdot \vec{V}.$$

Hierbei ist \hat{n} die orientierte Flächennormale auf $F(C)$, ds ist das gerichtete Linienelement auf C . Diese Orientierungen sind so korreliert, daß die geschlossene Kurve C und \hat{n} eine Rechtsschraube bilden.

Erster Green'scher Satz: Es seien Φ und Ψ C^2 -Funktionen. Es sei $V(F)$ ein endliches Volumen und $F = \partial V$ seine Oberfläche wie im Gauß'schen Satz. Dann gilt

$$\int \int_{V(F)} \int d^3x (\Phi \Delta \Psi + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi) = \int \int_F d\sigma \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}}.$$

Dieser Satz ist eine direkte Anwendung des Gauß'schen Satzes wenn man dort das Vektorfeld

$$\vec{U} = \Phi (\vec{\nabla} \Psi)$$

einsetzt und die Produktregel für die Differentiation verwendet,

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla} \Psi) = \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi + \Phi \Delta \Psi.$$

Zweiter Green'scher Satz:

$$\int \int_{V(F)} \int d^3x (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) = \int \int_F d\sigma \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right).$$

In beiden Fällen ist mit $\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}}$ bzw. $\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}}$ die Normalableitung gemeint, das ist die Richtungsableitung der jeweiligen Funktion in Richtung der Flächennormale \hat{n} am betrachteten Punkt der Fläche F :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi.$$

3.4 Integralsätze im vierdimensionalen Raum

Im vierdimensionalen Raum gibt es vier Arten von Integrationsbereichen:

1. Integration über eine Kurve im vierdimensionalen Raum. Das Integrationselement ist das Längenelement und wird vom Vierervektor dx^μ gebildet.
2. Integration über eine zweidimensionale Fläche des vierdimensionalen Raumes. Bekanntlich ist im dreidimensionalen Raum die Projektion eines von den beiden Vektoren $d\vec{r}$ und $d\vec{r}'$ aufgespannten Parallelogramms auf die Koordinatenebenen $x_i x_j$ durch $dx_i dx'_j - dx_j dx'_i$ gegeben. Analog wird im Vierdimensionalen das infinitesimale Oberflächenelement durch den antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe

$$df^{\mu\nu} = dx^\mu dx'^\nu - dx^\nu dx'^\mu$$

dargestellt. Im dreidimensionalen Raum kann man an Stelle des Tensors df^{ij} den zu df^{ij} dualen Vektor

$$df_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} df^{jk}$$

benutzen. Geometrisch gedeutet, ist df_i der Vektor, der normal zur Fläche steht und dessen Länge gleich dem Inhalt des Flächenelements ist. Im Vierdimensionalen ist es nicht möglich, einen derartigen Vektor zu konstruieren. Man kann jedoch den zu $df^{\mu\nu}$ dualen Tensor $d\tilde{f}^{\mu\nu}$ bilden:

$$d\tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} df_{\rho\sigma}.$$

In geometrischer Hinsicht ist $d\tilde{f}^{\mu\nu}$ ein zu $df^{\mu\nu}$ orthogonales Flächenelement: Alle in $d\tilde{f}^{\mu\nu}$ liegenden Richtungen stehen normal auf allen in $df^{\mu\nu}$ liegenden Richtungen.

3. Integration über eine Hyperfläche, d.h. über eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Im dreidimensionalen Raume ist das Volumen eines von drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds bekanntlich gleich der von den Komponenten der Vektoren gebildeten dreireihigen Determinante. Analog hat man im vierdimensionalen Raum

$$dS^{\mu\nu\rho} = \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \\ dx^\rho & dx'^\rho & dx''^\rho \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten bilden einen in allen drei Indizes antisymmetrischen Tensor dritter Stufe. Es ist jedoch bequemer, als Integrationselement den zum Tensor $dS^{\mu\nu\rho}$ dualen Vierervektor $d\tilde{S}^\mu$ zu benutzen:

$$d\tilde{S}^\mu = -\frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dS_{\nu\rho\sigma}, \quad dS_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} d\tilde{S}^\sigma.$$

Geometrisch gesehen ist $d\tilde{S}^\mu$ ein Vierervektor, dessen Länge gleich dem Inhalt des Hyperflächenelements ist und der senkrecht auf diesem steht.

4. Integration über ein vierdimensionales Volumen. Das Integrationselement ist das Produkt der Differentiale:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV.$$

Verallgemeinerung des Gauß'schen und des Stoke'schen Satzes: Allgemein gilt: Das Integral über die totale Ableitung einer Funktion über ein Gebiet ist gleich dem Integral der Funktion über den Rand.

$$\begin{aligned} \int d\Omega \partial_\mu A^\mu &= \oint d\tilde{S}_\mu A^\mu, \\ \int d\tilde{S}_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} &= \oint d\tilde{f}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{2} \int d f^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) &= \oint dx^\mu A_\mu. \end{aligned}$$

Check the signs and the orientation !

4 Die Maxwell'schen Gleichungen in integraler Form

Vorbemerkung: Historisch begründet sind die folgenden Bezeichnungen:

elektrische Feldstärke	\vec{E}
magnetische Induktion (magnetische Flußdichte)	\vec{B}
dielektrische Verschiebung	\vec{D}
magnetische Feldstärke	\vec{H}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Im Vakuum haben wir (im Gauß'schen Maßsystem):

$$\vec{D} = \vec{E}, \quad \vec{H} = \vec{B}.$$

Im SI-System gilt im Vakuum:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

wobei

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{C V}^{-1} \text{m}^{-1}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{VsA}^{-1} \text{m}^{-1}$$

4.1 Das Induktionsgesetz

Es sei C' eine glatte Kurve endlicher Länge, $d\vec{s}$ das Linienelement entlang dieser Kurve und sei $\vec{E}(t, \vec{x})$ ein elektrisches Feld. Dann nennt man das Wegintegral

$$\int_{C'} d\vec{s} \cdot \vec{E}(t, \vec{x})$$

die elektromotorische Kraft.

Sei nun C eine glatte, geschlossene Kurve im \mathbb{R}^3 , die eine glatte Fläche F berandet. Sei $\hat{n}(t, \vec{x})$ die Flächennormale. Dann ist der magnetische Fluß durch die Fläche F als das Flächenintegral

$$\Phi(t) = \int \int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}(t, \vec{x})$$

definiert. Das Faraday'sche Induktionsgesetz (1831) verknüpft die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses mit der entlang der Randkurve induzierten elektromotorischen Kraft:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -f_F \frac{d}{dt} \int \int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}(t, \vec{x})$$

Der Faktor f_F ist dabei reell-positiv und hängt von der Wahl der physikalischen Einheiten ab. Im SI-System ist er $f_F = 1$, im Gauß'schen Maßsystem ist er $f_F = 1/c$.

Bemerkung: Das negative Vorzeichen der rechten Seite enthält eine physikalische Aussage: die Richtung des in der Kurve C induzierten Stroms ist derart, dass der von diesem Strom erzeugte magnetische Fluß der zeitlichen Änderung des Flusses der rechten Seite entgegen wirkt. Das ist der Inhalt der Lenz'schen Regel.

4.2 Das Gauß'sche Gesetz

Dielektrische Verschiebung $\vec{D}(t, \vec{x})$: Im Vakuum gilt

$$\vec{D}(t, \vec{x}) = \vec{E}(t, \vec{x}).$$

In polarisierbaren Medien sind die beiden Vektorfelder über die Relation

$$\vec{D}(t, \vec{x}) = \varepsilon(\vec{x}) \vec{E}(t, \vec{x})$$

verknüpft, wobei $\varepsilon(\vec{x})$ ein Tensor zweiter Stufe ist und die Eigenschaften des Mediums – hier seine elektrische Polarisierbarkeit – beschreibt.

Das Gauß'sche Gesetz setzt den Fluß der dielektrischen Verschiebung durch eine geschlossene Fläche in Beziehung zur gesamten, durch diese Fläche eingeschlossenen elektrischen Ladung.

Es sei F eine geschlossene glatte Fläche, und $V(F)$ das von F eingeschlossene räumliche Volumen. Wenn $\rho(t, \vec{x})$ eine vorgegebene elektrische Ladungsdichte beschreibt, so gilt

$$\int_F \int d\sigma \vec{D}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = f_G \int \int \int_{V(F)} d^3x \rho(t, \vec{x}) = f_G Q_V.$$

Q_V ist die im Volumen $V(F)$ eingeschlossene Gesamtladung. Die Konstante f_G hat den Wert $f_G = 1$ im SI-System und den Wert $f_G = 4\pi$ im Gauß'schen Maßsystem.

Anwendung des Gauß'schen Gesetzes auf magnetische Ladungen und die von ihnen erzeugte magnetische Induktion: Das Experiment sagt uns, daß es keine freien magnetischen Ladungen gibt. Deshalb hat man

$$\int_F \int d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0.$$

4.3 Das Gesetz von Biot und Savart

Biot-Savart'sches Gesetz (1822): Die Stromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$ liege ganz im Endlichen und sei ein glattes Vektorfeld. Dann ist das durch diese Verteilung erzeugte Magnetfeld gegeben durch

$$\vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{f_{BS}}{4\pi} \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Dieser Ausdruck gilt im Außen- ebenso wie im Innenraum der Quellverteilung \vec{j} . \vec{H} und \vec{B} hängen wie folgt zusammen

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \mu \vec{H}(t, \vec{x}).$$

μ nennt man die magnetische Permeabilität. Im Vakuum gilt $\mu = 1$ (im Gauß'schen Maßsystem). Die Konstante f_{BS} hat den Wert $f_{BS} = 1$ im SI-System und den Wert $f_{BS} = 4\pi/c$ im Gauß'schen Maßsystem.

4.4 Die Lorentz-Kraft

Eine weitere wichtige, vom Experiment bestätigte Erfahrungstatsache steckt im Ausdruck für die Kraftwirkung von beliebigen elektrischen Feldern $\vec{E}(t, \vec{x})$ und Induktionsfeldern $\vec{B}(t, \vec{x})$ auf ein Punktteilchen, das die elektrische Ladung q trägt und sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} relativ zu demjenigen Bezugssystem K bewegt, bezüglich dessen die Felder \vec{E} und \vec{B} definiert sind:

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + f_F \vec{v} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right).$$

Die Konstante f_F ist wie im Faraday'schen Induktionsgesetz definiert.

4.5 Die Kontinuitätsgleichung

Eine weitere, fundamental wichtige Aussage ist die Erhaltung der Ladung: Die elektrische Ladung ist unter allen Wechselwirkungen erhalten. In integraler Form läßt sich dieser Sachverhalt wie folgt formulieren: Eine zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(t, \vec{x})$, die ganz im Endlichen liegt, und eine von den Bewegungen der in ρ enthaltenen Ladungen erzeugte Stromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$ seien vorgegeben. Für jede glatte geschlossene Fläche F und dem von ihr eingeschlossenen Volumen $V(F)$ gilt die Bilanzgleichung

$$\int \int_F d\sigma \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = -\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(F)} d^3x \rho(t, \vec{x}).$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -f_F \frac{d}{dt} \int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}(t, \vec{x})$$

Gauß'sche Gesetze:

$$\int_F d\sigma \vec{D}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = f_G \int_{V(F)} d^3x \rho(t, \vec{x}) = f_G Q_V.$$

$$\int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0.$$

Biot-Savart'sches Gesetz:

$$\vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{f_{BS}}{4\pi} \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\int_F d\sigma \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = -\frac{d}{dt} \int_{V(F)} d^3x \rho(t, \vec{x}).$$

Lorentzkraft:

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + f_F \vec{v} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right).$$

5 Die Maxwell'schen Gleichungen in lokaler Form

5.1 Das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz in integraler Form lautet:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -f_F \frac{d}{dt} \int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}(t, \vec{x})$$

Wir wenden nun den Stoke'schen Satz auf die linke Seite an:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \int_F d\sigma \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) \right) \cdot \hat{n}(t, \vec{x}).$$

Daher

$$\int_F d\sigma \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) \right) \cdot \hat{n}(t, \vec{x}) = -f_F \frac{d}{dt} \int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}(t, \vec{x})$$

Diese Gleichung gilt für jede Fläche F . Wir können die Fläche auch auf einen Punkt zusammenziehen, daher müssen die Integranden gleich sein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -f_F \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x})$$

Zur Erinnerung: Im SI-System ist $f_F = 1$, im Gauß'schen Maßsystem ist $f_F = 1/c$.

5.2 Das Gauß'sche Gesetz

Das Gauß'sche Gesetz für die dielektrische Verschiebung:

$$\int_F d\sigma \vec{D}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = f_G \int_{V(F)} \int \int d^3x \rho(t, \vec{x}).$$

Wir wenden nun den Gauß'schen Satz auf die linke Seite an:

$$\int_F d\sigma \vec{D}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = \int_{V(F)} \int \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}).$$

Somit

$$\int_{V(F)} \int \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = f_G \int_{V(F)} \int \int d^3x \rho(t, \vec{x}).$$

Da das Volumen beliebig ist und seine Oberfläche stetig zusammengezogen werden kann, müssen wieder die Integranden gleich sein.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = f_G \rho(t, \vec{x}).$$

Zur Erinnerung: Die Konstante f_G hat den Wert $f_G = 1$ im SI-System und den Wert $f_G = 4\pi$ im Gauß'schen Maßsystem.

Aus der Integralform des Gauß'schen Gesetzes für das Magnetfeld

$$\int_F d\sigma \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0.$$

folgt analog

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0.$$

5.3 Die Kontinuitätsgleichung

Wir bestimmen zunächst die lokale Form der Kontinuitätsgleichung und wenden uns erst danach dem Gesetz von Biot und Savart zu. Die integrale Form der Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\int_F d\sigma \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = -\frac{d}{dt} \int_{V(F)} d^3x \rho(t, \vec{x}).$$

Wir wenden wieder den Gauß'schen Satz auf die linke Seite an:

$$\int_F d\sigma \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n} = \int_{V(F)} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}).$$

Es folgt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0.$$

5.4 Das Gesetz von Biot und Savart

Die integrale Form des Gesetzes von Biot und Savart lautet:

$$\vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{f_{BS}}{4\pi} \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Zur Erinnerung: Die Konstante f_{BS} hat den Wert $f_{BS} = 1$ im SI-System und den Wert $f_{BS} = 4\pi/c$ im Gauß'schen Maßsystem. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Somit

$$\begin{aligned} \vec{H}(t, \vec{x}) &= -\frac{f_{BS}}{4\pi} \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \times \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= \frac{f_{BS}}{4\pi} \vec{\nabla}_x \times \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \end{aligned}$$

Der Vorzeichenwechsel kommt von der Vertauschung der Reihenfolge im Vektorprodukt. Nun nimmt man auf beiden Seiten die Rotation und benützt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}.$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) &= \frac{f_{BS}}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &\quad - \frac{f_{BS}}{4\pi} \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)\end{aligned}$$

Im ersten Term verwendet man

$$\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Im zweiten Term benutzt man

$$\Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Bemerkung: Die Gleichung $\Delta 1/r = -4\pi\delta(r)$ verifiziert man für $r \neq 0$ durch Differentiation. Es handelt sich hier um zwei Distributionen. Das Verhalten am Ursprung überprüft man durch Integration über eine Testfunktion. Man integriert über eine Kugel mit Radius ε und verwendet den zweiten Green'schen Satz.

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} d^3x f \Delta \frac{1}{r} = \int_{|x| \leq \varepsilon} d^3x \frac{1}{r} \Delta f + \int_{|x| = \varepsilon} d^2\sigma f \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} - \int_{|x| = \varepsilon} d^2\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f.$$

Nun ist $d^2\sigma = r^2 d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, daher verschwinden der erste und der dritte Term im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} d^3x f \Delta \frac{1}{r} = \int_{|x| = \varepsilon} d^2\sigma f \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \int d\Omega f(\varepsilon) \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} \right) = -4\pi f(0).$$

Einsetzen der Hilfsgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) = -\frac{f_{BS}}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int \int \int d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + f_{BS} \vec{j}(t, \vec{x})$$

Mittels einer partiellen Integration erhält man

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{f_{BS}}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int \int \int d^3x' \left(\vec{\nabla}_{x'} \vec{j}(t, \vec{x}') \right) \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + f_{BS} \vec{j}(t, \vec{x})$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_x \int \int \int d^3x' \vec{\nabla}_{x'} \left(\vec{j}(t, \vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) &= \vec{\nabla}_x \int \int_F d\sigma \left(\vec{j}(t, \vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot \hat{n} \\ &= \int \int_F d\sigma \vec{j}(t, \vec{x}') \cdot \hat{n} \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0,\end{aligned}$$

da $\vec{j}(t, \vec{x}')$ ganz im Endlichen liegen soll, und daher (für ein groß genug gewähltes Volumen) auf dessen Oberfläche verschwindet.

Nun verwendet man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0.$$

und erhält

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) = -\frac{f_{BS}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}_x \int \int \int d^3x' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + f_{BS} \vec{j}(t, \vec{x})$$

Nun hat man mit $\rho(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) / f_G$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_x \int \int \int d^3x' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= -\int \int \int d^3x' \rho(t, \vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\frac{1}{f_G} \int \int \int d^3x' \left(\vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}') \right) \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{f_G} \int \int \int d^3x' \vec{D}(t, \vec{x}') \Delta_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\frac{4\pi}{f_G} \vec{D}(t, \vec{x}), \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{f_{BS}}{f_G} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t, \vec{x}) + f_{BS} \vec{j}(t, \vec{x})$$

5.5 Zusammenfassung der Maxwell'schen Gleichungen

Fassen wir die vier Maxwell'schen Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + f_F \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= f_G \rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) - \frac{f_{BS}}{f_G} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t, \vec{x}) &= f_{BS} \vec{j}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + f_F \vec{v} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right).$$

Für die Konstanten f_F , f_G und f_{BS} haben wir im SI-System, bzw. im Gauß'schen System:

	f_F	f_G	f_{BS}
SI	1	1	1
Gauß	$\frac{1}{c}$	4π	$\frac{4\pi}{c}$

	Gauß-System	SI-System	Vergleich
Länge	1 cm	1 m	1 m = 1 · 10 ² cm
Masse	1 g	1 kg	1 kg = 1 · 10 ³ g
Zeit	1 s	1 s	
Kraft	1 dyn	1 N	1 N = 1 · 10 ⁵ dyn
Energie	1 erg	1 J	1 J = 1 · 10 ⁷ erg
Leistung	1 erg/s	1 W	1 W = 1 · 10 ⁷ erg s ⁻¹
Ladung	1 esu	1 C	1 C = 3 · 10 ⁹ esu
Stromstärke	1 esc	1 A	1 A = 3 · 10 ⁹ esc
Potential	1 esv	1 V	1 V = 1/300 esv
Elektrisches Feld	1 esv/cm	1 V/m	1 V m ⁻¹ = 1/30000 esv cm ⁻¹
Magnetisches Feld	1 Oersted (Oe)	1 A/m	1 A m ⁻¹ = 4π · 10 ⁻³ Oe
Magnetische Induktion	1 Gauß (G)	1 Tesla	1 Tesla = 1 · 10 ⁴ Gauß

Bemerkung: In der Elementarteilchenphysik verwendet man oft die sogenannten natürlichen Einheiten, die so gewählt sind, daß

$$c = 1, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.$$

Faktoren von 4π verschwinden, indem sie in die Felder und Quellen ansorbiert werden:

$$\vec{E}|_{\text{nat}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \vec{E}|_{\text{Gauß}}, \quad \rho|_{\text{nat}} = \sqrt{4\pi} \rho|_{\text{Gauß}}.$$

Bemerkung: Die Kontinuitätsgleichung kann aus der lokalen Form der Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet werden. Man betrachte hierzu die Zeitableitung der dritten Gleichung und die Divergenz der vierten Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= 4\pi \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}), \\ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}))}_{=0} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

Daher

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0.$$

Historische Bemerkung: Das Ampère'sche Gesetz für **stationäre Ströme**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) = f_{BS} \vec{j}(t, \vec{x}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0.$$

Die Verallgemeinerung dieser Gleichung auf nicht-stationäre Ströme führt zu einer nicht-konsistenten Theorie. Es fehlt der Verschiebestrom, der die Ladungserhaltung bewirkt.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Die Maxwell'schen Gleichungen im Gauß'schen System:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Im Vakuum haben wir

$$\begin{aligned}\vec{D}(t, \vec{x}) &= \vec{E}(t, \vec{x}), \\ \vec{H}(t, \vec{x}) &= \vec{B}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right).$$

6 Elektromagnetische Potentiale und Eichinvarianz

6.1 Skalare Potentiale und Vektorpotentiale

Aus der Mathematik ist bekannt, daß ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, sich als Gradient einer skalaren Funktion darstellen läßt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \implies \vec{V} = \vec{\nabla} \Phi.$$

Ebenso ist bekannt, daß ein divergenzfreies Vektorfeld sich als die Rotation eines weiteren Vektorfeldes schreiben läßt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \implies \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Bezogen auf die Maxwell'schen Gleichungen führen wir nun zwei Hilfsfelder Φ und \vec{A} , so daß die beiden homogenen Maxwell'schen Gleichungen identisch erfüllt sind. Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

folgt

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}).$$

Das Hilfsfeld $\vec{A}(t, \vec{x})$ nennt man das Vektorpotential. Setzt man den Ausdruck für \vec{B} in die zweite Maxwell'sche Gleichung ein, so erhält man

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}) \right) = 0$$

Somit läßt sich der Ausdruck in der Klammer als Gradient eines skalaren Feldes darstellen:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}).$$

Das Minuszeichen ist Konvention.

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}).$$

$\Phi(t, \vec{x})$ nennt man das skalare Potential. Setzt man diese Ausdrücke in die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}) \right) &= 4\pi \rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}) \right) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

Umschreiben liefert:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) &= -4\pi \rho(t, \vec{x}), \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(t, \vec{x}) - \Delta \vec{A}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) \right) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

6.2 Eichinvarianz

Die Zerlegung

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}), \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

ist nicht eindeutig. Setzt man

$$\vec{A}'(t, \vec{x}) = \vec{A}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \chi(t, \vec{x})$$

und gleichzeitig

$$\Phi'(t, \vec{x}) = \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \vec{x})$$

so ändern sich die physikalischen Felder nicht:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}'(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \chi(t, \vec{x}) \right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{B}(t, \vec{x}),$$

$$\begin{aligned}
-\vec{\nabla}\Phi'(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}'(t,\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\left(\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x})\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x})\right) \\
&= -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) = \vec{E}(t,\vec{x}).
\end{aligned}$$

Eine Transformation des Typs

$$\begin{aligned}
\Phi'(t,\vec{x}) &= \Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x}), \\
\vec{A}'(t,\vec{x}) &= \vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x}),
\end{aligned}$$

heißt Eichtransformation der Potentiale. Eine Eichtransformation läßt das elektrische Feld und das Induktionsfeld unverändert.

Man kann die Eichtransformationen benutzen, um zusätzliche Bedingungen an die Potentiale Φ und \vec{A} zu stellen. Eine übliche Forderung ist zum Beispiel

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}) = 0.$$

Erfüllt das skalare Potential und das Vektorpotential diese Gleichung, so sagt man, daß die Potentiale in der Lorenz-Eichung¹ sind. Man kann beliebige Potentiale Φ und \vec{A} in die Lorenz-Eichung bringen, indem man eine Eichfunktion χ als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\chi(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi'(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}'(t,\vec{x}) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x})\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x})\right) \\
&= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\chi(t,\vec{x}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Lorenz-Bedingung legt die Potentiale noch nicht eindeutig fest, sondern definiert nur eine Klasse von Potentialen. So hat man noch immer die Freiheit, weitere Eichtransformationen mit einer Eichtransformation, die

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\chi(t,\vec{x}) = 0$$

erfüllt, auszuführen. Beweis analog zu oben.

¹Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891); Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

In der Lorenz-Eichung lauten die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \Phi(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}),\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0$$

gilt.

Eine andere Klasse von Eichungen wird durch die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0$$

festgelegt. Diese Eichung nennt man Coulomb-Eichung.

6.3 Partielle inhomogene Differentialgleichungen

Wir betrachten als Beispiel für eine inhomogene Differentialgleichung die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Es sei $f(\vec{x})$ vorgegeben und wir suchen eine Lösung $\Phi(\vec{x})$. Eine Lösung erhält man mit Hilfe der Green'schen Funktion. Diese Lösungsmethode ist allgemein und läßt sich auch auf andere Gleichungen wie die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + \omega^2) \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

oder auf die vierdimensionale Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung

$$\square\Phi(x) = f(x)$$

anwenden. Als Green'sche Funktion bezeichnet man eine Lösung der Differentialgleichung, in der auf der rechten Seite eine Delta-Funktion auftritt. Für die Poisson-Gleichung lautet die zugehörige Differentialgleichung für die Green'sche Funktion

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Multipliziert man beide Seiten mit $f(\vec{x}')$ und integriert man über \vec{x}' so erhält man

$$\int d^3x' \Delta_x (f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')) = f(\vec{x})$$

Δ_x wirkt nur auf die ungestrichenen Größen und kann vor das Integral gezogen werden:

$$\Delta_x \left(\int d^3 x' f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \right) = f(\vec{x})$$

Somit ist

$$\Phi(x) = \int d^3 x' f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')$$

eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Fazit: Ist die Green'sche Funktion bekannt, kann man auch die Lösungen für einen beliebigen inhomogenen Term $f(\vec{x})$ konstruieren.

Bestimmung der Green'schen Funktion: In der letzten Vorlesung wurde verifiziert, daß

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

die Green'sche Funktion der Poisson-Gleichung ist. Nun wollen wir eine allgemeine Methode zur Bestimmung von Green'schen Funktionen betrachten. Wir gehen von der Differentialgleichung für die Green'sche Funktion aus

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

und betrachten die Fouriertransformierten:

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \tilde{G}(\vec{k}),$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \tilde{\delta}(\vec{k}).$$

$\tilde{\delta}(\vec{k})$ ist gegeben durch

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int d^3 x e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 1.$$

Eingesetzt erhält man

$$\Delta_x \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \tilde{G}(\vec{k}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}.$$

Δ_x wirkt nur auf die Exponentialfunktion:

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (-|\vec{k}|^2) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \tilde{G}(\vec{k}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}.$$

Aus der Gleichheit der Integranden folgt

$$\tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{|\vec{k}|^2},$$

und somit

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{x}') &= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}, & \vec{x} - \vec{x}' &= (0, 0, r) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta e^{-ikr\cos\theta}, & u &= -\cos\theta \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 du e^{ikru} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{kr} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\pi}{2r} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Phi(x) = \int d^3x' f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')$$

ist nicht eindeutig, wir können zu dieser Lösung immer eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0$$

addieren.

6.4 Probleme mit Randwertbedingungen

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen zusätzlich Randbedingungen gefordert werden.

Dirichlet-Randbedingungen: Das Potential auf einer geschlossenen Fläche ist vorgegeben. (Beispiel: Elektrische Leiter mit gegebenen Potentialen.)

Neumann-Randbedingungen: Die Normalenableitung $\partial\Phi/\partial\hat{n}$ auf einer geschlossenen Fläche ist vorgegeben. (Beispiel: Vorgegebene Flächenladungen.)

Eindeutigkeit: Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen der Poisson-Gleichung mit vorgegebenen Randbedingungen, d.h.

$$\Phi_1|_F = \Phi_2|_F, \text{ Dirichlet}$$

oder

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \hat{n}} \right|_F = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \hat{n}} \right|_F, \text{ Neumann}$$

Betrachte nun $U = \Phi_2(\vec{x}) - \Phi_1(\vec{x})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta U(\vec{x}) &= 0, \\ U|_F &= 0, \text{ Dirichlet} \\ \left. \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} \right|_F &= 0, \text{ Neumann} \end{aligned}$$

Aus dem ersten Green'schen Satz

$$\int_{V(F)} \int \int d^3x \left(\Phi \Delta \Psi + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi \right) = \int \int_F d\sigma \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}}.$$

folgt mit $\Phi = \Psi = U$:

$$\int_{V(F)} \int \int d^3x \underbrace{\left(\vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U \right)}_{\geq 0} = \int \int_F d\sigma U \frac{\partial U}{\partial \hat{n}}.$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite gleich Null. Daher gilt

$$\int_{V(F)} \int \int d^3x \left(\vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U \right) = 0,$$

und da der Integrand nicht negativ sein kann, folgt

$$\vec{\nabla} U = 0.$$

Daher ist U in V konstant. Für das Dirichlet'sche Randwertproblem gilt $U = 0$ auf F , und da U konstant ist, auch in V . Somit ist die Lösung eindeutig. Für das Neumann'sche Randwertproblem können sich zwei Lösungen um eine additive Konstante unterscheiden.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Potentiale:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}), \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Eichtransformation:

$$\begin{aligned}\Phi'(t, \vec{x}) &= \Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \vec{x}), \\ \vec{A}'(t, \vec{x}) &= \vec{A}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t, \vec{x}),\end{aligned}$$

Lorenz-Eichung:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0.$$

In der Lorenz-Eichung lauten die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \Phi(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right).$$

Frage aus der letzten Vorlesung: Seine Φ und \vec{A} sowie Φ' und \vec{A}' Potentiale, die die gleichen physikalischen Felder beschreiben. Wie hängen diese Potentiale zusammen? Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) &= 0, \\ -\vec{\nabla} (\Phi' - \Phi) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}' - \vec{A}) &= 0.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla}\chi(t, \vec{x}).$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung liefert:

$$\vec{\nabla} \left(\Phi' - \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \vec{x}) \right) = 0,$$

also

$$\Phi' - \Phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \vec{x}) + C(t).$$

7 Die Maxwell'schen Gleichungen in kovarianter Form

7.1 Die Lorentzkraft und der Feldstärketensor

Zur Erinnerung: Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \gamma \left(1, \frac{1}{c} \vec{v} \right).$$

$$ds = \frac{c}{\gamma} dt,$$

Viererbeschleunigung:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$$

Newton's Gesetz $F = ma$ in relativistischer Verallgemeinerung:

$$mc^2 \frac{d}{ds} w^\mu = K^\mu.$$

Kontraktion mit u_μ liefert:

$$mc^2 u_\mu \frac{d}{ds} u^\mu = \frac{1}{2} mc^2 \frac{d}{ds} \underbrace{u^2}_1 = 0,$$

und daher

$$K^\mu u_\mu = 0.$$

Für die räumlichen Komponenten gilt:

$$\vec{K} = \gamma \vec{F}$$

Angewandt auf die Lorentzkraft:

$$mc^2 \frac{d\vec{u}}{ds} = mc^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{v}}{c} \right) = q\gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right).$$

Für die zeitliche Komponente gilt

$$\begin{aligned} u_\mu K^\mu &= \gamma K^0 - \frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{K} = 0, \\ K^0 &= \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{K}, \end{aligned}$$

und daher

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^0 = mc^2 \frac{d}{ds} \gamma = \frac{1}{c} q \gamma \vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Somit:

$$\begin{aligned} mc^2 \frac{d}{ds} (\gamma) &= \gamma q \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c}, \\ mc^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{v}}{c} \right) &= \gamma q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \end{aligned}$$

Die linke Seite lautet kovariant geschrieben

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu$$

Setzt man nun

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

so ist

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} u_\nu &= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \frac{v^x}{c} \\ -\gamma \frac{v^y}{c} \\ -\gamma \frac{v^z}{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \\ \gamma E^x + \frac{\gamma}{c} (v^y B^z - v^z B^y) \\ \gamma E^y + \frac{\gamma}{c} (v^z B^x - v^x B^z) \\ \gamma E^z + \frac{\gamma}{c} (v^x B^y - v^y B^x) \end{pmatrix} = \gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \end{aligned}$$

Daher kann man schreiben

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

Die linke Seite transformiert sich wie ein kontravarianter Vektor unter der Lorentzgruppe, u_ν transformiert wie ein kovarianter Vektor, daher muß sich $F^{\mu\nu}$ wie ein Tensor zweiter Stufe transformieren:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

$F^{\mu\nu}$ nennt man den Feldstärketensor. Die elektrischen und magnetischen Felder erhält man aus $F^{\mu\nu}$ durch

$$E^i = F^{i0} = -F^{0i},$$

$$B^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} F^{jk}.$$

Bemerkung: $F^{\mu\nu}$ ist anti-symmetrisch:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

7.2 Die Kontinuitätsgleichung und die Viererstromdichte

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0.$$

Sie gilt in jedem Koordinatensystem. Sie läßt sich mit

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

auch als

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Nun ist $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$ ein kovarianter Vierervektor und $\partial_\mu j^\mu$ ein Skalar. Daher transformiert sich j^μ wie ein kontravarianter Vierervektor.

7.3 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die homogenen Maxwell'schen Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) = 0.$$

Wir betrachten

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Setzen wir $\lambda = 1, \mu = 2$ und $\nu = 3$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x}(-B^x) - \frac{\partial}{\partial y}(-B^y) - \frac{\partial}{\partial z}(-B^z) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Maxwell'sche Gleichung. Jede Permutation von $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3)$ liefert diese Gleichung. Sei nun $\lambda = 0, \mu = 1$ und $\nu = 2$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(-B^z) - \frac{\partial}{\partial x} E^y - \frac{\partial}{\partial y}(-E^x) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} E^y - \frac{\partial}{\partial y} E^x + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B^z &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist die z -Komponente der zweiten Maxwell'schen Gleichung. Die x - sowie die y -Komponente erhalten wir für $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 2, 3)$ bzw. $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 3, 1)$. Somit lassen sich die ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen zu

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

zusammenfassen. Mit Hilfe des anti-symmetrischen Tensors $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ und wegen der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ kann dies auch als

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$$

geschrieben werden.

Die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Für $\nu = 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= 4\pi\rho, \\ \frac{\partial}{\partial x} E^x + \frac{\partial}{\partial y} E^y + \frac{\partial}{\partial z} E^z &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned}$$

Dies ist die dritte Maxwell'sche Gleichung.

Für $\nu = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \frac{4\pi}{c} j^x, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(-E^x) + \frac{\partial}{\partial y} B^z + \frac{\partial}{\partial z}(-B^y) &= \frac{4\pi}{c} j^x, \\ \frac{\partial}{\partial y} B^z - \frac{\partial}{\partial z} B^y - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^x &= \frac{4\pi}{c} j^x.\end{aligned}$$

Dies ist die x -Komponente der vierten Maxwell'schen Gleichung. Die y - bzw. z -Komponente erhalten wir für $\nu = 2$ bzw. $\nu = 3$. Somit ist gezeigt, daß sich die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

zusammenfassen lassen.

7.4 Viererpotential

Es wurde schon gezeigt, daß sich die homogenen Maxwell'schen Gleichungen durch die Einführung eines skalaren Potentials Φ und eines Vektorpotentials \vec{A} identisch erfüllen lassen. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^x \\ -\frac{\partial}{\partial y}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^y \\ -\frac{\partial}{\partial z}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^z \end{pmatrix}, \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A^z - \frac{\partial}{\partial z} A^y \\ \frac{\partial}{\partial z} A^x - \frac{\partial}{\partial x} A^z \\ \frac{\partial}{\partial x} A^y - \frac{\partial}{\partial y} A^x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Viererpotential

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

und berechnen

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Zur Erinnerung:

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^x + \frac{\partial}{\partial x} \Phi & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^y + \frac{\partial}{\partial y} \Phi & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^z + \frac{\partial}{\partial z} \Phi \\ -\frac{\partial}{\partial x} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^x & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} A^y + \frac{\partial}{\partial y} A^x & -\frac{\partial}{\partial x} A^z + \frac{\partial}{\partial z} A^x \\ -\frac{\partial}{\partial y} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^y & -\frac{\partial}{\partial y} A^x + \frac{\partial}{\partial x} A^y & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} A^z + \frac{\partial}{\partial z} A^y \\ -\frac{\partial}{\partial z} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^z & -\frac{\partial}{\partial z} A^y + \frac{\partial}{\partial y} A^x & -\frac{\partial}{\partial z} A^x + \frac{\partial}{\partial x} A^z & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} = F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, daß sich der Feldstärketensor durch

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

darstellen läßt.

Bemerkung: Die homogenen Maxwell'schen Gleichungen sind identisch erfüllt:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \underbrace{\partial^\nu \partial^\rho}_{\text{symmetrisch}} A^\sigma = 0.$$

Einsetzen in die inhomogenen Gleichungen liefert

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Die Bedingung für die Lorenz-Eichung lautete

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Dies läßt sich kovariant als

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

schreiben, und gilt daher, wenn sie in einem Bezugssystem gültig ist, auch in allen anderen. Die Lorenz-Eichung ist eine kovariante Eichung.

Bemerkung: Die Wahl einer Eichung muß nicht notwendiger Weise kovariant sein. Ein Gegenbeispiel ist die Coulomb-Eichung, die in einem Koordinatensystem K durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

definiert ist. In einem zu K bewegten Bezugssystem K' gilt im allgemeinen

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}' \neq 0$$

In der Lorenz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu$) lauten die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

7.5 Zusammenfassung der kovarianten Formulierung

Definition des Feldstärketensors:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell'sche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu, \end{aligned}$$

wobei $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$.

Lorentz-Kraft:

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

Vierer-Potential:

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen:

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Lorenz-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen in der Lorenz-Eichung:

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Definition des Feldstärketensors:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell'sche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu, \end{aligned}$$

wobei $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$.

Lorentz-Kraft:

$$\begin{aligned} mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu &= q F^{\mu\nu} u_\nu, \\ \vec{F}(t, \vec{x}) &= q \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right), \end{aligned}$$

Vierer-Potential:

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\Phi, \vec{A}) \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \end{aligned}$$

Lorenz-Eichung²:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen in der Lorenz-Eichung:

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

8 Das Wirkungsprinzip

8.1 Die Lagrangedichte für die Wechselwirkung zwischen Teilchen und elektromagnetischen Feldern

Zur Erinnerung: Die Wirkung eines freien relativistischen Teilchens:

$$S_{\text{Teilchen}} = -mc \int_a^b ds$$

²Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891); Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

Für die Wechselwirkung zwischen einem Teilchen und dem elektromagnetischen Feld setzen wir

$$S_{WW} = -\frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x).$$

Für ein Teilchen müssen wir

$$S_{\text{Teilchen}} + S_{WW} = -mc \int_a^b ds - \frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x)$$

betrachten. Variation der Koordinaten:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$$

Variationsprinzip:

$$\delta(S_{\text{Teilchen}} + S_{WW}) = 0.$$

Zur Erinnerung

$$\delta ds = u_\nu d\delta x^\nu$$

Des weiteren ist

$$\delta(A_\mu dx^\mu) = A_\mu d\delta x^\mu + (\delta A_\mu) dx^\mu$$

und

$$\delta A_\mu = A_\mu(x + \delta x) - A_\mu(x) = (\partial_\nu A_\mu) \delta x^\nu.$$

Somit

$$\begin{aligned} \delta(S_{\text{Teilchen}} + S_{WW}) &= -mc \int_a^b \delta ds - \frac{q}{c} \int_a^b \delta(dx^\mu A_\mu(x)) \\ &= -mc \int_a^b u_\nu d\delta x^\nu - \frac{q}{c} \int_a^b A_\mu d\delta x^\mu - \frac{q}{c} \int_a^b (\delta A_\mu) dx^\mu \\ &= mc \int_a^b \left(\frac{d}{ds} u_\nu \right) \delta x^\nu ds - \frac{q}{c} \int_a^b A_\mu d\delta x^\mu - \frac{q}{c} \int_a^b (\partial_\nu A_\mu) dx^\mu \delta x^\nu \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_a^b (\partial_\nu A_\mu) dx^\mu \delta x^\nu = \int_a^b (\partial_\nu A_\mu) u^\mu \delta x^\nu ds,$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b A_\mu d\delta x^\mu &= \int_a^b A_\mu \frac{d}{ds} \delta x^\mu ds = - \int_a^b \left(\frac{d}{ds} A_\mu \right) \delta x^\mu ds = - \int_a^b \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{ds} \delta x^\mu ds \\
&= - \int_a^b \partial_\nu A_\mu u^\nu \delta x^\mu ds = - \int_a^b \partial_\mu A_\nu u^\mu \delta x^\nu ds
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\delta(S_{\text{Teilchen}} + S_{WW}) &= \int_a^b \left(mc \frac{d}{ds} u_\nu + \frac{q}{c} \partial_\mu A_\nu u^\mu - \frac{q}{c} \partial_\nu A_\mu u^\mu \right) \delta x^\nu ds \\
&= \int_a^b \left(mc \frac{d}{ds} u_\nu + \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\mu \right) \delta x^\nu ds
\end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$mc \frac{d}{ds} u_\nu + \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\mu = 0,$$

und daher

$$mc^2 \frac{d}{ds} u_\mu = q F_{\mu\nu} u^\nu.$$

Bemerkung:

$$S_{WW} = -\frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x) = -q \int_a^b dt \frac{1}{\gamma} u^\mu A_\mu.$$

Die Lagrangefunktion lautet

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_a}^{t_b} dt L, \\
L &= -mc^2 \frac{1}{\gamma} - \frac{q}{\gamma} u^\mu A_\mu = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\Phi + \frac{q}{c} \vec{v} \vec{A}.
\end{aligned}$$

Verallgemeinerter Impuls:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\Phi = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} + q\Phi.$$

Daher

$$H - q\Phi = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2}$$

Ersetzungsregeln (“Minimale Substitution”):

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H - q\Phi, \\ \vec{P} &\rightarrow \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}. \end{aligned}$$

8.2 Felder als dynamische Variablen

Wir betrachten nun ein System bestehend aus Teilchen und Feldern. In der klassischen Mechanik sind die Felder nur (vorgegebene) Hilfsgrößen.

In der relativistischen Mechanik breitet sich die Wirkung mit einer endlichen Geschwindigkeit aus. Daher ändern sich Felder auch nicht instantan, sondern Änderungen breiten sich mit einer endlichen Signalgeschwindigkeit aus. Daher sind auch Felder als dynamische Variablen zu betrachten.

Das Hamilton’sche Prinzip der kleinsten Wirkung läßt sich auch auf Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden verallgemeinern.

Argumentation:

- Eine verallgemeinerte Koordinate q ;
- Abzählbar viele Koordinaten q_i ; Beispiel: Modell eines elastischen Stabes: Massepunkte der Masse m im Abstand a , durch masselose Federn mit der Federkonstante k verbunden.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m \dot{q}_i^2, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_i k (q_{i+1} - q_i)^2. \end{aligned}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i \left(m \dot{q}_i^2 - k (q_{i+1} - q_i)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i a \left(\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right)$$

- Überabzählbar viele Koordinaten q_x , hier schreibt man dann oft $q(x)$; Im obigen Beispiel geht im Grenzfall $a \rightarrow 0$ das Verhältnis m/a über in μ (Masse pro Längeneinheit), ka geht über in das Young’sche Modul Y , welches die Beziehung zwischen Kraft und Ausdehnung pro Längeneinheit beschreibt:

$$F = Y\xi.$$

Weiter gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{q_{i+1} - q_i}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x+a) - q(x)}{a} = \frac{dq(x)}{dx}$$

Für die Lagrangefunktion erhält man

Die Summation in der Lagrangefunktion geht über in ein Integral:

$$L = \frac{1}{2} \int dx \left(\mu \dot{q}^2 - Y \left(\frac{dq(x)}{dx} \right)^2 \right)$$

Den Ausdruck

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\mu \dot{q}^2 - Y \left(\frac{dq(x)}{dx} \right)^2 \right)$$

nennt man Lagrangedichte. Die Wirkung ist gegeben durch

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}.$$

Wir betrachten nun die Verallgemeinerung auf einen vier-dimensionalen Raum. Die Lagrangedichte soll von den Raumzeitkoordinaten x , dem Feld $\psi(x)$ und dessen Ableitung $\partial_\mu \psi(x)$, sowie von äußeren Quellen $j(x)$ abhängen.

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x), j(x), x)$$

Die Wirkung ist gegeben als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int d^3x \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}$$

Das Wirkungsprinzip lautet

$$\delta S = 0,$$

wobei die Variation der Felder $\delta\psi$ auf den Hyperflächen t_1 und t_2 verschwinden soll. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich wie in der klassischen Mechanik herleiten:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi(x))} \delta(\partial_\mu \psi(x)) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi(x))} \partial_\mu (\delta\psi(x)) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi(x))} \right] \delta\psi \end{aligned}$$

Somit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi(x))} = 0.$$

8.3 Die Lagrangedichte der Elektrodynamik

Für die Wirkung der Elektrodynamik machen wir den Ansatz, daß sie aus einem Term, der “freie” Felder beschreibt und einem Term, der die Wechselwirkung mit der Materie beschreiben soll, besteht.

$$S = S_{Felder} + S_{WW}$$

Für die Konstruktion von S_{WW} können wir den Ausdruck für eine Punktladung auf allgemeine Ladungsverteilungen verallgemeinern:

$$S_{WW, \text{Punktladung}} = -\frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x).$$

Die Ladungs- und die Stromdichte einer Punktladung mit Bahnkurve $\vec{x}'(t)$ sind:

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= q \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'(t)), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= q \vec{v}(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'(t)). \end{aligned}$$

Somit ist

$$j^\mu(x) = (c\rho, \vec{j}) = qc \int ds u^\mu \delta^4(x - x'(s))$$

$$\begin{aligned} S_{WW} &= -\sum_i \frac{q_i}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x) \\ &\rightarrow -\frac{1}{c^2} \int d^3x c\rho(x) \int ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu(x) = -\frac{1}{c^2} \int d^4x c\rho(x) \underbrace{\frac{dx^\mu}{ds}}_{j^\mu(x)} A_\mu(x) \end{aligned}$$

Für die Konstruktion von S_{Felder} sollen die folgenden Forderungen erfüllt sein:

- Lorentz-Invarianz.
- Superpositionprinzip, d.h. das Ziel sind lineare Differentialgleichungen. Daher sollte der Integrand von S_{Felder} quadratisch in den Feldkomponenten sein
- Physikalisch eindeutig, d.h. eichinvariant. Daher sollte der Integrand durch $F_{\mu\nu}$ und nicht durch A_μ gegeben sein.

Der einfachste Ansatz ist

$$S_{Felder} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Betrachten wir also nun

$$S_{Felder} + S_{WW} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x)$$

Mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ erhalten wir

$$S_{Felder} + S_{WW} = \int d^4x \left[-\frac{1}{8\pi c} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{8\pi c} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c^2} j^\mu(x) A_\mu(x) \right]$$

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0.$$

Somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} j^\nu(x) + \frac{1}{4\pi} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{4\pi} \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu) &= 0, \\ \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{c} j^\nu(x), \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu(x). \end{aligned}$$

8.4 Zusammenfassung der Lagrangedichtenformulierung

Beschreibung des Systems von Teilchen und elektromagnetischen Feldern durch

$$S = S_{Teilchen} + S_{Felder} + S_{WW},$$

mit

$$\begin{aligned} S_{Teilchen} &= -mc \int_a^b ds, \\ S_{Felder} &= -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ S_{WW} &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned}$$

Für eine Punktladung gilt

$$j^\mu(x) = qc \int ds u^\mu(s) \delta^4(x - x'(s))$$

und der Wechselwirkungsterm reduziert sich auf

$$S_{WW} = -\frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x).$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Beschreibung des Systems von Teilchen und elektromagnetischen Feldern durch

$$S = S_{\text{Teilchen}} + S_{\text{Felder}} + S_{\text{WW}},$$

mit

$$\begin{aligned} S_{\text{Teilchen}} &= -mc \int_a^b ds, \\ S_{\text{Felder}} &= -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ S_{\text{WW}} &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned}$$

Für eine Punktladung gilt

$$j^\mu(x) = qc \int ds u^\mu(s) \delta^4(x - x'(s))$$

und der Wechselwirkungsterm reduziert sich auf

$$S_{\text{WW}} = -\frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x).$$

Hamilton-Funktion eines Teilchens im elektro-magnetische Feld:

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\Phi = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} + q\Phi.$$

Allgemeine Feldtheorie:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi(x))} = 0.$$

9 Erhaltungssätze

9.1 Die Hamilton-Funktion

In der letzten Vorlesung hatten wir eine allgemeine Lagrangedichte einer Feldtheorie

$$\mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), j(x), x)$$

betrachtet. In Analogie zur klassischen Mechanik, wo der kanonisch konjugierte Impuls als

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

definiert ist, definiert man das zum Feld $\psi(x)$ kanonisch konjugierte Impulsfeld $\pi(x)$ als

$$\pi(x) = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi(x))}$$

Die Hamiltondichte definiert man als Legendre-Transformation

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c} \pi(x) \partial_0 \psi(x) - \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x), j(x), x)$$

Beispiel 1:

$$\frac{1}{\hbar c} \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \mu^2 \phi^2(x)] - \rho(x) \phi(x).$$

Es ist

$$\pi(x) = c \partial_0 \phi(x)$$

und

$$\frac{1}{\hbar c} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\pi^2(x) + \left(\vec{\nabla} \phi(x) \right)^2 + \mu^2 \phi^2(x) \right] + \rho(x) \phi(x).$$

Bemerkung: Die Hamiltondichte ist nicht manifest Lorentz-invariant.

Beispiel 2: Die Lagrangedichte für die elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) &= -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x) \\ &= -\frac{1}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned}$$

Es ist

$$\pi^\mu(x) = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\frac{c}{4\pi} \partial^0 A^\mu + \frac{c}{4\pi} \partial^\mu A^0 = -\frac{c}{4\pi} F^{0\mu}.$$

Und daher

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0, \\ \pi^i &= \frac{c}{4\pi} E^i(x). \end{aligned}$$

Die Hamiltondichte ergibt sich zu

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c} \pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} = -\frac{1}{c} \pi^i \partial_0 A^i - \mathcal{L}.$$

Nebenrechnung: Aus

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{x}).$$

folgt

$$\partial_0 \vec{A} = \frac{\partial}{c \partial t} \vec{A} = -\vec{E} - \vec{\nabla}\Phi.$$

Nebenrechnung 2:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x) = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x)$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{c} \pi^i \partial_0 A^i - \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \left(\vec{E} + \vec{\nabla}\Phi \right) - \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x) + \frac{1}{4\pi} \vec{E} \vec{\nabla}\Phi \end{aligned}$$

Man nennt

$$\frac{1}{8\pi} \vec{E}^2$$

die Energiedichte des elektrischen Feldes, und

$$\frac{1}{8\pi} \vec{B}^2$$

die Energiedichte des magnetische Feldes. Mittels partieller Integration erhält man für den letzten Term

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \int \int d^3x \vec{E} \vec{\nabla}\Phi &= -\frac{1}{4\pi} \int \int \int d^3x \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) \Phi \\ &= -\int \int \int d^3x \rho \Phi. \end{aligned}$$

und somit

$$H = \int \int \int d^3x \left[\frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) - \frac{1}{c} \vec{j}(x) \vec{A}(x) \right].$$

Bemerkung: Die Tatsache, daß $\pi^0 = 0$ wird in der Quantenelektrodynamik noch eine Rolle spielen, da man nicht naiv die Kommutationsrelation

$$[\pi^0(x), A^0(y)] = i\hbar \delta^3(x-y)$$

fordern kann.

9.2 Noether'sche Erhaltungsgrößen

Wir betrachten das Funktional

$$I[\psi] = \int_{\Sigma} d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_{\mu}\psi(x))$$

Wir betrachten zunächst eine Transformation, die \mathcal{L} strikt invariant läßt. Diese Transformation sei gegeben durch

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = h^{\alpha}(\psi(x)),$$

mit

$$h^0(\psi(x)) = \psi(x).$$

Für α nahe bei Null gilt

$$\delta\psi = \psi' - \psi = \alpha \left. \frac{d}{d\alpha} h^{\alpha}(\psi(x)) \right|_{\alpha=0}.$$

Für die Variation der Lagrangedichte ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \partial_{\mu}\delta\psi \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \delta\psi \right) - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \right) \delta\psi \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \right] \delta\psi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \delta\psi \right) \end{aligned}$$

Falls ψ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist, so verschwindet der erste Term. Ist die Lagrangedichte invariant unter der Transformation h^{α} , so folgt, daß auch der zweite Term verschwindet, also

$$\partial_{\mu} J^{\mu}(x) = 0,$$

wobei der erhaltene Strom durch

$$J^{\mu}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \delta\psi$$

gegeben ist.

Wir können das Noethertheorem auf Transformationen erweitern, die die Lagrangedichte bis auf Eichterme invariant lassen, d.h. Situationen in denen

$$\mathcal{L}(A'_{\mu}, \partial_{\mu}A'_{\nu}) = \mathcal{L}(A_{\mu}, \partial_{\mu}A_{\nu}) + \frac{1}{c} j^{\mu}(x) \partial_{\mu}\Lambda(x)$$

anstelle von

$$\mathcal{L}(A'_\mu, \partial_\mu A'_\nu) = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$$

gilt. Falls $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt, kann man $j^\mu(x)\partial_\mu\Lambda(x)$ durch

$$\partial_\mu(j^\mu(x)\Lambda(x))$$

ersetzen. Der Zusatzterm ist dann eine Divergenz und gibt im Wirkungsintegral nur einen Oberflächenterm. Da dort die Variation der Felder verschwinden soll, ändert er nichts.

9.3 Translationsinvarianz und der Energie-Impuls-Tensor

Wir betrachten wieder die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)),$$

die nicht explizit von x abhängt. Unter Translationen

$$x^{\mu'} \rightarrow x^\mu + \alpha c^\mu,$$

gilt

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x + \alpha c) = \psi(x) + \delta\psi(x),$$

$$\delta\psi = \psi' - \psi = \alpha \left. \frac{d}{d\alpha} \psi(x + \alpha c) \right|_{\alpha=0} = \alpha c_\mu \partial^\mu \psi(x).$$

Es gilt weiter

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial_\mu\psi'(x')) - \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)) = \alpha c_\mu \partial^\mu \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\nu\psi(x))$$

Somit ist

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta\psi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \alpha c_\mu \partial^\mu \psi(x) \right)$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \alpha c_\nu \partial^\nu \mathcal{L} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \alpha c_\nu \partial^\nu \psi(x) \right) &= 0, \\ \alpha c_\nu \left[g^{\nu\mu} \partial_\mu \mathcal{L} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \partial^\nu \psi(x) \right) \right] &= 0, \\ \alpha c_\nu \partial_\mu \left[g^{\nu\mu} \mathcal{L} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \partial^\nu \psi(x) \right) \right] &= 0, \end{aligned}$$

Man nennt das Tensorfeld

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \partial^\nu \Psi(x) \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

den kanonischen Energie-Impuls-Tensor. $T^{\mu\nu}$ erfüllt die vier Erhaltungssätze

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Bemerkung: Treten mehrere Felder $\Psi^{(i)}$ auf, so wird über alle Felder summiert:

$$T^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^{(i)})} \partial^\nu \Psi^{(i)}(x) \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Bemerkung: Addiert man zu $T^{\mu\nu}$ einen Term

$$\partial_\rho B^{\mu\rho\nu},$$

wobei $B^{\mu\rho\nu}$ antisymmetrisch in μ und ρ ist,

$$B^{\rho\mu\nu} = -B^{\mu\rho\nu},$$

so gilt ebenfalls

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\mu\rho\nu}) = 0.$$

Der kanonische Energie-Impuls-Tensor gibt also noch keine eindeutige Erhaltungsgröße. Zur Eindeutigkeit betrachten wir den Drehimpuls. Vorbemerkung: Die relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$$

ist durch

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu)$$

gegeben. An $T^{\mu\nu}$ stellt man nun die Zusatzforderung, daß mit der Definition der Drehimpulsdichte

$$M^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$$

gilt:

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0.$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} \partial_\mu M^{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) = (\partial_\mu T^{\mu\nu}) x^\rho + T^{\rho\nu} - (\partial_\mu T^{\mu\rho}) x^\nu - T^{\nu\rho} \\ &= T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho} = 0. \end{aligned}$$

Also

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu},$$

d.h. der Energie-Impuls-Tensor muß symmetrisch sein.

9.4 Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

Wir betrachten das elektromagnetische Feld ohne äußere Quellen:

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\tau)} \partial^\nu A_\tau \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4\pi} (\partial^\mu A^\tau) (\partial^\nu A_\tau) + \frac{1}{4\pi} (\partial^\tau A^\nu) (\partial^\nu A_\tau) + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x) F_\tau^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\tau} \partial_\tau A^\nu. \end{aligned}$$

Nun ist allerdings, da wir keine äußeren Quellen betrachten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

und daher

$$-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\tau} \partial_\tau A^\nu = -\frac{1}{4\pi} \partial_\tau (F^{\mu\tau} A^\nu).$$

Dieser Term stellt also einen Oberflächenterm dar. Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes lautet:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x) F_\tau^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right].$$

Für die expliziten Einträge erhält man

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = u(t, \vec{x}), \\ T^{i0} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})^i = \frac{1}{c} S^i(t, \vec{x}), \\ T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}^i \vec{E}^j + \vec{B}^i \vec{B}^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right]. \end{aligned}$$

$u(t, \vec{x})$ die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Den Vektor \vec{S} bezeichnet man als Poynting'scher Vektor. Er beschreibt die Impulsdichte bzw. die Flußdichte der Energie. Die rein räumlichen Komponenten bezeichnet man als Maxwell'scher Spannungstensor.

Nun betrachten wir zusätzlich äußere Quellen:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$$

Wir behalten die Definition des Energie-Impuls-Tensors bei

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x) F_{\tau}^{\nu}(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right].$$

Für dessen Divergenz finden wir nun

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial^{\mu} (F_{\mu\tau} F^{\tau\nu}) + \frac{1}{4} \partial^{\nu} (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[(\partial^{\mu} F_{\mu\tau}) F^{\tau\nu} + F_{\mu\tau} \partial^{\mu} F^{\tau\nu} + \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} \partial^{\nu} F^{\rho\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{c} j_{\tau} F^{\tau\nu} + \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\tau} \partial^{\mu} F^{\tau\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\tau} \partial^{\nu} F^{\mu\tau} \right] \\ &= -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_{\mu} + \frac{1}{8\pi} F_{\mu\tau} [\partial^{\mu} F^{\tau\nu} - \partial^{\tau} F^{\nu\mu}] \\ &= -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_{\mu} + \frac{1}{8\pi} F_{\mu\tau} [\partial^{\mu} F^{\tau\nu} + \partial^{\tau} F^{\mu\nu}] \\ &= -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_{\mu}. \end{aligned}$$

Ausgeschrieben für die zeitliche Komponente erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \vec{S} \right) &= -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} &= 0. \end{aligned}$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Noethertheorem: Symmetrietransformationen führen zu erhaltenen Strömen.

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \delta \Psi$$

Energie-Impuls-Tensors des elektro-magnetischen Feldes:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x) F_\tau^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right].$$

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = u(t, \vec{x}),$$

$$T^{i0} = +\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})^i = \frac{1}{c} S^i(t, \vec{x}),$$

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}^i \vec{E}^j + \vec{B}^i \vec{B}^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right].$$

10 Formulierung der Maxwell'schen Theorie mittels Differentialgeometrie

Zur Erinnerung: Wir hatten bisher das freie elektromagnetische Feld durch die Wirkung

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

beschrieben. Die Lagrangedichte ist eichinvariant unter den Transformationen

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x).$$

Wir möchten dies nun in einen Zusammenhang mit der Differentialgeometrie stellen.

Weiterführende Literatur:

- F. Scheck, Theoretische Physik 3 (Klassische Feldtheorie), Springer
- O. Forster, Analysis 3, Vieweg, (für Differentialformen)
- M. Schottenloher, Geometrie und Symmetrie in der Physik, Vieweg,
- M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Institute of Physics

10.1 Mannigfaltigkeiten

M ist eine n -dimensionale differentierbare Mannigfaltigkeit falls

- M ein topologischer Raum ist,
- und es eine Familie offener Mengen $\{U_i\}$ mit zugehörigen Abbildungen φ_i gibt, so daß

$$\cup U_i = M$$

und φ_i ein Homeomorphismus von U_i in eine offene Menge $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

- und falls $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ist die Abbildung $\varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ von $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ nach $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ beliebig oft differenzierbar.

Das Paar (U_i, φ_i) bezeichnet man als Karte, während die Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}$ als Atlas bezeichnet wird.

Bemerkung: M schaut lokal wie der \mathbb{R}^n aus, doch gilt dies nicht global.

Homeomorphismus: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist ein Homeomorphismus, falls sie stetig ist und ein Inverses $f^{-1} : Y \rightarrow X$ besitzt, welches ebenfalls stetig ist.

Diffeomorphismus: Homeomorphismus und C^∞ .

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung.

$$\left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t_0} \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet man als Tangentialvektor an M im Punkte $\gamma(t_0)$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an M im Punkte p wird mit $T_p M$ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $T_p^* M$ den dualen Vektorraum von $T_p M$, d.h. die Menge aller Linearformen

$$\phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Elemente von $\phi \in T_p^* M$ heißen auch Kotangentialvektoren.

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

X ordnet jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $X(p) \in \mathbb{R}^n$ zu.

10.2 Differentialformen

Eine Differentialform erster Ordnung ist eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \bigcup_p T_p^*M$$

mit $\omega(p) \in T_p^*M$. Die Differentialform ω ordnet also jedem Punkt $p \in M$ einen Kotangentialvektor $\omega(p) \in T_p^*M$ zu. Wir bezeichnen den Wert von $\omega(p)$ auf dem Tangentialvektor $v \in T_pM$ mit

$$\langle \omega(p), v \rangle$$

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Unter dem totalen Differential df von f versteht man

$$\langle df(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} v_i.$$

Koordinatendarstellung: Jede Differentialform erster Ordnung läßt sich schreiben als

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i.$$

Kurvenintegrale: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve. Dann wird das Integral von ω über γ definiert als

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Dachprodukt von Linearformen: Seien $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$ Linearformen. Dann wird die Abbildung

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \omega_1, v_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \omega_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \omega_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung von Differentialformen k -ter Ordnung:

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Zurückziehen von Differentialformen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

eine k -Form in U . Weiter sei eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V \rightarrow U$$

vorgegeben. Dann definiert man eine k -Form $\varphi^*\omega$ in V durch

$$\varphi^*\omega = \frac{1}{k!} \sum (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Bemerkung: k -Formen können über k -dimensionale (Unter)-Mannigfaltigkeiten integriert werden.

Beispiel:

$$A = i \frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) dx^\mu,$$

definiert eine Eins-Form. Es ist außerdem

$$\begin{aligned} dA &= d \left(i \frac{e}{\hbar c} A_\nu dx^\nu \right) = i \frac{e}{\hbar c} \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned}$$

Daher ist es naheliegend die Feldstärkezweifform als

$$F = dA = i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

zu definieren.

Bemerkung zu den Vorfaktoren: Wir betrachten den folgenden Differentialoperator:

$$D_A = d + A = d + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu = -\frac{i}{\hbar} \left(i\hbar d - \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right).$$

Nun entspricht $i\hbar\partial_\mu$ in der Quantenmechanik dem Impulsoperator p_μ , so daß in der Klammer die Verallgemeinerung des Terms

$$\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)$$

steht.

Wir berechnen noch $D_A \wedge D_A$ auf eine beliebige Form ω angewandt:

$$\begin{aligned} (D_A \circ D_A) \omega &= \left(d + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu \right) \circ \left(d + i \frac{e}{\hbar c} A_\nu dx^\nu \right) \omega \\ &= d \left(i \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu \wedge \omega \right) + i \frac{e}{\hbar c} A_\nu dx^\nu \wedge d\omega - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \omega \\ &= (dA) \wedge \omega \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} D_A &= d + A, \\ D_A^2 &= dA + A \wedge A = dA = F. \end{aligned}$$

D_A bezeichnet man als kovariante Ableitung, F als Krümmungsform.

10.3 Hodge-Theorie

Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Falls M eine Metrik besitzt, gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen dem Raum aller r -Formen und dem Raum aller $(m-r)$ -Formen, der durch die Hodge-Operation $*$ gegeben ist.

$$* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M)$$

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}$$

Bemerkung:

$$**\omega = (-1)^{r(m-r)+1} \omega$$

Mittels der Hodge-Operation kann man ein Skalarprodukt zwischen zwei r -Formen definieren. Sei

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r},$$

$$\eta = \frac{1}{r!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r},$$

dann ist

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge *\eta$$

$$= \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

Dieses Produkt ist symmetrisch:

$$(\omega, \eta) = (\eta, \omega)$$

Beispiel:

$$*F = * \left(i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) = \frac{1}{4} i \frac{e}{\hbar c} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma = \left(i \frac{e}{\hbar c} \right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Wir haben weiter

$$(F, F) = \frac{1}{2} \left(i \frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

und daher

$$\int d^4x \mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\hbar c}{e} \right)^2 (F, F).$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesungen

Die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Die Maxwell'sche Gleichungen in kovarianter Form:

$$\begin{aligned}\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu,\end{aligned}$$

Wirkung:

$$S_{Felder} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Formulierung mittels Differentialformen:

$$\begin{aligned}A &= i \frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) dx^\mu, \\ F &= dA = i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.\end{aligned}$$

$$S_{Felder} = \frac{1}{8\pi c} \left(\frac{\hbar c}{e} \right)^2 (F, F) = \frac{1}{8\pi c} \left(\frac{\hbar c}{e} \right)^2 \int F \wedge *F.$$

11 Elektrostatik

Für zeitunabhängige Probleme zerfallen die Maxwell'schen Gleichungen in zwei unabhängige Teile. Die Gleichungen für das statische elektrische Feld:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= 4\pi\rho(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Die Gleichungen für das statische magnetische Feld:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Bemerkung: Offensichtlich ist es für zeitunabhängige Phänomene sinnvoller, nicht die kovariante Form zu verwenden.

Ein typisches Problem der Elektrostatik ist, das elektrische Feld aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung zu berechnen.

Wie bereits bekannt, läßt sich das elektrische Feld im statischen Fall als der Gradient eines skalaren Potentials schreiben:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}).$$

Einsetzen in die inhomogenen Maxwell'sche Gleichung liefert:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}).$$

Diese Gleichung nennt man die Poisson-Gleichung. Allgemein erhält man die Lösung mit Hilfe der Green'schen Funktionen. Für die Poisson-Gleichung lautet die zugehörige Differentialgleichung für die Green'sche Funktion

$$\Delta_{\vec{x}}G(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x}-\vec{x}').$$

Die Green'sche Funktion ist gegeben durch

$$G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Eine Lösung der Poisson-Gleichung ist somit

$$\Phi(x) = -4\pi \int d^3x' \rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}') = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Bemerkung: Die Lösung der Poisson-Gleichung ist nicht eindeutig, wir können zu dieser Lösung immer eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0$$

addieren. Diese homogene Gleichung nennt man die Laplace-Gleichung.

Für ein System von Punktladungen ist

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$$

und somit

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|}$$

11.1 Multipolentwicklung

Problemstellung: Beschreibung des Feldes einer gegebenen Ladungsverteilung in großen Entfernungen.

Praktische Anwendung: Rekonstruktion der Ladungsverteilung von Kernen, Atomen oder Molekülen aus der Wechselwirkung mit einem äußeren Feld.

Wir betrachten daher eine Ladungsverteilung, die in einem begrenzten Gebiet lokalisiert ist. Außerhalb dieses Gebiets gilt daher die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0.$$

Ziel der Methode der Multipolentwicklung ist es, einen Satz von Grundlösungen der Laplace-Gleichung zu finden,

- der vollständig ist, d.h. jede Lösung läßt sich als Linearkombination dieser Basislösungen darstellen;
- und so daß die Entwicklung in diesen Basisfunktionen eine systematische Entwicklung nach (inversen) Potenzen des Abstandes ist, so daß für große Abstände höhere Terme in dieser Entwicklung nicht so wichtig sind.

Es ist naheliegend, sphärische Koordinaten zu verwenden:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten lautet:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi \\&= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = 0.\end{aligned}$$

Wir machen nun den Ansatz, daß die Lösung faktorisiert

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{r}U(r)P(\theta)Q(\varphi).$$

Bemerkung: Diese Vereinfachung läßt sich a posteriori rechtfertigen, da sie zu einem vollständigen Satz von Funktionen führt. Einsetzen liefert

$$\frac{1}{r}PQ\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^3\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^3\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0.$$

Multiplikation mit $r^3 \sin^2 \theta / (UPQ)$ liefert:

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0.$$

Nun hängt nur der dritte Term von φ ab. Daher muß dieser Term gleich einer Konstanten sein, die wir als $-m^2$ wählen:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2.$$

Einsetzen liefert nun:

$$r^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \left[\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0.$$

Analog folgert nun, da nur die Terme in der Klammer von θ abhängen, dass

$$\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1)$$

gilt. Hierbei ist $-l(l+1)$ eine weitere Konstante. Zusammenfassend haben wir also

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P &= 0, \\ \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 Q &= 0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für $Q(\varphi)$ hat die Lösungen

$$Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$$

Die Eindeutigkeit erfordert, daß m ganzzahlig ist.

Die Differentialgleichung für $U(r)$ hat die Lösungen

$$U(r) = c^{(1)} r^{l+1} + \frac{c^{(2)}}{r^l},$$

Der erste Term ist zu verwenden, falls die Lösung bei $r = 0$ regulär sein soll, der zweite Term ist zu verwenden, wenn Regularität im Unendlichen gefordert wird.

Bemerkung: Wir sind hier an Lösungen interessiert, die regulär im Unendlichen sind. Daher fallen die Lösungen wie $1/r^l$ mit dem Abstand r ab. Für große Abstände sind daher die Lösungen mit kleinem l relevant.

Um die Lösung für $P(\theta)$ zu finden, verwendet man die Substitution

$$x = \cos \theta.$$

Dies ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0.$$

Diese Gleichung nennt sich verallgemeinerte Legendre-Gleichung. Die (normale) Legendre-Gleichung hat die Form

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0.$$

11.2 Orthogonale Funktionen

Auf einem reellen Funktionenraum \mathcal{F} ist ein Skalarprodukt ein bilineares Funktional, welches für $f, g \in \mathcal{F}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} (f+g, h) &= (f, h) + (g, h) \\ (\alpha f, g) &= \alpha (f, g) \\ (f, g) &= (g, f) \\ (f, f) &> 0 \text{ falls } f \neq 0. \end{aligned}$$

Ein wichtiges Beispiel ist durch

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

mit einer positiven Gewichtsfunktion $w(x)$ gegeben.

Die Legendre Polynome $P_l(x)$ sind mit der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert. Wie schon erwähnt, sind sie Lösungen der Differentialgleichung:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Ausserdem erfüllen sie die Rekursionformel

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ (l+1)P_{l+1}(x) &= (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x). \end{aligned}$$

Desweiteren lassen sie sich aus der Formel von Rodrigues bestimmen:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, sie aus der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) z^l, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad |z| < 1$$

zu gewinnen. Die assoziierten Legendre-Funktionen $P_{lm}(x)$ sind gegeben durch

$$P_{lm}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Diese Funktionen erfüllen die Differenzialgleichung

$$\left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_{lm}(x) = 0.$$

Wie bei den Legendrepolynomen ist l eine nicht-negative ganze Zahl und m nimmt die Werte $-l, -(l-1), \dots, 0, \dots, (l-1), l$ an. Ausserdem haben wir die Relation

$$P_{lm}(-x) = (-1)^{l+m} P_{lm}(x)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind definiert durch

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Sie erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}(\vartheta, \varphi)^* Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)^* Y_{lm}(\vartheta', \varphi') = (\sin \vartheta)^{-1} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi').$$

Es gilt

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi)^*$$

Die Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2$ lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \\
 Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\
 Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \\
 Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi}, \\
 Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}.
 \end{aligned}$$

Wichtig ist das Additionstheorem:

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

wobei (θ, φ) die Polarkoordinaten des Einheitsvektors \hat{x} sind, (θ', φ') die Polarkoordinaten des Einheitsvektors \hat{x}' sind, und α den Winkel zwischen \hat{x} und \hat{x}' bezeichnet.

Somit haben wir für die Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = 0,$$

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[c_{lm}^{(1)} r^l + \frac{c_{lm}^{(2)}}{r^{l+1}} \right] P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[c_{lm}^{(1)'} r^l + \frac{c_{lm}^{(2)'}}{r^{l+1}} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Elektrostatik: Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$$

mit Lösung

$$\Phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \text{Lösung der homogenen Gleichung.}$$

Laplace-Gleichung:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0$$

Lösung in sphärischen Koordinaten:

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[c_{lm}^{(1)} r^l + \frac{c_{lm}^{(2)}}{r^{l+1}} \right] P_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[c_{lm}^{(1)'} r^l + \frac{c_{lm}^{(2)'}}{r^{l+1}} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

11.3 Elektrostatische Probleme mit Axialsymmetrie

Für Probleme, die um eine Richtung im Raum axialsymmetrisch sind, ist es sinnvoll, die z-Achse in diese Richtung zu legen. In diesem Fall ist das Potential unabhängig vom Azimutwinkel φ und es treten nur Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ auf.

$$\Phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[c_l^{(1)} r^l + \frac{c_l^{(2)}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$$

Wir benötigen also die Entwicklung von

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\alpha}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[c_l^{(1)} r^l + \frac{c_l^{(2)}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\alpha)$$

in Legendre-Polynome, wobei α der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{x}' ist. Wir betrachten zunächst den Fall $\cos\alpha = 1$. Es gilt $P_l(1) = 1$.

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|r - r'|}$$

Für $r' > r$ gilt:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^l.$$

Für $r' < r$ gilt:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l.$$

Wir führen die folgende Bezeichnung ein

$$\begin{aligned} r_{<} = r, \quad r_{>} = r' & \quad \text{für } r < r', \\ r_{<} = r', \quad r_{>} = r & \quad \text{für } r > r'. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l,$$

und daher

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha).$$

Ein einfaches Beispiel: Das Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsdichte.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int d^3x' \frac{\rho(r')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 2\pi \int_0^{\infty} dr' \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta (r')^2 \rho(r') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\theta) \\ &= 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dr' (r')^2 \rho(r') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_{-1}^1 du P_l(u) \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} dr' \frac{(r')^2 \rho(r')}{r_{>}} \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{r} \int_0^r dr' (r')^2 \rho(r') + \int_r^{\infty} dr' r' \rho(r') \right] \end{aligned}$$

11.4 Allgemeine Anordnung ohne Axialsymmetrie

Mit Hilfe des Additionstheorems läßt die Entwicklung der inversen Abstandsfunktion schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

Somit ist also

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int d^3x' \frac{\rho(r')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \int_0^{\infty} dr' (r')^2 \underbrace{\frac{r'^l}{r^{l+1}}}_{r' < r} \int \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}').\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Formel gilt sowohl für den Innen- als auch den Außenraum. Das Radialintegral spaltet man wieder in zwei Teile auf:

$$\int_0^{\infty} dr' = \int_0^r dr' + \int_r^{\infty} dr'.$$

Betrachtet man nur den Außenraum, so gilt immer $r > r'$ und die Formel vereinfacht sich zu

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int_0^r dr' (r')^{l+2} \int \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}')}_{q_{lm}}.$$

Man nennt die Größen

$$q_{lm} = \int_0^r dr' (r')^{l+2} \int \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}')$$

die Multipolmomente der Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$. Somit

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{q_{lm}}{r^{l+1}}.$$

Diese Formel besagt, daß die Eigenschaften der Quelle, die durch die Multipolmomente q_{lm} beschrieben werden, in der funktionalen Abhängigkeit des Potentials vom Aufpunkt \vec{x} faktorisieren.

Da die Ladungsdichte ganz im Endlichen liegt, kann man in der Berechnung der Multipolmomente die obere Grenze der Radialintegration auch gleich Unendlich wählen, daher

$$q_{lm} = \int_0^{\infty} dr r^{l+2} \int \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \rho(\vec{x}) = \int d^3x r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \rho(\vec{x}).$$

Es gilt

$$q_{lm}^* = (-1)^m q_{l(-m)}$$

Für $l = 0$ gibt es nur ein Multipolelement:

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \int d^3x \rho(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q,$$

wobei Q die Gesamtladung ist. Für $l = 1$ gibt es drei Multipolelemente, von denen nur zwei wirklich berechnet werden müssen:

$$q_{11} = \int d^3x r Y_{11}^*(\hat{x}) \rho(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3x (x^1 - ix^2) \rho(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d^1 - id^2),$$

$$q_{10} = \int d^3x r Y_{10}^*(\hat{x}) \rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3x x^3 \rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d^3.$$

d^i sind die Komponenten des Dipolmoments

$$\vec{d} = \int d^3x \vec{x} \rho(\vec{x})$$

Ebenso definiert man das Quadrupolmoment Q^{ij} als

$$Q^{ij} = \int d^3x (3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}) \rho(\vec{x}).$$

Das Quadrupolmoment hängt mit den Multipolelementen mit $l = 2$ wie folgt zusammen: Zunächst hat man

$$q_{22} = \int d^3x r^2 Y_{22}^*(\hat{x}) \rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int d^3x (x^1 - ix^2)^2 \rho(\vec{x}),$$

$$q_{21} = \int d^3x r^2 Y_{21}^*(\hat{x}) \rho(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3x (x^1 - ix^2) x^3 \rho(\vec{x}),$$

$$q_{20} = \int d^3x r^2 Y_{20}^*(\hat{x}) \rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int d^3x (3(x^3)^2 - r^2) \rho(\vec{x}).$$

Dann findet man

$$q_{22} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{6\pi}} (Q^{11} - 2iQ^{12} - Q^{22}),$$

$$q_{21} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6\pi}} (-Q^{13} + iQ^{23}),$$

$$q_{20} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\pi}} Q^{33}.$$

Das Dipol- und das Quadrupolmoment sind wichtig in der Anwendung. Man betrachtet

$$\Phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

und entwickelt um die Stelle $\vec{x}' = 0$. Man hat mit $r = |\vec{x}|$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i}{r^3} x'^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}}{r^5} x'^i x'^j + o(x'^3).$$

Somit

$$\Phi(x) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q^{ij} \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots$$

Bemerkung:

$$\sum_{i,j=1}^3 (3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}) x'^i x'^j = 3(\vec{x} \cdot \vec{x}')^2 - r^2 r'^2 = \sum_{i,j=1}^3 (3x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}) x^i x^j$$

Anwendung: Wir betrachten ein Objekt mit der Ladungsverteilung $\rho_1(\vec{x})$ in einem äußeren elektrischen Feld, daß von dem Potential $\Phi_2(\vec{x})$ erzeugt wird.

$$\begin{aligned} U_{WW} &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla} \Phi_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \Phi_2) + \frac{1}{4\pi} \int d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) \Phi_2, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) \Phi_2 \\ &= \int d^3x \rho_1 \Phi_2, \end{aligned}$$

Das Potential $\Phi_2(\vec{x})$ entwickeln wir um $\vec{x} = 0$:

$$\Phi_2(\vec{x}) = \Phi_2(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Phi_2(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x^i x^j \frac{\partial^2 \Phi_2(0)}{\partial x^i \partial x^j} + \dots$$

Da $E_2(\vec{x})$ an der Stelle $\vec{x} = 0$ keine Quellen haben soll, können wir einen Term $1/6r^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2(0)$ dazuaddieren:

$$\Phi_2(\vec{x}) = \Phi_2(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}_2(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x^i x^j \frac{\partial E_2^j(0)}{\partial x^i} + \frac{1}{6} r^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2(0) + \dots$$

Somit erhält man

$$U_{WW} = Q_1 \Phi_2(0) - \vec{d}_1 \cdot \vec{E}_2(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_1^{ij} \frac{\partial E_2^j(0)}{\partial x^i} + \dots$$

Der erste Term ist, wie erwartet, das Produkt aus der Ladung und dem Potential am Ursprung. Der zweite Term gibt die Energie eines elektrischen Dipols im äußeren elektrischen Feld. Der dritte Term gibt die Energie eines Quadrupols in einem Feldgradienten.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Potential im Außenraum einer Ladungsverteilung:

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{q_{lm}}{r^{l+1}}.$$

Multipolmomente gegeben durch

$$q_{lm} = \int d^3x r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \rho(\vec{x}).$$

Die Multipolmomente für $l = 1$ lassen sich durch das Dipolmoment

$$\vec{d} = \int d^3x \vec{x} \rho(\vec{x})$$

ausdrücken. Die Multipolmomente für $l = 2$ lassen sich durch das Quadrupolmoment

$$Q^{ij} = \int d^3x (3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}) \rho(\vec{x}).$$

ausdrücken.

Wechselwirkungsenergie eines Objektes mit einer Ladungsverteilung in einem äußeren Feld:

$$U_{WW} = Q_1 \Phi_2(0) - \vec{d}_1 \cdot \vec{E}_2(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_1^{ij} \frac{\partial E_2^j(0)}{\partial x^i} + \dots$$

Korrekturen zur letzten Vorlesung:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q,$$

$$q_{21} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6\pi}} (-Q^{13} + iQ^{23}),$$

$$q_{20} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\pi}} Q^{33}.$$

11.5 Nachtrag zu elektrischen Dipol- und Quadrupolfeldern

Bemerkung: Allgemein bezeichnet man als 2^l -Pol, den Beitrag, der von dem l -ten Term in der Entwicklung von $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ herrührt.

Bemerkung 2: Man kann einen Dipol exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzte Ladungen λQ und $-\lambda Q$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda} \vec{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda} \vec{a}$ aufstellt und den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$

durchführt.

Man kann einen Quadrupol exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzte Dipole $\lambda \vec{d}$ und $-\lambda \vec{d}$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda} \vec{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda} \vec{a}$ aufstellt und den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$ durchführt.

Allgemeiner kann man einen 2^l -Pol exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzte 2^{l-1} -Pole λQ_{l-1} und $-\lambda Q_{l-1}$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda} \vec{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda} \vec{a}$ aufstellt und den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$ durchführt.

Für einen elektrischen Dipol mit Potential im Außenraum

$$\Phi_{Dipol} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

findet man

$$-\vec{\nabla} \Phi_{Dipol} = \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{d}) \hat{x} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3}.$$

Man addiert noch einen Zusatzterm zur Feldstärke

$$\vec{E}_{Dipol} = \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{d}) \hat{x} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3} - \frac{4\pi}{3} \vec{d} \delta(\vec{x}).$$

Der zur δ -Distribution proportionale Zusatz garantiert, das

$$\int d^3x \vec{E}_{Dipol} = -\frac{4\pi}{3} \vec{d}.$$

Wir betrachten

$$\int_{r < R} d^3x \vec{E}_{Dipol} = - \int_{r < R} d^3x \vec{\nabla} \Phi_{Dipol} = - \int_{r=R} R^2 d\Omega \vec{n} \Phi_{Dipol},$$

wobei $\vec{n} = \vec{x}/R$ der nach außen gerichtete Einheitsvektor ist. Also

$$\int_{r < R} d^3x \vec{E}_{Dipol} = - \int_{r=R} R^2 d\Omega \vec{n} \frac{(\vec{d} \cdot \vec{x})}{|\vec{x}|^3} = - \int_{r=R} d\Omega \vec{n} (\vec{d} \cdot \vec{n})$$

Wir drücken \vec{n} durch θ und φ aus:

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$

Wählen wir noch das Koordinatensystem so, daß

$$\vec{d} = d \vec{e}_3,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \int_{r < R} d^3x \vec{E}_{Dipol} &= - \int_{r=R} d\Omega \vec{n} (\vec{d} \cdot \vec{n}) = -d\vec{e}_3 \int_{r=R} d\Omega \cos^2 \theta \\ &= -2\pi\vec{d} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = -\frac{4\pi}{3}\vec{d}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\int d^3x \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{d})\hat{x} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3} = \int_0^\infty dr r^2 \int d\Omega \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{d})\hat{x} - \vec{d}}{r^3}$$

und für $\vec{d} = d\vec{e}_3$

$$\int d\Omega (3(\hat{x} \cdot \vec{d})\hat{x} - \vec{d}) = 2\pi d\vec{e}_3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta (3\cos^2 \theta - 1) = 0.$$

12 Magnetostatik

Die Grundgleichungen, die alle Phänomene mit ruhenden Permanentmagneten und mit stationären, d.h. zeitlich unveränderlichen, elektrischen Strömen beschreiben, lauten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

und verwendet man die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0,$$

so erhält man

$$\Delta \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}).$$

Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Poisson-Gleichung. Eine Lösung ist gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

12.1 Magnetische Dipoldichte und magnetisches Moment

Entwickelt man nun wieder für $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ die Abstandsfunktion

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots,$$

so erhält man für die i -te Komponente des Vektorpotentials

$$A^i(\vec{x}) = \frac{1}{c|\vec{x}|} \int d^3x' j^i(\vec{x}') + \frac{1}{c|\vec{x}|^3} \sum_{k=1}^3 x^k \int d^3x' x'^k j^i(\vec{x}') + \dots$$

Bemerkung: Das erste Integral ist Null, da der Strom erhalten ist.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int d^3x x^i j^k(\vec{x}) &= \int d^3x x^i \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} x^k = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot (x^i \vec{j}(\vec{x})) x^k = - \int d^3x (\vec{\nabla} x^i) \cdot \vec{j}(\vec{x}) x^k \\ &= - \int d^3x j^i(\vec{x}) x^k. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 x^k \int d^3x' x'^k j^i(\vec{x}') &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 x^k \int d^3x' [x'^k j^i(\vec{x}') - x'^i j^k(\vec{x}')] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{ikl} x^k \int d^3x' (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}'))^l \\ &= -\frac{1}{2} \left(\vec{x} \times \int d^3x' (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')) \right)^i \end{aligned}$$

Man definiert nun

$$\vec{m}(\vec{x}) = \frac{1}{2c} \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})$$

als magnetische Dipoldichte, und das Raumintegral über diese Dichte als magnetischen Moment:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3x \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})$$

Somit erhält man für das Vektorpotential

$$\vec{A}_{Dipol}(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^3} \vec{\mu} \times \vec{x}.$$

12.2 Das Feld eines magnetischen Dipols

Für das Induktionsfeld eines magnetische Dipols gilt

$$\vec{B}_{Dipol} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{Dipol}$$

Im Außenraum haben wir

$$\vec{A}_{Dipol}(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^3} \vec{\mu} \times \vec{x}.$$

und somit

$$\begin{aligned} \vec{B}_{Dipol}^i &= \sum_{k,l,m,n=1}^3 \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} \left(\nabla^k \frac{\mu^m x^n}{|\vec{x}|^3} \right) \\ &= \sum_{k,l,m,n=1}^3 \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} \left(\frac{\mu^m}{|\vec{x}|^3} \delta^{kn} - 3 \mu^m x^n x^k \frac{1}{|\vec{x}|^5} \right) \\ &= 2 \sum_{m=1}^3 \frac{\mu^m}{|\vec{x}|^3} \delta^{im} - 3 \sum_{k,m,n=1}^3 \left(\delta^{im} \delta^{kn} - \delta^{in} \delta^{km} \right) \mu^m x^n x^k \frac{1}{|\vec{x}|^5} \\ &= 2 \frac{\mu^i}{|\vec{x}|^3} - 3 \frac{\mu^i}{|\vec{x}|^3} + 3 \frac{x^i (\vec{\mu} \cdot \vec{x})}{|\vec{x}|^5} \end{aligned}$$

Daher:

$$\vec{B}_{Dipol} = \frac{3 (\hat{x} \cdot \vec{\mu}) \hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3}.$$

Diese Formel gilt für $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$.

Bemerkung: Für einen idealisierten punktförmigen magnetischen Dipol betrachten wir zunächst

$$\int_{r < R} d^3 x \vec{B}_{Dipol} = \int_{r < R} d^3 x \vec{\nabla} \times \vec{A}_{Dipol} = R^2 \int_{r=R} d\Omega \vec{n} \times \vec{A}_{Dipol},$$

wobei $\vec{n} = \vec{x}/R$ wieder der nach außen gerichtete Einheitsvektor ist. Also

$$\int_{r < R} d^3 x \vec{B}_{Dipol} = R^2 \int_{r=R} d\Omega \vec{n} \times \frac{(\vec{\mu} \times \vec{x})}{|\vec{x}|^3} = \int_{r=R} d\Omega \vec{n} \times (\vec{\mu} \times \vec{n})$$

Wir drücken wieder \vec{n} durch θ und φ aus:

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$

und wählen das Koordinatensystem so, daß

$$\vec{\mu} = \mu \vec{e}_3.$$

Dann haben wir

$$\int_{r < R} d^3x \vec{B}_{Dipol} = \int_{r=R} d\Omega \vec{n} \times (\vec{\mu} \times \vec{n}) = 2\pi\mu\vec{e}_3 \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \frac{8\pi}{3}\vec{\mu},$$

und somit

$$\vec{B}_{Dipol} = \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{\mu})\hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x}).$$

Alternative Herleitung des Zusatzterms: Der magnetische Dipol erzeugt eine Magnetisierungsdichte

$$\vec{m} = \vec{\mu}\delta(\vec{x}).$$

Zusammenhang zwischen den \vec{B} - und \vec{H} -Feldern:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{m}$$

Maxwell-Gleichungen für statische magnetische Felder:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 0, \end{aligned}$$

also gilt mit $\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi$

$$\Delta\psi = 4\pi\vec{\nabla} \cdot \vec{m}$$

Somit ist

$$\psi(\vec{x}) = -\int d^3y \frac{\vec{\nabla}_y \cdot \vec{m}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \int d^3y \vec{m}(\vec{y}) \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \\ &= \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \end{aligned}$$

Analog zum elektrischen Dipol findet man

$$\vec{H}_{Dipol} = \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{\mu})\hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x})$$

und daher

$$\begin{aligned} \vec{B}_{Dipol} &= \vec{H}_{Dipol} + 4\pi\vec{m} \\ &= \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{\mu})\hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x}) \end{aligned}$$

12.3 Die Larmor-Präzession

Wir betrachten ein Magnetfeld, das von Ladungen hervorgerufen wird, die sich zu allen Zeiten in einem endlichen Raumbereich bewegen, wobei ihre Impulse auch immer endlich bleiben müssen. Wir interessieren uns für den zeitlichen Mittelwert des Magnetfeldes. Dieses mittlere Feld $\langle \vec{B} \rangle$ hängt dann nur noch von den Ortskoordinaten, aber nicht mehr von der Zeit ab und ist daher statisch.

$$\left\langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\vec{B}(T, \vec{x}) - \vec{B}(0, \vec{x})}{T} = \vec{0}.$$

Eine räumlich begrenzte Stromverteilung stellt daher einen magnetischen Dipol dar. Wir betrachten nun die Kräfte und Drehmomente, die auf diesen magnetischen Dipol in einem äußeren magnetischen Feld \vec{B}_2 wirken. Wir müssen fordern, daß das äußere magnetische Feld \vec{B}_2 schwach ist, so daß die zeitliche Änderung von \vec{m} auf einer Zeitskala stattfindet, die lang ist im Vergleich zur Zeit T , die für die Zeitmittelung benötigt wird. Für die Stromdichte gilt

$$\vec{j} = \sum_i q_i \vec{v}_i(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t)).$$

Für das zeitliche Mittel der auf den magnetischen Dipol wirkenden Kraft gilt:

$$\langle \vec{F} \rangle = \left\langle \sum_i q_i \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}_2 \right\rangle = \sum_i \frac{q_i}{c} \langle \vec{v}_i \rangle \times \vec{B}_2 = 0.$$

Für das zeitgemittelte Drehmoment gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{N} \rangle &= \left\langle \sum_i \vec{x}_i \times \left(q_i \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}_2 \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{c} \left\langle \int d^3x \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}_2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{c} \left\langle \int d^3x (\vec{x} \cdot \vec{B}_2) \vec{j} - \int d^3x (\vec{x} \cdot \vec{j}) \vec{B}_2 \right\rangle \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int d^3x (\vec{x} \cdot \vec{j}) &= -\frac{1}{2} \int d^3x x^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} \int d^3x x^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int d^3x x^2 \rho \right], \end{aligned}$$

daher verschwindet der zweite Term bei der zeitlichen Mittelung. Somit

$$\langle \vec{N} \rangle = \frac{1}{c} \int d^3x (\vec{x} \cdot \vec{B}_2) \langle \vec{j} \rangle$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\int d^3x \vec{m} \times \vec{B}_2 &= \frac{1}{2c} \int d^3x (\vec{x} \times \langle \vec{j} \rangle) \times \vec{B}_2 = \frac{1}{2c} \int d^3x (\vec{x} \cdot \vec{B}_2) \langle \vec{j} \rangle - \frac{1}{2c} \int d^3x (\langle \vec{j} \rangle \cdot \vec{B}_2) \vec{x} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x (\vec{x} \cdot \vec{B}_2) \langle \vec{j} \rangle = \langle \vec{N} \rangle.\end{aligned}$$

Somit

$$\langle \vec{N} \rangle = \vec{\mu} \times \vec{B}_2.$$

Haben alle Teilchen das gleiche Verhältnis q/m so gilt

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int d^3x \vec{x} \times \langle \vec{j} \rangle = \sum_i \frac{q}{2c} \langle \vec{x}_i \times \vec{v}_i \rangle = \frac{q}{2mc} \sum_i \langle \vec{x}_i \times \vec{p}_i \rangle \\ &= \frac{q}{2mc} \langle \vec{L} \rangle\end{aligned}$$

und wir finden

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{L} \rangle = \frac{q}{2mc} \langle \vec{L} \rangle \times \vec{B}_2.$$

$\langle \vec{L} \rangle$ und $\vec{\mu}$ präzessieren daher mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{q}{2mc} \vec{B}_2$$

um die \vec{B}_2 -Achse. Man bezeichnet

$$\omega = \frac{q}{2mc} B_2$$

als Larmor-Frequenz.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Feld eines elektrischen Dipols:

$$\vec{E}_{Dipol} = \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{d})\hat{x} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec{d}\delta(\vec{x}).$$

Magnetische Dipoldichte:

$$\vec{m}(\vec{x}) = \frac{1}{2c}\vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})$$

Magnetische Moment:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3x \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})$$

Feld eines magnetischen Dipols:

$$\vec{B}_{Dipol} = \frac{3(\hat{x} \cdot \vec{\mu})\hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x}).$$

Wechselwirkung zwischen einem magnetischen Dipol und einem schwachen äußeren magnetischen Feld: Drehmoment:

$$\langle \vec{N} \rangle = \vec{\mu} \times \vec{B}_2.$$

Präzession:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{L} \rangle = \frac{q}{2mc} \langle \vec{L} \rangle \times \vec{B}_2.$$

Larmor-Frequenz:

$$\omega = \frac{q}{2mc} B_2.$$

13 Die Maxwell'schen Gleichungen in Materie

Bisher haben wir die Maxwell'schen Gleichungen nur im Vakuum betrachtet. In Materie muß nun allerdings zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der dielektrische Verschiebung \vec{D} , sowie zwischen der magnetische Induktion \vec{B} und der magnetische Feldstärke \vec{H} unterschieden werden. Die Maxwell'schen Gleichungen in Materie lauten:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= 4\pi\rho(t, \vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t, \vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Gleichungen benötigt man Beziehungen zwischen \vec{E} und \vec{D} , sowie zwischen \vec{B} und \vec{H} . Diese hängen im allgemeinen von den mikroskopischen Eigenschaften der Materie ab und sind prinzipiell berechenbar. Allerdings sind wir meist nur an makroskopischen Eigenschaften interessiert. Daher werden die Eigenschaften der Materie durch Größen beschrieben, die zwar im Prinzip aus einer mikroskopischen Beschreibung berechenbar sind, die aber nur gemittelte Eigenschaften der Materie widerspiegeln.

13.1 Zusammenhang der Verschiebung mit dem elektrischen Feld

Man unterscheidet zwischen elektrischen Leitern und polarisierbaren Medien.

In idealisierten Leitern gibt es frei bewegliche Ladungen, die sich bei Anlegen eines elektrischen Feldes so lange verschieben werden, bis wieder ein statischer Gleichgewichtszustand erreicht ist. Dies führt zu induzierten Ladungen, die sich auf den Oberflächen der leitenden Objekte befinden. Man definiert eine Flächenladungsdichte

$$\eta = \lim_{h \rightarrow 0} h\rho$$

Mit Ausnahme dieser Leiteroberfläche sind \vec{D} und \vec{E} gleich.

In polarisierbaren Medien gibt es keine freien Ladungen, es ist aber sehr wohl möglich, daß ein angelegtes elektrisches Feld lokal, d.h. über mikroskopische Distanzen das Medium polarisiert.

Ist das Medium homogen und isotrop, so ist

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}).$$

Ist das Medium isotrop, aber nicht mehr homogen, so wird ϵ vom Ort abhängen:

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}).$$

Ist das Medium weder homogen noch isotrop, so wird die Antwort des Mediums auf die angelegten Felder von der Richtung, in der diese zeigen abhängen. Die Funktion $\epsilon(\vec{x})$ ist dann durch eine 3×3 -Matrix zu ersetzen:

$$D^i(\vec{x}) = \epsilon^{ij}(\vec{x}) E^j(\vec{x}).$$

Das elektrische Feld ist die elementare, mikroskopische Feldgröße. Das elektrische Verschiebungsfeld kann in einem Medium vom elektrischen Feld abweichen, falls im Medium lokal verschiebbare Ladungen vorhanden sind. Man nimmt an, daß in Abwesenheit äußerer elektrischer Felder die Multipolmomente der molekularen Ladungsverteilung verschwinden. Diese Annahme ist gerechtfertigt, falls man über hinreichend viele Moleküle mittelt. Legt man ein äußeres elektrisches Feld an, so wird diese Ladungsverteilung modifiziert, und die Multipolmomente sind im

Allgemeines ungleich Null. Da die Ladungen gebunden sind, bleibt das nullte Multipolmoment gleich Null. Der dominante Beitrag kommt daher von den molekularen Dipolen.

Wir betrachten ein einfaches schematische Modell: Ein Stück elektrisch ungeladener Materie möge derart in Zellen eingeteilt sein, so daß innerhalb jeder Zelle positive und negative Ladungen zwar verschoben werden können, die Zelle aber nicht verlassen können. Ohne äußeres Feld ist jede Zelle elektrisch neutral. Legt man ein äußeres Feld an, werden die Zellen polarisiert und man kann diese durch elektrische Dipole \vec{d}_i modellieren. Die makroskopische Wirkung wird in Form einer Polarisierbarkeit beschrieben:

$$\vec{P}(\vec{x}) = \sum_i n_i \langle \vec{d}_i \rangle,$$

wobei n_i die mittlere Zahl von Dipolen pro Volumenelement ist, und $\langle \vec{d}_i \rangle$ der mittlere am Ort \vec{x}_i wirksame Dipol ist.

Ein einzelner Dipol \vec{d} , der sich am Ort \vec{x}' befindet, erzeugt am Punkt \vec{x} ein Potential

$$\Phi_{Dipol}(\vec{x}) = \frac{\vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{d} \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Bezeichnet $\rho(\vec{x}')$ die Verteilung der freien Ladungen, so geben diese und die in der Materie induzierte Polarisation das Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \int d^3x' \left[\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \\ &= \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}') - \vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned}$$

Das elektrische Feld ist das negative Gradientenfeld des Potentials $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ und für seine Divergenz erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \left[\rho(\vec{x}) - \vec{\nabla}_x \cdot \vec{P}(\vec{x}) \right].$$

Somit

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{x}) + 4\pi\vec{P}(\vec{x})) = 4\pi\rho(\vec{x}).$$

Da andererseits auch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x}),$$

gilt, findet man den Zusammenhang

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Im einfachsten Fall ist die Antwort des Mediums auf das angelegte elektrische Feld, d.h. die Polarisation \vec{P} linear in \vec{E} und in jeder Richtung dieselbe (Isotropie), in einer Formel also

$$\vec{P}(\vec{x}) = \chi_e(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}),$$

wo $\chi_e(\vec{x})$ die elektrische Suszeptibilität des Mediums ist. In diesem Fall ist also

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}),$$

wobei

$$\epsilon(\vec{x}) = 1 + 4\pi\chi_e(\vec{x}).$$

Ist das Medium außerdem noch homogen, dann ist ϵ über das ganze Medium eine Konstante, die Dielektrizitätskonstante genannt wird. Für die inhomogene Maxwell'sche Gleichung ergibt sich in diesem Fall

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho(\vec{x}).$$

Die Richtung eines elektrischen Dipols weist von der negativen zur positiven Ladung. Daher hat die Polarisation \vec{P} die gleiche Richtung wie das äußere Feld \vec{E} . Somit ist

$$\chi_e > 0 \quad \text{und} \quad \epsilon > 1.$$

Daher wird das angelegte Feld durch die von ihm induzierten Dipolfelder abgeschwächt.

13.2 Zusammenhang zwischen Induktions- und magnetischen Feld

In Analogie zum elektrischen Fall diskutieren wir hier den Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke.

Ein magnetischer Punktdipol erzeugt das Vektorpotential

$$\vec{A}_{Dipol}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Wir beschreiben die magnetische Polarisierbarkeit eines Stücks Materie durch eine Magnetisierungsdichte

$$\vec{m}(\vec{x}) = \sum_i n_i \langle \mu_i \rangle,$$

wobei $\langle \mu_i \rangle$ das mittlere magnetische Dipolmoment am Ort \vec{x}_i ist, und n_i die mittlere Anzahl solcher Dipole pro Volumenelement. Falls außerdem noch eine freie Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ vorhanden ist, so hat man für das Vektorpotential

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \vec{A}_{Strom}(\vec{x}) + \vec{A}_{Dipol}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \left[\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + c \frac{\vec{m}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

und erhalten nach einer partiellen Integration

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') + c \vec{\nabla}_{x'} \times \vec{m}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Berechnet man nun die Rotation von \vec{B} , so erhält man

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = -\Delta \vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}) + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{m}(\vec{x}),$$

und damit

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{x}) - 4\pi \vec{m}(\vec{x})) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}).$$

Da andererseits für statische Magnetfelder

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x})$$

gilt, ergibt sich der Zusammenhang

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) - 4\pi \vec{m}(\vec{x}), \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{H}(\vec{x}) + 4\pi \vec{m}(\vec{x}).$$

Ist die Antwort des Mediums linear und isotrop, so schreibt man

$$\vec{m}(\vec{x}) = \chi_m(\vec{x}) \vec{H}(\vec{x}).$$

Man nennt $\chi_m(\vec{x})$ die magnetische Suszeptibilität. Man erhält somit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu(\vec{x}) \vec{H}(\vec{x}),$$

wobei

$$\mu(\vec{x}) = 1 + 4\pi \chi_m(\vec{x})$$

die magnetische Permeabilität genannt wird. Die Linearität ist gegeben für para- und diamagnetische Medien, nicht jedoch für ferromagnetische Medien.

Diamagnetische Substanzen bestehen aus Atomen, deren Gesamtdrehimpuls gleich Null ist, die also kein eigenes magnetisches Moment besitzen. Das angelegte Magnetfeld induziert hier magnetische Momente, die dem angelegten Feld entgegen gerichtet sind. Dies bedeutet für die makroskopischen Parameter, daß $\chi_m < 0$ und $\mu < 1$ ist.

Paramagnetische Substanzen bestehen aus Atomen, die einen nicht-verschwindenden Gesamtdrehimpuls und ein eigenes magnetisches Moment besitzen. Dieses magnetische Moment, das von ungepaarten Elektronen aus der Atomhülle stammt, richtet sich parallel zum angelegten Feld aus, hier ist also $\chi_m > 0$ und somit $\mu > 1$. In beiden Fällen, dem Diamagnetismus und dem Paramagnetismus, ist χ_m sehr klein und daher μ nahe bei 1.

In ferromagnetischen Substanzen ist die Antwort des Mediums auf das angelegte Feld nicht mehr linear und die Funktion

$$\vec{B} = \vec{F}(\vec{H})$$

ist sogar mehrwertig, d.h. der Wert der Induktion \vec{B} bei vorgegebenen Wert von \vec{H} hängt davon ab, wie das Feld \vec{H} angefahren wurde. Es tritt das Phänomen der Hysterese auf.

13.3 Ohm'sches Gesetz

Im Inneren von Leitern können sich die Ladungsträger (meist die Elektronen) frei bewegen. Bei der thermischen Bewegung führen sie unregelmässige Streuprozesse mit den Gitteratomen (Phononen) aus. Im Mittel wird sich der dadurch bedingte Strom allerdings herausheben. Legt man nun ein elektrisches Feld an, so findet zusätzlich zu dieser thermischen Bewegung eine Driftbewegung in Richtung des angelegten Feldes statt. Wir können dies durch eine Bewegung im äußeren Feld mit Reibung beschreiben. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = q\vec{E}.$$

Für einen stationären Strom gilt

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{0},$$

und wir erhalten mit der Teilchendichte n folgenden Ausdruck für den gemittelten Leitungsstrom:

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{nq^2}{m\gamma} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

σ bezeichnet man als die Leitfähigkeit. Für ein endliches Leiterstück mit der Querschnittfläche A und der Länge L , an das eine Spannung U angelegt wird, erhalten wir also einen Strom I , der dem Ohm'schen Gesetz genügt:

$$I = A |\vec{j}| = A\sigma |\vec{E}| = A\sigma \frac{U}{L} = \frac{U}{R}.$$

Dabei ist der Widerstand des Leiterstücks durch

$$R = \frac{L}{A\sigma}$$

gegeben.

Bemerkung: Im Falle eines Supraleiters haben wir keine Reibung ($\gamma = 0$). In diesem Fall ist das Feld proportional zur zeitlichen Änderung des Suprastromes \vec{j}_s :

$$\frac{d}{dt} \vec{j}_s = \frac{nq^2}{m} \vec{E}.$$

Diese Gleichung bildet zusammen mit der Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = -\frac{nq^2}{mc} \vec{B}$$

den Satz der London-Gleichungen, die eine phänomenologische Beschreibung der Supraleitung darstellen.

13.4 Stetigkeitsbedingungen

In inhomogenen Medien können die Materialkonstanten ϵ , μ und σ vom Orte abhängen. In vielen Fällen hat man es allerdings mit wenigstens stückweisen homogenen Medien zu tun. Dann treten Änderungen der Materialkonstanten nur an Grenzflächen auf. Diese Änderungen kann man mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen bestimmen.

Normalkomponente von \vec{B} : Wir legen in die Grenzfläche eine Dose mit infinitesimaler Höhe h , deren Boden und Deckel parallel zur Grenzfläche ist. Dann folgt aus der Divergenzfreiheit des \vec{B} -Feldes:

$$0 = \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oint d\sigma \vec{B} \cdot \hat{n} \stackrel{h \rightarrow 0}{=} A \hat{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}).$$

Die Normalkomponente von \vec{B} ist stetig:

$$B_{\perp}^{(2)} = B_{\perp}^{(1)}.$$

Normalkomponente von \vec{D} : Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$ folgt mittels derselben Konstruktion

$$4\pi Q = \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint d\sigma \vec{D} \cdot \hat{n} \stackrel{h \rightarrow 0}{=} A \hat{n} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}).$$

Die Normalkomponente von \vec{D} macht an der Oberfläche einen Sprung, der proportional zur Oberflächenladungsdichte η ist:

$$D_{\perp}^{(2)} - D_{\perp}^{(1)} = 4\pi \frac{Q}{A} = 4\pi\eta.$$

Tangentialkomponente von \vec{H} : Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

folgt mit Hilfe eines rechteckigen geschlossenen Linienintegrals der Länge l längs der Oberfläche und der infinitesimalen Höhe h senkrecht zur Oberfläche:

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int d\sigma \vec{j} \cdot \hat{n} + \frac{1}{c} \int d\sigma \hat{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D},$$

$$(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) l = \frac{4\pi}{c} \hat{t} \cdot \vec{j} l h,$$

wobei der Einheitsvektor \hat{t} zusammen mit $d\vec{s}$ und \hat{n} ein orthogonales Dreibein bilden und \vec{D} auf der Oberfläche vernachlässigt wurde. Da \hat{t} eine beliebige Richtung tangential zur Oberfläche ist, gilt:

$$\hat{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} h = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{surface}$$

$\hat{n} \times H_{\parallel}$ macht daher einen Sprung von der Größe und der Richtung der Flächenstromdichte $\vec{j}^{surface}$.

Tangentialkomponente von \vec{E} : Analog leitet man aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

im statischen Fall ab, daß die Tangentialkomponente von \vec{E} stetig ist:

$$E_{\parallel}^{(2)} = E_{\parallel}^{(1)}.$$

Zusammenfassung der Stetigkeitsbedingungen:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) = 4\pi\eta, \quad \hat{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) = 0,$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) = 0, \quad \hat{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{surface}.$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Zusammenhang zwischen Verschiebung und elektrischen Feld:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Einfachster Fall: Lineare Antwort des Mediums auf das angelegte elektrische Feld:

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{x}) &= \chi_e(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \\ \vec{D}(\vec{x}) &= \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \\ \epsilon(\vec{x}) &= 1 + 4\pi\chi_e(\vec{x}).\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{H}(\vec{x}) + 4\pi\vec{m}(\vec{x}).$$

Einfachster Fall: Lineare Antwort des Mediums:

$$\begin{aligned}\vec{m}(\vec{x}) &= \chi_m(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}), \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}), \\ \mu(\vec{x}) &= 1 + 4\pi\chi_m(\vec{x})\end{aligned}$$

Ohm'sches Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

Stetigkeitsbedingungen:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) &= 4\pi\eta, & \hat{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) &= 0, \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) &= 0, & \hat{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{surface}.\end{aligned}$$

13.5 Der Energie-Impuls-Tensor in Materie

Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes im Vakuum lautet:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x)F_{\tau}^{\nu}(x) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right].$$

Für die expliziten Einträge erhält man

$$\begin{aligned}T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = u(t, \vec{x}), \\ T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})^i = cP^i(t, \vec{x}), \\ T^{i0} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})^i = \frac{1}{c}S^i(t, \vec{x}), \\ T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}^i\vec{E}^j + \vec{B}^i\vec{B}^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right].\end{aligned}$$

Für dessen Divergenz finden wir nun

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu.$$

Ausgeschrieben für die zeitliche Komponente erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0.$$

Wir betrachten nun den Energie-Impuls-Tensor in Materie. Nimmt man einen linearen Zusammenhang an

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

so findet man für den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\hat{F}^{\mu\tau}(x) F_\tau^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \hat{F}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right],$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D^x & -D^y & -D^z \\ D^x & 0 & -H^z & H^y \\ D^y & H^z & 0 & -H^x \\ D^z & -H^y & H^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned} u(t, \vec{x}) &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) \\ \vec{P}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi c} \vec{D} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi c} \epsilon \mu \vec{E} \times \vec{H}, \\ \vec{S}(t, \vec{x}) &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}, \\ T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\epsilon \left(\vec{E}^i \vec{E}^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} \vec{E}^2 \right) + \mu \left(\vec{H}^i \vec{H}^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} \vec{H}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Diese Größen erfüllen wie im Fall des Vakuums die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0.$$

Bemerkung: Man definiert

$$\vec{l} = \frac{1}{4\pi c} \vec{x} \times (\vec{D} \times \vec{B}) = \frac{\epsilon \mu}{4\pi c} \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{H})$$

als Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes.

14 Die Strahlung des elektromagnetischen Feldes

Im folgenden wenden wir uns, soweit nicht explizit anders angegeben, wieder Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum zu. Durch die Einführung des Viererpotentials reduzieren sich die Maxwell'schen Gleichungen auf

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Wählt man die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

so erhält man

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Zur Erinnerung:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

14.1 Die Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten nun die Gleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(t, \vec{x}) = -4\pi F(t, \vec{x}).$$

Eine Methode, diese Gleichung zu lösen, besteht darin, eine Fouriertransformation für die Zeitkomponente durchzuführen.

$$\begin{aligned} \Psi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\Psi}(\omega, \vec{x}), \\ F(t, \vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{F}(\omega, \vec{x}), \end{aligned}$$

Für die Rücktransformation gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\omega, \vec{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \Psi(t, \vec{x}), \\ \tilde{F}(\omega, \vec{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} F(t, \vec{x}), \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$(\Delta_x + k^2) \tilde{\Psi}(\omega, \vec{x}) = -4\pi \tilde{F}(\omega, \vec{x}), \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Diese Gleichung nennt man die (inhomogene) Helmholtz-Gleichung. Bemerkung: Bis auf das Vorzeichen von k^2 ist diese Gleichung identisch mit der Differentialgleichung für das Yukawa-Potential.

Zur Lösung dieser Differentialgleichung betrachten wir zunächst die Green'sche-Funktion, welche die Lösung der Gleichung

$$(\Delta_x + k^2) G_k(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}').$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$G_k^\pm(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wir bestimmen nun die Green'sche Funktion der Gleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{c} \delta(t - t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}').$$

Führt man die Fouriertransformation in t durch

$$G(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega, \vec{x}, t', \vec{x}'),$$

$$\frac{1}{c} \delta(t - t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{2\pi c} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')},$$

so ergibt sich

$$(\Delta_x + k^2) \tilde{G}(\omega, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{c} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') e^{i\omega t'},$$

und somit

$$\tilde{G}(\omega, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{c} e^{i\omega t'} G_k^\pm(\vec{x}, \vec{x}').$$

Führt man dann die Rücktransformation der Fouriertransformation durch, so erhält man

$$G(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega, \vec{x}, t', \vec{x}')$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_k^{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') e^{-i\omega(t-t')} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \exp(-i\omega(t-t') \pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-i\omega(t-t') \pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-i\omega\left[(t-t') \mp \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right]\right) &= \delta\left((t-t') \mp \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right) \\
&= \delta\left(t - \left[t' \pm \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right]\right).
\end{aligned}$$

Somit

$$G^{\pm}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(t - \left[t' \pm \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right]\right).$$

Mit Hilfe dieser Green'schen Funktion ergibt sich die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(t, \vec{x}) = -4\pi F(t, \vec{x})$$

zu

$$\psi^{\pm}(t, \vec{x}) = -4\pi \int c dt' \int d^3x' G^{\pm}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') F(t', \vec{x}').$$

Bemerkung: Die retardierte Green'sche Funktion $G^+(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$: Hier erzwingt die δ -Distribution

$$t = t' + \frac{1}{c} |\vec{x}-\vec{x}'|,$$

d.h. $t > t'$. Das Signal, das von der Quelle am Ort \vec{x}' zur Zeit t' ausgeht, läuft mit Lichtgeschwindigkeit zum Beobachter am Ort \vec{x} und erreicht diesen zur Zeit

$$t = t' + \text{Laufzeit des Signals von } \vec{x}' \text{ nach } \vec{x}.$$

Beschreibt $F(t', \vec{x}')$ eine in Raum und Zeit lokalisierte Quelle, so bedeutet dies im Besonderen, daß für alle $t' < t_{ini}$ und für alle $t > t_{fin}$ die Quelle keinen Beitrag liefert. Wenn zur Zeit $t = -\infty$ bereits ein gewisser Anfangszustand $\psi_{in}(-\infty, \vec{x})$ vorlag (in für "incoming"), dann lautet die vollständige Lösung

$$\psi(t, \vec{x}) = \psi_{in}(t, \vec{x}) - 4\pi \int c dt' \int d^3x' G^+(t, \vec{x}, t', \vec{x}') F(t', \vec{x}').$$

Es ist zwar schon lange bevor die Quelle funkt ein einlaufendes Signal vorhanden, die Quelle liefert aber zusätzliche Beiträge nur dann, wenn t gleich $t' + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ ist. Sie trägt zum Gesamtfeld Ψ nur auf retardierte Weise, d.h. kausal bei.

Die avancierte Green'sche Funktion $G^-(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$: Hier erzwingt die δ -Distribution

$$t = t' - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|,$$

d.h. die Zeit t , zur der der Beobachter etwas wahrnimmt ist früher als die Zeit t' zu der die Quelle funkt. Daher ist t nicht kausal mit t' verknüpft. Die avancierte Green'sche Funktion wird verwendet, falls als Randbedingung nicht das einlaufende Feld Ψ_{in} sondern die auslaufende Lösung Ψ_{out} gegeben ist, die sich zur Zeit $t = \infty$ einstellt. In diesem Fall lautet die vollständige Lösung

$$\Psi(t, \vec{x}) = \Psi_{out}(t, \vec{x}) - 4\pi \int c dt' \int d^3x' G^-(t, \vec{x}, t', \vec{x}') F(t', \vec{x}').$$

14.2 Das Lienard-Wiechert Potential

Ein elektrisch geladenes Teilchen, das im räumlichen Bezugssystem K die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durchläuft, erzeugt außer der punktförmigen Ladungsdichte $\rho(t, \vec{x})$ eine Stromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$, die zu seiner Geschwindigkeit proportional ist:

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= q \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'(t)), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= q \vec{v}(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'(t)). \end{aligned}$$

Somit ist

$$j^\mu(x) = (c\rho, \vec{j}) = qc \int ds u^\mu \delta^4(x - r(s))$$

Diese Stromdichte agiert als Quellterm für das elektromagnetische Feld:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

in Lorenz-Eichung. Eine Lösung für das Viererpotential A^μ ist gegeben durch

$$A^\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} \int d^4x' G^+(x, x') j^\mu(x').$$

Die retardierte Green'sche Funktion lautet

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - \left[t' + \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|\right]\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(c(t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\delta(f(u)) = \sum_i \frac{1}{|f'(u_i)|} \delta(u - u_i),$$

wobei die u_i die einfachen Nullstellen von $f(u)$ sind. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= -\frac{4\pi}{c} \int d^4x' G^+(x, x') j^\mu(x') \\ &= 2q \int ds \int d^4x' \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) u^\mu \delta^4(x' - r(s)) \\ &= 2q \int ds \Theta(x^0 - r^0(s)) \delta((x - r(s))^2) u^\mu(s) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} (x - r(s))^2 \right|_{s=s_0} &= -2(x - r(s))_\nu \left. \frac{d}{ds} r(s)^\nu \right|_{s=s_0} \\ &= -2(x - r(s_0))_\nu u^\nu(s_0) \end{aligned}$$

und daher

$$A^\mu(x) = q \frac{u^\mu(s_0)}{(x - r(s_0)) \cdot u(s_0)}.$$

Diesen Ausdruck nennt man das Lienard-Wiechert Potential.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Green'sche Funktion (Achtung auf Vorzeichen!):

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{c} \delta(t - t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}').$$

Lösung:

$$G^\pm(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi c} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - \left[t' \pm \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'| \right]\right).$$

Lösung für das Viererpotential A^μ :

$$A^\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} \int d^4x' G^+(x, x') j^\mu(x').$$

Anwendung: Das Feld eines geladenen Teilchens:

$$j^\mu(x) = qc \int ds u^\mu \delta^4(x - r(s))$$

Lienard-Wiechert Potential:

$$A^\mu(x) = q \frac{u^\mu(t')}{(x - r(t')) \cdot u(t')}.$$

Bemerkung: $u^\mu(t')$ und $r(t')$ sind bei t' auszuwerten, so daß x auf dem Vorwärtslichtkegel von $r(t')$ liegt.

14.3 Abstrahlung einer beschleunigten Ladung

Motivation:

- Punktladung, die längs einer Achse oszilliert.
- Ladungen auf einer Kreisbahn.
- Synchrotronstrahlung.

Techniken:

- Green'sche Funktionen.
- Fouriertransformation.

- Lösungen der homogenen Gleichung.

- Multipolentwicklung.

Wir bestimmen nun die elektrischen und magnetischen Felder aus dem Potential: Mit

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

ergibt sich zunächst

$$u \cdot (x - r) = u^0(x^0 - r^0) - \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{r}) = \gamma c(t - t') - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{x} - \vec{r}).$$

Wegen $(x - r(t'))^2 = 0$ und $x^0 > r^0(t')$ ist

$$x^0 - r^0 = c(t - t') = |\vec{x} - \vec{r}| = R,$$

wobei R den räumlichen Abstand zwischen dem Aufpunkt x und dem Punkt $r(t')$ auf der Bahnkurve bezeichnet. Weiter definieren wir den Richtungsvektor

$$\hat{n} = \frac{\vec{x} - \vec{r}(t')}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}$$

Damit erhalten wir dann

$$u \cdot (x - r) = \gamma R \left(1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \hat{n} \right)$$

Für die Zeit- und Raumkomponenten von $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ finden wir

$$\Phi = \frac{q}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \hat{n} \right)},$$
$$\vec{A} = \frac{q}{R} \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\left(1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \hat{n} \right)}$$

Bemerkung: Φ und \vec{A} sind Funktionen von $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(t')$ und $\vec{v}(t')$.

Wir möchten nun die elektrischen und magnetischen Felder am Punkte \vec{x} zur Zeit t bestimmen:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A},$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Dies erfordert Differentiation nach den Aufpunktkoordinaten t, x, y und z . Die Potentiale sind aber zur retardierten Zeit

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

gegeben. Wir betrachten

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{R}^2 = \frac{\partial}{\partial t} R^2 = 2R \frac{\partial}{\partial t} R = 2Rc \frac{\partial}{\partial t} (t - t') = 2Rc \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

Andererseits

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{R}^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} - \vec{r}_0(t'))^2 = 2\vec{R} \left(-\frac{\partial}{\partial t'} \vec{r}_0(t') \right) \frac{\partial t'}{\partial t} = -2\vec{R}\vec{v} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

Somit

$$2Rc \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = -2\vec{R}\vec{v} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}\vec{R}}{cR}}$$

Analog findet man indem man

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{R}^2$$

betrachtet, die Beziehung

$$\vec{\nabla}_{t'} = -\frac{\vec{R}}{cR \left(1 - \frac{\vec{v}\vec{R}}{cR} \right)}$$

Somit berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial R_i} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial R_i} \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_i} + \frac{\partial R_i}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned}$$

Man findet nach einer längeren Rechnung:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= q \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) + \frac{q}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^3} \left\{ \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right] \right\}, \\ \vec{B} &= \frac{1}{R} \left(\vec{R} \times \vec{E} \right) = \hat{n} \times \vec{E}. \end{aligned}$$

Bemerkungen: Man schreibt

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{stat} + \vec{E}_{acc}, \\ \vec{E}_{stat} &= q \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right), \\ \vec{E}_{acc} &= \frac{q}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left\{ \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right] \right\}.\end{aligned}$$

\vec{E}_{stat} nennt man statisches oder Geschwindigkeitsfeld. Es ist auch dann vorhanden, wenn sich das Teilchen geradlinig-gleichförmig bewegt. Der zweite Anteil \vec{E}_{acc} nennt man das Beschleunigungsfeld. Es ist proportional zu \dot{v} und verschwindet daher, wenn sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Beachte: Für große Abstände fallen die Felder wie

$$\begin{aligned}E_{stat} &\sim \frac{1}{R^2}, \\ E_{acc} &\sim \frac{1}{R}\end{aligned}$$

ab.

Wir betrachten nun die abgestrahlte Leistung. Für $R \rightarrow \infty$ dominiert der Strahlungsterm und der Poynting'sche Vektor ergibt sich zu

$$\vec{S}(t, \vec{x}) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{acc} \times \vec{B}_{acc} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{acc} \times (\hat{n} \times \vec{E}_{acc}) \approx \frac{c}{4\pi} E_{acc}^2 \hat{n}.$$

Der Poynting'sche Vektor gibt den Energiefluß pro Einheitsfläche pro Einheitszeit t an. Wir interessieren uns für die abgestrahlte Energie pro Raumwinkelelement und pro Einheitszeit t' :

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{c}{4\pi} R^2 |E_{acc}|^2 \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right).$$

Man findet

$$\begin{aligned}\frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{q^2}{4\pi c^3} R^2 \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right) \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^6} \left(\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right]\right)^2 \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right) \frac{1}{(1 - \hat{n}\vec{\beta})^6} \left(\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\beta} \right]\right)^2 \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\left(\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\beta} \right]\right)^2}{(1 - \hat{n}\vec{\beta})^5},\end{aligned}$$

wobei $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

Bemerkung: Dieser Ausdruck ist unabhängig von R . Die gesamte abgestrahlte Leistung erhält man aus

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}.$$

Man erhält die Formel von Lienard:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 \left[\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\vec{v} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Bemerkung: Nur ein beschleunigtes Teilchen strahlt Energie ab. Bewegt es sich mit konstanter Geschwindigkeit, so strahlt es nicht.

Bemerkung 2: Für $v \ll c$ erhält man

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)^2.$$

Bemerkung 3: Anwendungen dieser Formeln:

- Eliminiert klassische Atommodelle.
- Antennen.
- Verlustleistung in Teilchenbeschleunigern.
- Synchrotronstrahlung.

14.4 Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen

Die einfachsten strahlenden Quellen lassen sich durch lokalisierte, oszillierende Ladungs- und Stromdichten modellieren. Lokalisiert bedeutet, daß die Quellen nur ein endliches Gebiet im Raum einnehmen.

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= \rho(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= \vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Man verwendet harmonische Funktionen in komplexer Form. Realistische Quellverteilungen kann man daher durch Fourieranalyse in der Variablen t erhalten.

Verwendet man die Lorenz-Eichung und die retardierte Green'sche Funktion, so erhält man für das Vektorpotential

$$\begin{aligned}\vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|\right) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{i\frac{\omega}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i\omega t} \\ &= \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

Wir betrachten die Strahlung außerhalb der Quellen im Vakuum, daher ist

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Außerdem gilt im Außenraum

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0.$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}), \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}).\end{aligned}$$

Daher berechnet man aus der Stromdichte \vec{j} zunächst \vec{A} und anschliessend daraus \vec{B} und \vec{E} . $\vec{A}(\vec{x})$ ist gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}')$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Abstrahlung einer bewegten Punktladung:

Lienard-Wiechert Potential:

$$A^\mu(x) = q \frac{u^\mu(t')}{(x - r(t')) \cdot u(t')}.$$

Das elektrische Feld setzt sich aus einem Geschwindigkeitsfeld und einem Beschleunigungsfeld zusammen:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{stat} + \vec{E}_{acc}, \\ \vec{E}_{stat} &= q \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right), \\ \vec{E}_{acc} &= \frac{q}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left\{ \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Für das magnetische Feld gilt:

$$\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}.$$

Abstrahlung oszillierender Quellen:

$$\begin{aligned}\rho(t, \vec{x}) &= \rho(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= \vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

Das elektrische und magnetische Feld haben dann ebenfalls diese Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

Das elektrische und das magnetische Feld lassen sich durch das Vektorpotential ausdrücken:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}), \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}).\end{aligned}$$

Für das Vektorpotential haben wir:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}')$$

14.5 Multipolstrahlung

In der Elektrostatik hatten wir die inverse Abstandsfunktion systematisch entwickelt:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

Hier tritt nun anstelle der inversen Abstandsfunktion die Funktion

$$\frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

auf. Die Verallgemeinerung der Entwicklung für $k \neq 0$ lautet

$$\frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

Die Funktionen $j_l(z)$ sind die sphärischen Bessel-Funktionen, die Funktionen $h_l^{(1)}(z)$ die sphärischen Hankel-Funktionen der ersten Art. Diese lassen sich ausdrücken durch

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + in_l(z).$$

Hierbei ist $n_l(z)$ die sphärische Neumann-Funktion. Für $j_l(z)$ und $n_l(z)$ hat man die Formeln

$$j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\sin z}{z},$$

$$n_l(z) = -(-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\cos z}{z}.$$

Außerhalb der Quellen erhält man daher

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi ik}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi').$$

Der Ausdruck

$$\tilde{q}_{lm} = \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

hängt nur von der Quellverteilung ab und stellt eine Verallgemeinerung der Multipolelemente dar. Somit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi ik}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{q}_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Sei d die räumliche Ausdehnung der Quelle und $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge.

In der Nahzone, definiert durch

$$d \ll r \ll \lambda$$

ist das Produkt kr klein gegen 1 und man hat

$$e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx 1.$$

Somit findet man

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int d^3x' r'^l \vec{j}(\vec{x}') Y_{lm}^*(\theta', \varphi').$$

Interpretation: Retardierungseffekte noch zu vernachlässigen. Bis auf die harmonische Zeitabhängigkeit sind \vec{E} und \vec{B} statische Felder.

In der Fernzone, definiert durch

$$d \ll \lambda \ll r$$

kann man nach r'/r entwickeln:

$$|\vec{x}-\vec{x}'| \approx r - \hat{n} \cdot \vec{x}', \quad \hat{n} = \frac{\vec{x}}{r}.$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &\approx \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} \vec{j}(\vec{x}') \\ &= \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \int d^3x' (\hat{n} \cdot \vec{x}')^n \vec{j}(\vec{x}'). \end{aligned}$$

14.6 Dipolstrahlung

Wir betrachten nun den $l=0$ -Term in der Multipolentwicklung. Mit

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad h_0^{(1)} = \frac{e^{ikr}}{ikr}, \quad Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

findet man

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{\sin(kr')}{kr'}$$

Ist die Quelle nahezu punktförmig, d.h. gilt $d \ll \lambda$, so folgt $kr' \ll 1$ und man kann

$$\frac{\sin(kr')}{kr'} \approx 1$$

setzen. Ferner folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\vec{x}) e^{-i\omega t}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) - i\omega \rho(\vec{x}) &= 0,\end{aligned}$$

Mittels einer partiellen Integration findet man dann

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') = -\frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \vec{x}' (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) = -\frac{i\omega e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}') \\ &= -\frac{ike^{ikr}}{r} \vec{d}.\end{aligned}$$

Zur Erinnerung

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Die Felder berechnet man mittels

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{x} \times \vec{d}, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x} + \frac{e^{ikr}}{r^3} (1 - ikr) [3\hat{x}(\hat{x} \cdot \vec{d}) - \vec{d}].\end{aligned}$$

Für die zeitabhängigen Felder hat man dann

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

Diskussion: Dipol in der Fernzone. Für große Abstände gilt

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{x} \times \vec{d}, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x}.\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Beide Felder schwingen in Phase.
- Die Beträge der Felder sind von der gleichen Größenordnung.
- Beide Felder stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \hat{x} .
- Beide Felder fallen mit $1/r$ ab.

Der Dipol in der Nahzone: Da der Dipol als punktförmig vorausgesetzt wurde, ist r immer noch groß gegenüber d , andererseits ist r nun aber klein gegenüber λ :

$$d \ll r \ll \lambda.$$

Die Näherung $kr' \ll 1$ ist weiterhin gültig, außerdem gilt nun auch $kr \ll 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= i \frac{k}{r^2} \hat{x} \times \vec{d}, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{r^3} \left[3\hat{x} (\hat{x} \cdot \vec{d}) - \vec{d} \right].\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Abgesehen von der harmonischen Zeitabhängigkeit ist das elektrische Feld gleich dem eines statischen elektrischen Dipols.
- Der Betrag von \vec{B} ist um einen Faktor kr kleiner als der von \vec{E} , das elektrische Feld dominiert in der Nahzone.
- Die beiden Felder haben eine Phasenverschiebung von $\pi/2$.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Multipolstrahlung:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi ik}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{q}_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\tilde{q}_{lm} = \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Dipolstrahlung ($l = 0$):

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{ike^{ikr}}{r} \vec{d}.$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{x} \times \vec{d},$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x} + \frac{e^{ikr}}{r^3} (1 - ikr) \left[3\hat{x}(\hat{x} \cdot \vec{d}) - \vec{d}\right].$$

Erläuterungen zu komplexen Feldern: Wir hatten die harmonische Zeitabhängigkeit als

$$e^{-i\omega t}$$

angenommen. Da

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

erhält man die physikalischen Felder durch die Bildung des Realteils:

$$\operatorname{Re} e^{-i\omega t} = \cos(\omega t)$$

Vorteile der komplexen Notation: Vereinfachte Rechenregeln:

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

ist einfacher als

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Desweiteren ist die exponentielle Abhängigkeit besonders geeignet für die Fourieranalyse.

Wir betrachten noch die Bestimmung des magnetischen Feldes der Dipolstrahlung in der Nahzone ($kr \ll 1$): Wir hatten

$$\vec{B}_{phys}(t, \vec{x}) = \operatorname{Re} \vec{B}(t, \vec{x}),$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t},$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{x} \times \vec{d},$$

Also

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{phys}(t, \vec{x}) &= \frac{k^2}{r} (\hat{x} \times \vec{d}) \operatorname{Re} \left[\left(1 - \frac{1}{ikr} \right) e^{ikr - i\omega t} \right] \\
 &= \frac{k^2}{r} (\hat{x} \times \vec{d}) \left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \\
 &\approx -\frac{k}{r^2} (\hat{x} \times \vec{d}) \sin(kr - \omega t) \\
 &= \operatorname{Re} \left[i \frac{k}{r^2} (\hat{x} \times \vec{d}) e^{ikr - i\omega t} \right]
 \end{aligned}$$

14.7 Elektromagnetische Wellen

Wir betrachten nun noch Lösungen der homogenen Gleichung

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0.$$

Wir wählen wieder die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

Daher erhält man

$$\square A^\mu = 0.$$

Ausgeschrieben erhält man

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A^\mu = 0.$$

Behauptung: Das elektrische und das magnetische Feld erfüllen ebenfalls die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} &= 0, \\
 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} &= 0.
 \end{aligned}$$

Wir beweisen diese Aussage für das elektrische Feld: Wir nehmen die Rotation der zweiten Maxwell'schen Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0.$$

Nun ist

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}.$$

Der erste Term verschwindet aufgrund von $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Weiter folgt aus der vierten Maxwell'schen Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}.$$

Daher

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0.$$

Bemerkung: Die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) f(t, \vec{x}) = 0$$

ist linear in der gesuchten Funktion $f(t, \vec{x})$. Daher gilt das Superpositionsprinzip: Sind f_1 und f_2 Lösungen der Wellengleichung, so ist auch

$$c_1 f_1(t, \vec{x}) + c_2 f_2(t, \vec{x})$$

eine Lösung ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$). Als Lösung findet man

$$f_k(t, \vec{x}) = \exp(-i\omega t \pm i\vec{k} \cdot \vec{x}),$$

wobei

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}.$$

Der Vektor \vec{k} ist der Wellenvektor, sein Betrag k heißt Wellenzahl. Setzt man

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

so findet man die bekannte Relation

$$c = \lambda\nu.$$

Wählt man den Wellenvektor entlang der z -Achse

$$\vec{k} = k\hat{e}_z,$$

dann lautet die allgemeine Lösung für das elektrische Feld:

$$f_k = c_1 e^{ik(z-ct)} + c_2 e^{ik(z+ct)}$$

Die beiden Terme unterscheiden sich durch die Laufrichtung – in Richtung der z -Achse oder entgegengesetzt dazu. Legen wir eine Ausbreitungsrichtung fest, so lauten die Lösungen für das elektrische und magnetische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\epsilon}_E e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \\ \vec{B} &= \vec{\epsilon}_B e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}.\end{aligned}$$

Die Vektoren $\vec{\epsilon}_E$ und $\vec{\epsilon}_B$ sind konstante Vektoren, man nennt sie Polarizationsvektoren. Wir betrachten die Divergenz des \vec{E} - und des \vec{B} -Feldes:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \vec{\epsilon}_E\cdot\vec{\nabla}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = i(\vec{\epsilon}_E\cdot\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= \vec{\epsilon}_B\cdot\vec{\nabla}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = i(\vec{\epsilon}_B\cdot\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0,\end{aligned}$$

also

$$\vec{\epsilon}_E\cdot\vec{k} = 0, \quad \vec{\epsilon}_B\cdot\vec{k} = 0,$$

d.h. $\vec{\epsilon}_E$ und $\vec{\epsilon}_B$ stehen zur Ausbreitungsrichtung senkrecht. Weiter folgt aus

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0,$$

die folgende Relation:

$$\begin{aligned}k\hat{n}\times\vec{\epsilon}_E - \frac{\omega}{c}\vec{\epsilon}_B &= 0, \\ \vec{\epsilon}_B &= \hat{n}\times\vec{\epsilon}_E,\end{aligned}$$

d.h. $\vec{\epsilon}_E$ und $\vec{\epsilon}_B$ stehen zueinander senkrecht. Das elektromagnetische Feld besitzt daher zwei Einstellungsmöglichkeiten für die Polarisation: Beide stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Bemerkung: In der Quantenelektrodynamik wird ein Photon durch ein Spin 1 Feld beschrieben. Im Allgemeinen hat ein Spin 1 Teilchen drei Einstellungsmöglichkeiten, $m = \pm 1$ und $m = 0$. Für ein Photon tritt nur die Rechts- bzw. Linkspolarisation auf.

Seien $\vec{\epsilon}_1$ und $\vec{\epsilon}_2$ zwei (reelle) Polarisationsvektoren, die zueinander senkrecht stehen und darüberhinaus orthogonal zur Ausbreitungsrichtung sind. Die allgemeine Lösung für das elektrische Feld läßt sich dann schreiben als

$$\vec{E} = \vec{\epsilon}_1 e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)} + \vec{\epsilon}_2 e^{i\alpha} e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}.$$

Im allgemeinen beschreibt diese Formel eine elliptische Polarisation. Spezialfälle sind die lineare und die zirkulare Polarisation.

Wir haben bisher nur Lösungen mit einer bestimmten Frequenz ω betrachtet. Die allgemeine Lösung ergibt sich als Überlagerung verschiedener Frequenzen:

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 e^{i\alpha}) e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

mit $k = \omega/c$.

14.8 Die Wellengleichung in Materie

Im einfachsten Fall sind nichtleitende Medien elektromagnetisch homogen und isotrop. Sie können daher durch zwei skalare Materialgrößen, die Dielektrizitätskonstante ϵ und die magnetische Permeabilität μ beschrieben werden, die unabhängig von der Frequenz ω sind. Man findet die Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} &= 0, \\ \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Somit

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 e^{i\alpha}) e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

mit

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c}.$$

In dispersiven Medien sind μ und ϵ abhängig von der Kreisfrequenz ω :

$$\mu = \mu(\omega), \quad \epsilon = \epsilon(\omega).$$

Wir haben nun

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 e^{i\alpha}) e^{i(k(\omega)\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

mit

$$k(\omega) = |\vec{k}(\omega)| = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} \frac{\omega}{c}.$$

Diese Relation zwischen Wellenzahl und Kreisfrequenz wird Dispersionsrelation genannt. Wie diese Relation genau aussieht hängt von dem betrachteten Medium ab.

15 Grenzen der Elektrodynamik

15.1 Die Selbstenergie

Wir betrachten zwei Punktladungen an den Orten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 . Beide Punktladungen tragen die Elementarladung e . Das Potential ist durch

$$\Phi = \frac{e}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{e}{|\vec{x} - \vec{x}_2|}$$

gegeben, und die Feldstärke ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \\ \vec{E}_j &= -e\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \right).\end{aligned}$$

Die gesamte potentielle Energie des Systems berechnet sich zu

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left(\vec{E}_1^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_2^2 \right).$$

Die Wechselwirkungsenergie ist

$$\begin{aligned}U_{WW} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{e^2}{4\pi} \int d^3x \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \right) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \right) \\ &= -\frac{e^2}{4\pi} \int d^3x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} = e^2 \int d^3x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \\ &= \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}.\end{aligned}$$

für $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ ist dieser Ausdruck endlich. Die beiden anderen Terme bezeichnet man als Selbstenergien. Wegen der Translationsinvarianz ist

$$\frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}_1^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}_2^2.$$

Wir betrachten daher die Selbstenergie eines Teilchens mit Ladung q im Ursprung $\vec{x} = \vec{0}$:

$$U_{selfenergy} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2 = \frac{e^2}{8\pi} \int d^3x \frac{1}{r^4} = \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2}$$

Dieses Integral divergiert für $r \rightarrow 0$. Für eine exakte Behandlung dieses Problems ist zu beachten, daß für kleine Abstände die klassische Elektrodynamik durch eine entsprechende Quantentheorie, die Quantenelektrodynamik (QED) ersetzt werden muß. Es stellt sich jedoch heraus, daß auch in der Quantenelektrodynamik die Selbstenergie divergiert. Die Lösung dieses Problems wurde erst in den letzten 50 Jahren entwickelt und ist unter dem Begriff "Renormierung" bekannt. Die Grundzüge dieser Ideen sollen nun kurz dargestellt werden.

15.2 Regularisierung

Der erste Schritt ist die Einführung eines ad-hoc Regularisierungsschemas, so daß alle Ausdrücke endlich sind. Eine Möglichkeit besteht in der Einführung eines Cut-offs:

$$U_{selfenergy,reg} = \frac{e^2}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2r_0}.$$

15.3 Renormierung

Im zweiten Schritt ersetzt man die unrenormierten Größen durch die renormierten Größen, welche per Definition endlich sind, und Renormierungskonstanten, welche die Divergenzen absorbieren. Im vorliegenden Beispiel würde man die renormierte Energie einführen als

$$U_{renorm} = U - \delta U,$$

und δU zum Beispiel als

$$\delta U = \frac{e^2}{r_0}$$

wählen.

Bemerkung: Der Gegenterm δU absorbiert alle Divergenzen, die Aufteilung endlicher Terme zwischen δU und U_{renorm} ist aber beliebig. Eine bestimmte Wahl dieser Aufteilung legt ein Renormierungsschema fest. In der Quantenfeldtheorie verwendet man eine multiplikative Renormierung für alle fundamentalen Parameter. So zum Beispiel für die Elementarladung:

$$e = Z_e e_{renorm}.$$

Im Allgemeinen werden alle Größen die in der Lagrangedichte bzw. Lagrangefunktion vorkommen, renormiert. Für die Wirkung

$$S = -mc \int_a^b ds - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu A_\mu(x),$$

sind dies die Größen A^μ , m und q .

15.4 Die Renormierungsgruppengleichung

Regularisierung und Renormierung führen technische Parameter ein, wie zum Beispiel der Cut-off r_0 oder Parameter, die beschreiben wie endliche Terme zwischen den Renormierungskonstanten und den renormierten Größen aufgeteilt werden. Eine wichtige Aussage ist, daß die unrenormierten Größen von diesen Parametern unabhängig sind. Verwendet man zum Beispiel die Cut-off-Regularisierung, so gilt

$$\frac{d}{dr_0} e = 0.$$

Mit $e = Z_e e_{renorm}$ erhält man

$$\frac{d}{dr_0} e_{renorm} = -e_{renorm} \frac{d}{dr_0} \ln Z_e.$$

Diese Gleichung nennt man die Renormierungsgruppengleichung. Sie gibt die Variation der renormierten Ladung mit der Skala r_0 an.

Zusammenfassung der Elektrodynamik

Wirkung:

$$S = S_{\text{Teilchen}} + S_{\text{Felder}} + S_{\text{WW}},$$

mit

$$\begin{aligned} S_{\text{Teilchen}} &= -mc \int_a^b ds, \\ S_{\text{Felder}} &= -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ S_{\text{WW}} &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned}$$

Feldstärketensor:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu(x).$$

Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x) F_\tau^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right].$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu.$$

16 Allgemeine Relativitätstheorie

Weiterführende Literatur:

- F. Scheck, Theoretische Physik 3 (Klassische Feldtheorie), 2. Auflage, Springer
- L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Band II, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag
- M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Institute of Physics
- S. Carroll, Spacetime and Geometry, Addison Wesley

Wir betrachten zunächst die Größenordnung der Gravitation im Vergleich zur elektromagnetischen Kraft: Die gravitative Wechselwirkung zwischen einem Proton und einem Antiproton beträgt

$$F_G = -\frac{Gm_p^2}{r^2}\hat{r},$$

wobei die Newton'sche Konstante G den Wert

$$G = (6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

hat. Zum Vergleich: Die Coulombkraft beträgt

$$F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}\hat{r}.$$

Für das Verhältnis der beiden Kräfte findet man

$$\left| \frac{F_G}{F_C} \right| = \frac{4\pi\epsilon_0 G m_p^2}{e^2} = 0.81 \cdot 10^{-36}.$$

Die Gravitation ist die schwächste der bekannten Kräfte.

Bemerkung: Im Gegensatz zur elektrischen Kraft ist die Gravitation immer anziehend.

Dimensionslose Größen:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = 0.0072973 = \frac{1}{137.036},$$

$$\alpha_G = \frac{G m_p^2}{\hbar c} = 5.9 \cdot 10^{-39}.$$

Planck-Masse:

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.221 \cdot 10^{19} \text{ GeV} = 2.177 \cdot 10^{-8} \text{ kg}.$$

Die Planck-Masse ist wesentlich größer als die Massen der heute bekannten Elementarteilchen.

Planck-Länge:

$$\lambda_{Pl} = \frac{2\pi\hbar c}{M_{Pl}c^2} = (2\pi)1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m}.$$

Die Planck-Länge ist kürzer als die typische Reichweite der Teilchenkräfte ($\approx 10^{-18} \text{ m}$).

Das Äquivalenzprinzip: Wir betrachten zunächst ein Teilchen im Gravitationsfeld in der nicht-relativistischen Mechanik. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$L = \frac{1}{2}m_T v^2 - m_S \phi,$$

wobei m_T die Träge Masse des Teilchens bezeichne, und m_S die schwere Masse des Teilchens bezeichne. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m_T \frac{d}{dt} \vec{v} = -m_S \vec{\nabla} \phi.$$

Experimentell ist bekannt, daß $m_T = m_S$ gilt. Dies ist die schwache Formulierung des Äquivalenzprinzips: Die schwere und die träge Masse sind gleich. Daher:

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = -\vec{\nabla} \phi.$$

Betrachte eine Anzahl von Probeteilchen in einem homogenen und zeitlich konstanten Gravitationsfeld. In einem Inertialsystem K lauten die Bewegungsgleichungen:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}^{(i)} = m_i \vec{g} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

Geht man von dem Inertialsystem K über zu einem mit \vec{g} gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem K' ,

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2,$$

so lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{y}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

Starke Version des Äquivalenzprinzips: In jedem Punkt x der Raumzeit M kann man immer ein lokales Inertialsystem finden derart, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung $U \in M$ von x die Bewegungsgleichungen genau die aus der speziellen Relativitätstheorie bekannte Form annehmen, d.h. die Existenz eines Gravitationsfeldes kann durch lokale Experimente alleine nicht nachgewiesen werden.

Bemerkung: Die schwache Version des Äquivalenzprinzips bezieht sich nur auf die Bewegungsgesetze frei fallender Körper, die starke Version bezieht sich auf alle physikalischen Phänomene.

Im folgenden sei

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die bekannte Metrik der flachen Minkowski Raum-Zeit. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Metrik eine ortsabhängige Funktion. Eine mathematisch präzise Formulierung des starken Äquivalenzprinzips lautet: In jedem Punkt x_0 der Raumzeit kann man ein Bezugssystem so konstruieren, daß

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x_0) &= \eta_{\mu\nu}, \\ \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} \right|_{x_0} &= 0. \end{aligned}$$

Solche Bezugssysteme werden Gauß'sche Koordinaten oder Normalkoordinaten genannt.

16.1 Riemann'sche Geometrie

Wir betrachten die Transformation eines Koordinatensystems x^0, x^1, x^2, x^3 in ein anderes x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 :

$$x^\mu = f^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3).$$

Bei einer Koordinatentransformation transformieren sich die Differentiale der Koordinaten gemäß

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu.$$

Als kontravarianter Vierervektor wird jede Gesamtheit von vier Größen A^μ bezeichnet, die sich bei Koordinatentransformationen wie diese Differentiale verhalten:

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu.$$

Es sei ϕ eine skalare Funktion. Die Ableitungen $\partial\phi/\partial x^\mu$ transformieren sich bei dem Übergang zu einem anderen Koordinatensystem nach der Formel

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}.$$

Als kovarianter Vierervektor wird jede Gesamtheit von vier Größen A_μ bezeichnet, die sich bei Koordinatentransformationen wie die Ableitung eines Skalars verhalten:

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu$$

Ein Tangentialvektor läßt sich in jedem Punkt als Linearkombination der Basisvektoren \hat{e}_μ darstellen:

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu.$$

Man verwendet für die Basisvektoren auch die Schreibweise

$$\partial_\mu = \hat{e}_\mu.$$

Ein Tensorfeld ordnet jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Vektor zu.

Dual zu einem Vektorfeld sind Eins-Formen. Sie ordnen an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einem Vektor eine (reelle oder komplexe) Zahl zu. Als Basis für den Raum der Einsformen verwendet man die Differentiale dx^μ :

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu.$$

Die Dualität zwischen Vektorfeldern und Einsformen impliziert

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu.$$

Ein Tensorfeld mit r kontravarianten und s kovarianten Indizes bildet am Punkt $x \in M$ r Einsformen und s Tangentialvektoren auf eine reelle Zahl ab.

$$(T_s^r)_x : (T_x^* M)^r \times (T_x M)^s \rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s \rightarrow (T_s^r)_x(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s).$$

Koordinatendarstellung:

$$t_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r}(x) = (T_s^r)_x(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}, \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_s}).$$

Basisdarstellung eines Tensorfeldes:

$$T_s^r = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r=0}^{D-1} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_s=0}^{D-1} t_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r}(x) (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r}) \otimes (dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}).$$

Beispiel: Ein $(0, 2)$ -Tensorfeld ist gegeben durch

$$g = \sum_{\mu, \nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Definition einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Riemann'sche Metrik g auf M ist ein $(0, 2)$ -Tensorfeld auf M , daß für jeden Punkt $x \in M$ folgende Eigenschaften hat:

$$g_x(U, V) = g_x(V, U) \\ g_x(U, U) \geq 0, \text{ Gleichheit gilt falls } U = 0,$$

wobei $U, V \in T_x M$ und $g_x = g|_x$.

Kurz gefasst bedeutet dies, daß g_x eine symmetrische positiv-definite Bilinearform ist.

Eine Metrik g nennt man semi-Riemann'sche Metrik, falls gilt

$$g_x(U, V) = g_x(V, U),$$

falls $g_x(U, V) = 0$ für alle $U \in T_x M$ gilt, dann ist $V = 0$.

Eine Mannigfaltigkeit mit einer semi-Riemann'schen Metrik nennt man eine semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit.

Bemerkung: Da die Metrik symmetrisch ist, sind die Eigenwerte von $g_{\mu\nu}$ reell. Für eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit sind alle Eigenwerte positiv, Für eine semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit können auch einige Eigenwerte negativ sein. Mannigfaltigkeit auf denen $g_{\mu\nu}$ genau einen positiven Eigenwert (und $(D - 1)$ negative Eigenwerte) hat, bezeichnet man als Lorentz-Mannigfaltigkeit.

Sei (U, φ) eine Karte von M und $\{x^\mu\}$ die Koordinaten. Man schreibt die Metrik als

$$g_x = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu$$

wobei wieder die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wurde.

Das Inverse von $g_{\mu\nu}$ wird mit $g^{\mu\nu}$ bezeichnet.

$$g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = g^{\nu\rho} g_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu$$

Die Metrik induziert einen Isomorphismus zwischen $T_x M$ und $T_x^* M$, der durch

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu \quad U^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu$$

wobei $U^\mu \in T_x M$ und $\omega_\mu \in T_x^* M$.

16.2 Die kovariante Ableitung

In flachen Raumzeiten bilden die Ableitungen eines Vektors

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu$$

einen Tensor. In krummlinigen Koordinaten gilt dies jedoch nicht mehr. Man vergleicht hier einen Vektor an zwei verschiedenen Orten.

Definition eines affinen Zusammenhangs: Ein affiner Zusammenhang ist eine Abbildung ∇

$$\begin{aligned} \nabla &: \text{Vect}(M) \times \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y, \end{aligned}$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned}\nabla_{(X+Y)}Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ \nabla_{(fX)}Y &= f\nabla_X Y \\ \nabla_X(Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ \nabla_X(fY) &= X(f)Y + f\nabla_X Y\end{aligned}$$

wobei $f \in F(M)$ und $X, Y, Z \in \text{Vect}(M)$.

Sei (U, φ) eine Karte mit den Koordinaten $x = \varphi(p)$. Man definiert D^3 Funktionen, die als Zusammenhangskoeffizienten $C^\mu_{\nu\lambda}$ bezeichnet werden, durch

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = e_\lambda C^\lambda_{\mu\nu}$$

wobei $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ die Koordinatenbasis von $T_p M$ ist. Für Funktionen $f \in F(M)$ definiert man

$$\nabla_X f = X(f) = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)$$

Dann hat $\nabla_X(fY)$ die Form der Leibnitz-Regel

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f(\nabla_X Y)$$

Weiter setzt man für Tensoren

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$$

Im weiteren wird die Notation

$$\nabla_\mu = \nabla_{e_\mu}$$

verwendet. Man beachte, daß

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu e_\nu) = X^\mu \left(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} e_\nu + Y^\nu \nabla_\mu e_\nu \right) \\ &= X^\mu \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + Y^\nu C^\lambda_{\mu\nu} \right) e_\lambda\end{aligned}$$

gilt. $\nabla_X Y$ ist unabhängig von der Ableitung von X . Daher betrachtet man

$$\nabla_\mu = \nabla_{\hat{e}_\mu}$$

und bezeichnet dies als kovariante Ableitung.

Paralleltransport: Falls

$$\nabla_V X = 0$$

gilt, sagt man daß der Vektor entlang einer Kurve, die durch V beschrieben ist, parallel transportiert worden ist.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit:

$$g = \sum_{\mu, \nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

$$\begin{aligned} g_x(U, V) &= g_x(V, U), \\ \text{falls } g_x(U, V) &= 0 \text{ f\u00fcr alle } U \in T_x M \text{ gilt, dann ist } V = 0. \end{aligned}$$

Affiner Zusammenhang gegeben durch

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = e_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda$$

Der affine Zusammenhang definiert den Paralleltransport. Ein Vektorfeld X wird entlang einer Kurve γ parallel transportiert, falls

$$\nabla_V X = 0$$

gilt. Hierbei ist V der Tangentenvektor an die Kurve.

Kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu f &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \\ \nabla_\mu (A^\nu e_\nu) &= \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\mu} + A^\nu C_{\mu\nu}^\lambda \right) e_\lambda, \\ \nabla_\mu (T_1 \otimes T_2) &= (\nabla_\mu T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_\mu T_2). \end{aligned}$$

Weiter mit der kovarianten Ableitung: Wir berechnen die kovariante Ableitung von dx^μ : Zun\u00e4chst haben wir f\u00fcr eine beliebige Einsform ω und ein beliebiges Vektorfeld Y

$$\nabla_\mu \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_\mu \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_\mu Y \rangle$$

Setzt man nun $\omega = dx^\nu$ und $Y = e_\lambda$, so findet man

$$\nabla_\mu dx^\nu = -C_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda$$

Rechenregeln: Sei

$$T = T_{\kappa_1 \dots \kappa_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_p} dx^{\kappa_1} \dots dx^{\kappa_q}$$

ein Tensor des Typs (p, q) . Für die Koeffizienten von $\nabla_\mu T$ findet man

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu T)_{\kappa_1 \dots \kappa_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \partial_\mu T_{\kappa_1 \dots \kappa_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + C_{\mu\rho}^{\lambda_1} T_{\kappa_1 \dots \kappa_q}^{\rho\lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots + C_{\mu\rho}^{\lambda_p} T_{\kappa_1 \dots \kappa_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}\rho} \\ &\quad - C_{\mu\kappa_1}^\rho T_{\rho\kappa_2 \dots \kappa_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - \dots - C_{\mu\kappa_q}^\rho T_{\kappa_1 \dots \kappa_{q-1}\rho}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}. \end{aligned}$$

Im Besonderen gilt

$$(\nabla_\mu g)_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - C_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\rho} - C_{\mu\rho}^\kappa g_{\nu\kappa}$$

16.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Falls die Mannigfaltigkeit eine Metrik besitzt, können wir zusätzliche Bedingungen an den affinen Zusammenhang stellen: Wir verlangen, daß die Metrik $g_{\mu\nu}$ kovariant konstant ist, d.h. falls zwei Vektoren X und Y entlang einer Kurve paralleltransportiert werden, daß dann das Skalarprodukt zwischen ihnen sich nicht ändert. Durch eine Formel ausgedrückt bedeutet dies

$$\nabla_V (g(X, Y)) = 0$$

Da dies für alle Kurven und Vektoren gilt, folgt:

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0$$

In diesem Fall lassen sich die Zusammenhangskoeffizienten $C_{\mu\nu}^\kappa$ wie folgt schreiben:

$$C_{\mu\nu}^\kappa = \Gamma_{\mu\nu}^\kappa + K_{\mu\nu}^\kappa$$

Die Größen $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ nennt man die Christoffel-Symbole. Sie sind symmetrisch in $\mu \leftrightarrow \nu$. Die Größen $K_{\mu\nu}^\kappa$ bezeichnet man als Kontorsionskoeffizienten. Man findet

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa &= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ K_{\mu\nu}^\kappa &= \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\kappa + T_{\mu\nu}^\kappa + T_{\nu\mu}^\kappa) \\ T_{\mu\nu}^\kappa &= C_{\mu\nu}^\kappa - C_{\nu\mu}^\kappa \end{aligned}$$

$T_{\mu\nu}^\kappa$ ist antisymmetrisch bezüglich der unteren Indizes und wird Torsionstensor genannt.

Einen affinen Zusammenhang nennt man symmetrisch, falls der Torsionstensor verschwindet. Ist dies der Fall, so gilt

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu}^\kappa &= \Gamma_{\mu\nu}^\kappa, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \end{aligned}$$

Theorem: Auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit bzw. semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es einen eindeutigen symmetrischen Zusammenhang, der mit der Metrik kompatibel ist. Diesen Zusammenhang bezeichnet man als Levi-Civita-Zusammenhang.

16.4 Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld

In der speziellen Relativitätstheorie hatten wir für die Wirkung eines freien Teilchens

$$S = -mc \int_a^b ds$$

Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgte die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{ds} u^\mu = 0.$$

Dies läßt sich auch als

$$du^\mu = 0$$

schreiben. Die Verallgemeinerung auf gekrümmte Räume lautet

$$\nabla u^\mu = 0.$$

Mit der Definition der kovarianten Ableitung erhält man

$$du^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu dx^\rho = 0.$$

Teilt man wieder durch ds , so findet man

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Bewegungsgleichung. Die Bewegung des Teilchens wird durch die Größen $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ bestimmt. Da $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$ die Viererbeschleunigung des Teilchens ist, kann man die Größe

$$-m\Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho$$

als die auf Teilchen im Gravitationsfeld wirkende Viererkraft bezeichnen.

16.5 Der Krümmungstensor

Vorbemerkung: Sei

$$X = X^\mu e_\mu = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

ein Vektorfeld. Ein Vektorfeld wirkt auf eine Funktion als Richtungsableitung:

$$X(f) = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f.$$

Sei nun

$$Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

ein weiteres Vektorfeld. Man definiert die Lie-Klammer $[X, Y]$ als

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Diese Lie-Klammer ist wieder ein Vektorfeld, dessen Komponenten durch

$$[X, Y] = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) e_\nu$$

gegeben sind.

Bemerkung: Weder XY noch YX sind Vektorfelder, da sie zweite Ableitungen enthalten. Die Kombination $[X, Y]$ enthält dagegen nur erste Ableitungen und ist daher ein Vektorfeld.

Da die Zusammenhangskoeffizienten $C^\lambda_{\mu\nu}$ keinen Tensor darstellen, können sie keine intrinsische Bedeutung als Maß der Krümmung einer Mannigfaltigkeit haben. Als intrinsische Objekte stehen der Torsionstensor

$$T : \text{Vect}(M) \otimes \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

und der Riemann'sche Krümmungstensor

$$R : \text{Vect}(M) \otimes \text{Vect}(M) \otimes \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M)$$

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

zur Verfügung. Offensichtlich sind R und T anti-symmetrisch in X und Y :

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

$$R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z)$$

Verwendet man die Koordinatendarstellung, so hat man

$$T(e_\mu, e_\nu) = T^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda,$$

$$R(e_\mu, e_\nu, e_\lambda) = R^\kappa_{\lambda\mu\nu} e_\kappa.$$

Bemerkung: Man achte auf Stellung des Index λ !

Man findet:

$$T^\lambda_{\mu\nu} = C^\lambda_{\mu\nu} - C^\lambda_{\nu\mu},$$

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu C^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu C^\kappa_{\mu\lambda} + C^\eta_{\nu\lambda} C^\kappa_{\mu\eta} - C^\eta_{\mu\lambda} C^\kappa_{\nu\eta}.$$

Wir werden im folgenden nur den Levi-Civita-Zusammenhang betrachten. Hier verschwindet der Torsionstensor und die Zusammenhangskoeffizienten $C_{\mu\nu}^{\kappa}$ sind gleich den Christoffel-Symbolen $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$:

$$C_{\mu\nu}^{\kappa} = \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}).$$

Der Riemann'sche Krümmungstensor läßt sich dann durch die Christoffel-Symbole ausdrücken:

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\kappa}.$$

Bemerkung: Für $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\rho}R_{\lambda\mu\nu}^{\rho}$ findet man

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\right) + g_{\xi\eta}\left(\Gamma_{\kappa\nu}^{\xi}\Gamma_{\lambda\mu}^{\eta} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\xi}\Gamma_{\lambda\nu}^{\eta}\right).$$

Der Tensor $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ hat die folgenden Symmetrien:

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\kappa\lambda\nu\mu}, \\ R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \\ R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\mu\nu\kappa\lambda}. \end{aligned}$$

Als Ricci-Tensor definiert man die folgende Verjüngung des Krümmungstensors:

$$Ric_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$$

Der Ricci-Tensor ist symmetrisch:

$$Ric_{\mu\nu} = Ric_{\nu\mu}.$$

Die skalare Krümmung ist definiert als

$$R = g^{\mu\nu}Ric_{\mu\nu}$$

Der Einstein'sche Tensor wird als die folgende Kombination definiert:

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Die Identitäten von Bianchi:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} + R_{\mu\nu\lambda}^{\kappa} + R_{\nu\lambda\mu}^{\kappa} &= 0, \\ (\nabla_{\kappa}R)_{\lambda\mu\nu}^{\rho} + (\nabla_{\mu}R)_{\lambda\nu\kappa}^{\rho} + (\nabla_{\nu}R)_{\lambda\kappa\mu}^{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Kontrahiert man in der zweiten Identität ρ und μ so findet man

$$(\nabla_{\kappa}Ric)_{\lambda\nu} + (\nabla_{\mu}R)_{\lambda\nu\kappa}^{\mu} - (\nabla_{\nu}Ric)_{\lambda\kappa} = 0.$$

Kontrahiert man noch λ und ν , so findet man

$$\nabla_{\kappa}R - 2\nabla^{\mu}Ric_{\mu\kappa} = 0.$$

Anders ausgedrückt erhält man

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\kappa} = 0.$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Christoffel-Symbole:

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu})$$

Krümmungstensor:

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\mu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\nu\eta}$$

Für $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\rho}R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$ gilt:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\right) + g_{\xi\eta}\left(\Gamma^{\xi}_{\kappa\nu}\Gamma^{\eta}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\xi}_{\kappa\mu}\Gamma^{\eta}_{\lambda\nu}\right)$$

Symmetrien:

$$\begin{aligned}R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\kappa\lambda\nu\mu}, \\R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \\R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\mu\nu\kappa\lambda}.\end{aligned}$$

Ricci-Tensor:

$$Ric_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$$

Der Ricci-Tensor ist symmetrisch:

$$Ric_{\mu\nu} = Ric_{\nu\mu}$$

Skalare Krümmung:

$$R = g^{\mu\nu}Ric_{\mu\nu}$$

Der Einstein'sche Tensor:

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Es gilt:

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\kappa} = 0$$

Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationsfeld:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\rho}}{ds} = 0$$

16.6 Die Einstein'schen Feldgleichungen

Wir betrachten zunächst den Newton'schen Grenzfall, also ein schwaches stationäres Gravitationsfeld. Die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen ist allgemein

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0.$$

Für die Vierergeschwindigkeit gilt

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Für eine sehr langsame Bewegung gilt

$$\left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| \ll \left| \frac{dx^0}{ds} \right|.$$

Daher vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{00} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0.$$

Für die Christoffel-Symbole findet man

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00},$$

da nach Voraussetzung das Gravitationsfeld statisch sein soll. Setzt man nun

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, so ergibt sich

$$\Gamma^\mu_{00} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00},$$

Mit $ds = c d\tau$ ergibt sich für die räumlichen Komponenten der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} c^2 \vec{\nabla} h_{00} = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi,$$

so findet man, daß das Gravitationspotential durch

$$\Phi = \frac{1}{2} c^2 h_{00}$$

gegeben ist.

Heuristische Herleitung der Einstein'schen Gleichungen: Der Ausgangspunkt ist, daß die Masse die Quelle des Gravitationsfeldes ist.

$$\begin{aligned}\text{Masse} &= \text{Ruheenergie} \\ &= 0\text{-Komponente eines Vierervektors.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Massendichte} &= \text{Energiedichte} \\ &= 00\text{-Komponente eines Vierer-Tensors.}\end{aligned}$$

Daher erwartet man daß der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ die Quellen des Gravitationsfeldes beschreibt. Im Minkowski-Raum folgt aus der Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

In allgemeinen Koordinaten lautet diese Gleichung

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Daher sucht man eine Gleichung, die allgemein kovariant ist, und $T^{\mu\nu}$ enthält.

Weiter ist bekannt, daß das Newton'sche Gravitationspotential die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho,$$

wobei die Massendichte ρ sich durch die 00-Komponente des Energie-Impuls-Tensors ausdrücken läßt:

$$\rho = \frac{1}{c^2}T^{00}.$$

Weiter hat man

$$\begin{aligned}\Phi &\approx \frac{1}{2}c^2 h_{00}, \\ g_{00} &= 1 + h_{00},\end{aligned}$$

und daher findet man

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}.$$

Daher sucht man eine Gleichung der Form

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

wobei der Tensor $\tilde{G}_{\mu\nu}$ die Metrik mit Ableitungen bis zur zweiten Ordnung enthält.

Gesucht ist also $\tilde{G}_{\mu\nu}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\tilde{G}_{\mu\nu}$ ist ein Tensor;
2. $\tilde{G}_{\mu\nu}$ enthält Ableitungen der Metrik bis zur 2. Ordnung, linear in g'' oder quadratisch in g' ;
3. $\tilde{G}_{\mu\nu}$ ist symmetrisch, da $T_{\mu\nu}$ symmetrisch ist;
4. $\nabla^\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = 0$, da $T_{\mu\nu}$ erhalten ist;
5. Für schwache stationäre Gravitationsfelder gilt

$$\tilde{G}_{00} \rightarrow \Delta g_{00}.$$

Die ersten beiden Punkte implizieren, daß nur $Ric_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}R$ zur Verfügung stehen, daher

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = c_1 Ric_{\mu\nu} + c_2 g_{\mu\nu}R.$$

Damit ist auch Bedingung 3 erfüllt. Wir wissen schon, daß für den Einstein'schen Tensor

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

gilt, daher muß wegen $G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ gelten:

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1.$$

Aus 5 folgt, daß die Proportionalitätskonstante durch

$$c_1 = 1$$

gegeben ist. Daher

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$$

und die Einstein'schen Feldgleichungen lauten

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \\ Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

Eindeutigkeit der Einstein'schen Gleichungen: Annahmen 1-4 sind unverzichtbar, aber möglicherweise sind kleine Abweichungen vom Newton'schen Gravitationsgesetz bisher unbeobachtet geblieben. Es läßt sich zeigen, daß die Einstein'schen Gleichungen eindeutig bis auf einen möglichen Zusatzterm

$$\Lambda g_{\mu\nu}$$

sind. Λ bezeichnet man als kosmologische Konstante, sie wurde von Einstein 1917 eingeführt uns später wieder verworfen ("größte Eselei ..."). Heute gibt es starke Hinweise, daß $\Lambda \neq 0$ ist. Die Einstein'schen Gleichungen mit kosmologischer Konstante lauten:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

In der Gegenwart einer kosmologischen Konstante findet man für den Newton'schen Grenzfall

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Daher impliziert eine nicht-verschwindende kosmologische Konstante Λ eine homogene, statische Energiedichte im Universum von

$$\rho_{vac} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda.$$

16.7 Die Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie

Wir betrachten zunächst das Gravitationsfeld für sich, d.h. ohne weitere Materiefelder. Die Einstein-Hilbert-Wirkung mit einer kosmologischen Konstante lautet:

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda)$$

Hier bezeichnet

$$g = \det g_{\mu\nu}.$$

Wir leiten nun die Bewegungsgleichungen durch die Variation der Metrik ab. Es ist technisch einfacher, anstelle der Variation $\delta g_{\mu\nu}$ die Variation nach der inversen Metrik $g^{\mu\nu}$ durchzuführen. Da

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

ist, folgt

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}.$$

Mit $R = g^{\mu\nu}Ric_{\mu\nu}$ ergeben sich für die Variation der Wirkung drei Terme:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= -\frac{c^3}{16\pi G} \delta \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu}Ric_{\mu\nu} - 2\Lambda) \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G} \left[\underbrace{\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta Ric_{\mu\nu}}_{(\delta S)_1} + \underbrace{\int d^4x \sqrt{-g} Ric_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}}_{(\delta S)_2} + \underbrace{\int d^4x (g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} - 2\Lambda) \delta \sqrt{-g}}_{(\delta S)_3} \right]. \end{aligned}$$

Der zweite Term hat schon die Form eines Ausdruck der mit $\delta g^{\mu\nu}$ multipliziert wird.

Wir betrachten zunächst den ersten Term. Der Ricci-Tensor ist als Kontraktion des Riemann'schen Krümmungstensors definiert, der wiederum durch die Christoffel-Symbole gegeben ist. Man berechnet daher zunächst die Variation des Riemann'schen Krümmungstensors bezüglich der Christoffel-Symbole. Durch eine etwas längere Rechnung findet man

$$\delta R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}).$$

Dann drückt man die Variation $\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ durch $\delta g^{\mu\nu}$ aus:

$$\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[g_{\lambda\mu} \nabla_{\nu} \delta g^{\lambda\kappa} + g_{\lambda\nu} \nabla_{\mu} \delta g^{\lambda\kappa} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\kappa} \delta g^{\alpha\beta} \right].$$

Setzt man ein, so findet man

$$(\delta S)_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} \left[g_{\mu\nu} \nabla^{\sigma} (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\lambda} (\delta g^{\sigma\lambda}) \right].$$

Dieses Integral ist eine kovariante Divergenz und kann daher in ein Randintegral umgeschrieben werden, es trägt zur Variation daher nichts bei.

Wir betrachten nun $(\delta S)_3$: Wir müssen die Variation der Determinante von g berechnen. Hierzu ist folgende Formel hilfreich: Für jede quadratische Matrix mit nicht-verschwindender Determinante gilt:

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M).$$

Variiert man diese Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M).$$

Nimmt man nun für M die Matrix $g_{\mu\nu}$, so erhält man

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}).$$

Somit

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Somit findet man für die Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$\delta S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}.$$

Da dies für beliebige Variationen $\delta g^{\mu\nu}$ gelten soll, folgt

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0,$$

d.h. die Einstein'schen Gleichungen, falls keine weitere Materie vorhanden ist.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Die Einstein'schen Gleichungen:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

Die Einstein-Hilbert-Wirkung:

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda).$$

Weiter mit den Einstein'schen Gleichungen:

Bemerkungen:

- Die Einstein'schen Gleichungen sind nicht-lineare Differentialgleichungen, sie enthalten neben den zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ auch Produkte von ersten Ableitungen und $g_{\mu\nu}$. Daher gilt für die Gravitations kein Superpositionsprinzip.

- Im leeren Raum ist $T_{\mu\nu} = 0$, und daher bei verschwindender kosmologischer Konstante auch $Ric_{\mu\nu} = 0$. Dies impliziert aber nicht notwendigerweise, daß $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ ist, d.h. daß die Krümmung verschwindet. Anmerkung: Für $D = 2$ oder $D = 3$ folgt aus $Ric_{\mu\nu} = 0$ auch $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.

Sind weitere Felder und Materie vorhanden, so lautet die gesamte Wirkung

$$S = S_{EH} + S_{Teilchen} + S_{Felder} + \dots$$

mit

$$S_{Teilchen} = -mc \int_a^b ds,$$

$$S_{Felder} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

In die Einstein'schen Gleichungen geht der Energie-Impuls-Tensor ein. Wir haben schon ein allgemeines Verfahren zur Berechnung des Energie-Impuls-Tensor aus einer Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ kennengelernt:

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi(x) \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \partial_\rho B^{\mu\rho\nu}.$$

Hierbei ist $B^{\mu\rho\nu}$ antisymmetrisch in μ und ρ und so zu bestimmen, daß $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist.

Hier betrachten wir noch ein alternatives Verfahren, daß den Vorteil hat, direkt das richtige und symmetrische Resultat zu liefern. Wir betrachten die Wirkung

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}.$$

Variiert man bezüglich $g^{\mu\nu}$, so erhält man

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \delta \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right] \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \right] \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}}$$

so erhält man

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Es läßt sich zeigen, daß

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \right]$$

mit der ersten Definition des Energie-Impuls-Tensors übereinstimmt. Somit erhält man für die Variation von

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}$$

folgenden Ausdruck:

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Also folgt

$$-\frac{c^3}{16\pi G} \left[Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2c} T_{\mu\nu} = 0,$$

bzw.

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

16.8 Die Schwarzschild-Lösung

Wir betrachten eine kugelsymmetrische Massenverteilung, bei der auch die Bewegung der Materie kugelsymmetrisch ist, d.h. in jedem Punkte muß die Geschwindigkeit in Richtung des Radius liegen. Als Basis von Einsformen verwendet man folgenden Ansatz:

$$\omega^0 = e^{a(r)} c dt, \quad \omega^1 = e^{b(r)} dr, \quad \omega^2 = r d\theta, \quad \omega^3 = r \sin\theta d\varphi.$$

$a(r)$ und $b(r)$ sind zwei noch zu bestimmende Funktionen. Es läßt sich zeigen, daß diese Funktionen zeitunabhängig sind. Man berechnet in mühsamer Arbeit den Einstein'schen Tensor:

$$\begin{aligned} G_{00} &= e^{-2b} \left(\frac{2b'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ G_{11} &= e^{-2b} \left(\frac{2a'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \\ G_{22} &= G_{33} = e^{-2b} \left(a'^2 - a'b' + a'' + \frac{a' - b'}{r} \right). \end{aligned}$$

Alle anderen Komponenten des Einstein'schen Tensor verschwinden. Ausserhalb der Massenverteilung gilt:

$$G_{\mu\nu} = 0.$$

Addiert man G_{00} und G_{11} , so folgt aus $G_{00} + G_{11} = 0$ unmittelbar $a' + b' = 0$. Diese Gleichung führt integriert zu

$$b(r) = -a(r).$$

Eine Integrationskonstante tritt nicht auf, da die Metrik für $r \rightarrow \infty$ in die Minkowski-Metrik übergehen muß und daher

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} b(r) = 0$$

gilt. Man findet nach weiteren Rechenschritten das Resultat

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

wobei der Gravitationsradius r_g durch

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}$$

gegeben ist. Diese Lösung wurde 1916 von K. Schwarzschild gefunden.

Bemerkungen:

- Hängt über r_g nur von der Gesamtmasse des gravitierenden Körpers ab.
- Die Lösung ist gültig für $r > r_g$.
- Die Schwarzschild-Metrik ist statisch.
- Die Metrik wird singular für $r = r_g$. Dies ist allerdings nicht mehr als eine Koordinatensingularität, physikalische Größen wie der Einstein'sche Tensor und der Krümmungstensor sind endlich für $r = r_g$. Physikalisch interpretiert man r_g als Ereignishorizont eines schwarzen Lochs.
- Der Punkt $r = 0$ stellt eine echte Singularität dar.

Anmerkung: Ein triviales Beispiel für eine Koordinatensingularität findet in einer Ebene am Ursprung, fall man Polarkoordinaten verwendet:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}.$$

Offensichtlich ist dies ein Artefakt des verwendeten Koordinatensystems, da in einer Ebene kein Punkt vor einem anderen ausgezeichnet ist.

Beispiele für den Gravitationsradius:

$$\text{Sonne : } m \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \rightarrow r_g = 2.95 \text{ km},$$

$$\text{Erde : } m \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \rightarrow r_g = 0.9 \text{ cm}.$$

Wir betrachten noch die Lichtausbreitung in der Nähe des Gravitationsradius für konstantes θ und φ :

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

Daher

$$\frac{cdt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

Für großes r geht die rechte Seite über in ± 1 , doch für $r \rightarrow r_g$ findet man

$$\lim_{r \rightarrow r_g} \frac{cdt}{dr} = \pm \infty.$$

16.9 Kosmologische Aspekte

Wir betrachten eine Raumzeit, die in den räumlichen Komponenten homogen und isotrop ist, aber in der Zeit evolviert. Die Materie in dieser Raumzeit wird oft als eine perfekte Flüssigkeit modelliert. Der Energie-Impuls-Tensor für eine perfekte Flüssigkeit läßt sich wie folgt plausibel machen: Es sei ρ die Massendichte, p die Druckdichte und u^μ die Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeit. Im Ruhesystem der Flüssigkeit hängt $T^{\mu\nu}$ nur von ρ und p ab:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Form des Energie-Impuls-Tensors für eine perfekte Flüssigkeit ist

$$T^{\mu\nu} = (p + c^2\rho) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}.$$

Das Konzept einer perfekten Flüssigkeit ist allgemein genug, um eine Vielzahl verschiedener physikalischer Situationen zu beschreiben. Die Spezifizierung geschieht durch eine Zustandsgleichung

$$p = p(\rho),$$

die einen Zusammenhang zwischen der Druckdichte und der Massendichte herstellt. Beispiele sind

$$\begin{aligned} p = 0, & \quad \text{Staub (nicht wechselwirkende Galaxien),} \\ p = \frac{1}{3}c^2\rho, & \quad \text{isotropisches Photonengas,} \\ p = -c^2\rho, & \quad \text{Vakuumenergie,} \end{aligned}$$

Die Symmetrieeigenschaften der Raumzeit (Homogenität und Isotropie in den räumlichen Koordinaten) führen zu folgender Form für die Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

Eine Metrik dieser Form bezeichnet man als Robertson-Walker-Metrik. $R(t)$ ist ein noch zu bestimmender Skalierungsfaktor. Die Geometrien lassen sich durch den Parameter κ in drei Klassen wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned} \kappa > 0 & \quad \text{geschlossene Geometrie} \\ \kappa = 0 & \quad \text{räumlich flach} \\ \kappa < 0 & \quad \text{offene Geometrie} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Funktion $R(t)$ verwendet man nun die Einstein'schen Gleichungen und das Modell der perfekten Flüssigkeit für den Energie-Impuls-Tensor. Man findet die Friedmann'schen Gleichungen:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi Gc^2\rho}{3} - \frac{\kappa}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(c^2\rho + 3p)$$

Man bezeichnet die Größe

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R}$$

als Hubble-Parameter. Schlägt man die kosmologische Konstante der Massendichte zu (als ideale Flüssigkeit mit $p = -c^2\rho$), so lautet die erste Gleichung:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi Gc^2\rho}{3} - \frac{\kappa}{R^2},$$

Die kritische Dichte ist durch $\kappa = 0$ definiert, also

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi Gc^2}$$

Man definiert auch oft einen Dichteparameter Ω als

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi Gc^2}{3H^2}\rho.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_c &\leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow \kappa < 0 \leftrightarrow \text{offen,} \\ \rho = \rho_c &\leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow \kappa = 0 \leftrightarrow \text{flach,} \\ \rho > \rho_c &\leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow \kappa > 0 \leftrightarrow \text{geschlossen.} \end{aligned}$$

Zusammenfassung Elektrodynamik und allgemeine Relativitätstheorie

Die Wirkung für elektromagnetische Felder im Minkowski-Raum:

$$S_{Felder} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

Die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen folgen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu(x).$$

Die homogenen Maxwell'schen Gleichungen:

$$\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} = 0.$$

Die Einstein-Hilbert-Wirkung:

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda).$$

Die Einstein'schen Gleichungen:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

Die Identität von Bianchi:

$$\nabla_\kappa R^\rho_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^\rho_{\lambda\nu\kappa} + \nabla_\nu R^\rho_{\lambda\kappa\mu} = 0.$$

17 Klassische Yang-Mills Theorie

Zur Erinnerung: Wir hatten bereits die Elektrodynamik in der Sprache der Differentialgeometrie formuliert. In diesem Zugang assoziiert man zu einem Eichpotential $A_\mu(x)$ die Eins-Form

$$A = i \frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) dx^\mu,$$

Diese Eins-Form definiert die kovariante Ableitung

$$D_A = d + A = d + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu$$

und den Feldstärketensor / die Krümmungsform

$$F = D_A^2 = dA + A \wedge A = dA = i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

$F_{\mu\nu}$ ist der bereits bekannte Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Führt man noch die Hodge-Operation für Differentialformen ein,

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m},$$

so läßt sich die Wirkung für elektromagnetische Felder schreiben als

$$S_{Felder} = \frac{1}{8\pi c} \left(\frac{\hbar c}{e} \right)^2 \int F \wedge *F.$$

17.1 Eichinvarianz

Wie bereits bekannt, besteht in der Elektrodynamik die Freiheit, eine Eichung zu wählen. Physikalische Resultate sind invariant unter Eichtransformationen der Art

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x).$$

Wir können diese Eichtransformationen auch schreiben als

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x) (A_\mu(x) + i\partial_\mu) U(x)^\dagger.$$

wobei

$$U(x) = e^{-i\chi(x)}$$

ein Element der $U(1)$ ist. Die $U(1)$ ist ein Beispiel für eine Lie-Gruppe. Interessant ist die Frage, ob es auch Kräfte in der Natur gibt, die anderen Lie-Gruppen entsprechen. Dies ist in der Tat der Fall. So wird die schwache Wechselwirkung durch eine $SU(2)$ -Gruppe beschrieben, während die starke Wechselwirkung durch eine $SU(3)$ -Gruppe beschrieben wird.

Darüberhinaus impliziert obige Formel, daß wir an jedem Punkt x der Raumzeit ein Element der $U(1)$ wählen können. Hier wird also zu jedem Punkt der Raumzeit eine Kopie der $U(1)$ assoziiert. Die Situation ist analog zu Betrachtungen in der allgemeinen Relativitätstheorie, wo wir zu jedem Punkt der Raumzeit einen Tangentialraum assoziiert haben. Das verallgemeinerte Konstrukt bringt uns zu der Definition eines Faserbündels.

Es sollte noch klar herausgestellt werden, daß die schwache und die starke Wechselwirkung auf dem Niveau der Elementarteilchen auftreten. Hier ist eine Beschreibung basierend auf einer Quantenfeldtheorie unerlässlich. Dies geht jedoch über den Rahmen dieser Vorlesung weit hinaus. Wir beschränken uns daher auf eine "klassische Yang-Mills Theorie", die im selben Verhältnis zur Quantenfeldtheorie steht, wie die klassische Elektrodynamik zur Quantenelektrodynamik.

17.2 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Wie bereits erwähnt, wird die Elektrodynamik durch das Eichpotential $A_\mu(x)$ beschrieben. Die Eichsymmetrie ist durch eine $U(1)$ -Gruppe gegeben. Dies ist eine abelsche Gruppe, deren Elemente durch eine Koordinate φ wie folgt parameterisiert werden können:

$$e^{-i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Dies ist offensichtlich eine Gruppe:

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} &= e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ (e^{-i\varphi})^{-1} &= e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Darüberhinaus ist die $U(1)$ eine ein-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit (eine Kreislinie).

Dies bringt uns zur Definition einer Lie-Gruppe und einer Lie-Algebra:

Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe und gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so daß die Abbildung $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ von $G \times G$ nach G analytisch ist. Eine Lie-Gruppe vereint also zwei mathematische Konzepte: Den algebraischen Aspekt einer Gruppe und den geometrischen Aspekt einer Mannigfaltigkeit.

Eine Lie-Algebra über einen kommutativen Ring K ist ein K -Modul mit einer Abbildung $x \otimes y \rightarrow [x, y]$, die folgende Eigenschaften hat: Für alle $x, y, z \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} [x, x] &= 0 \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 \end{aligned}$$

Die Elemente einer Lie-Gruppe drückt man durch die erzeugenden Generatoren wie folgt aus:

$$g = \exp(-iT^a \alpha_a).$$

Die Generatoren T^a bilden eine Lie-Algebra, d.h. die Kommutatoren von Generatoren lassen sich wieder als Linearkombinationen von Generatoren schreiben:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$$

Bemerkung: In der mathematischen Literatur findet man in der obigen Formel oft keinen expliziten Faktor i . Die Konvention in der physikalischen Literatur, die hier verwendet wird, hat diesen expliziten Faktor i und stellt so sicher, daß die Generatoren hermitesche Matrizen sind.

Bemerkung: Die Lie-Algebra beschreibt die Lie-Gruppe in einer infinitesimalen Umgebung des Einheitslements e .

Beispiele für Lie-Gruppen:

- $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$: die Gruppe der nicht-singulären $n \times n$ Matrizen mit n^2 reellen Parametern ($GL(n, \mathbb{R})$), bzw. $2n^2$ reellen Parametern ($GL(n, \mathbb{C})$).
- $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$: $\det A = 1$; $SL(n, \mathbb{R})$ hat $n^2 - 1$ reelle Parameter; $SL(n, \mathbb{C})$ hat $2(n^2 - 1)$ reelle Parameter.
- $O(n)$: $RR^T = 1$
- $SO(n)$: $RR^T = 1$ und $\det R = 1$.
- $U(n)$: $UU^\dagger = 1$; n^2 reelle Parameter.
- $SU(n)$: $UU^\dagger = 1$ und $\det U = 1$; $n^2 - 1$ reelle Parameter.
- $Sp(n)$: Die symplektischen Gruppen sind definiert als die Invarianz-Gruppe von

$$\sum_{j=1}^n (x_j y_{j+n} - x_{j+n} y_j)$$

Dies wirft natürlich die Frage auf, wie viele verschiedene Typen von Lie-Gruppen es gibt. Lie-Gruppen lassen sich wie folgt klassifizieren:

Eine Lie-Algebra bezeichnet man als einfach, falls sie nicht-abelsch ist und keine nicht-trivialen Ideale besitzt.

Eine Lie-Algebra bezeichnet man als halb-einfach, falls sie keine nicht-trivialen Ideale besitzt. Offensichtlich ist eine einfache Lie-Algebra auch halb-einfach.

Halb-einfache Lie-Gruppen sind das direkte Produkt einfacher Lie-Gruppen.

Die kompakten einfachen Lie-Gruppen lassen sich wie folgt klassifizieren:

$$\begin{aligned} A_n &= SU(n+1), \\ B_n &= SO(2n+1), \\ C_n &= Sp(n), \\ D_n &= SO(2n). \end{aligned}$$

Die außergewöhnlichen Gruppen sind

$$E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.$$

Wir betrachten als Beispiel noch die speziellen unitären Gruppen $SU(n)$. Es hat sich eingebürgert, die Generatoren wie folgt zu normieren:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}.$$

Wir betrachten zunächst $SU(2)$. Diese Gruppe hat drei Generatoren I^1, I^2 und I^3 , die proportional zu den Pauli-Matrizen sind:

$$I^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir $SU(3)$. Hier haben wir acht Generatoren $\lambda^a, a = 1, \dots, 8$, die man als Gell-Mann-Matrizen bezeichnet:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Gegensatz zur $U(1)$ sind die $SU(2)$ und die $SU(3)$ nicht-abelsche Gruppen.

17.3 Faserbündel

Vorbemerkung: Wir hatten in der allgemeinen Relativitätstheorie schon Mannigfaltigkeiten, und für jeden Punkt einer Mannigfaltigkeit die dazugehörigen Tangentialräume $T_x M$ betrachtet. Für eine D -dimensionale Mannigfaltigkeit, ist

$$T_x M \sim \mathbb{R}^D.$$

Wir können daher den Produktraum

$$E = M \times \mathbb{R}^D$$

betrachten, zusammen mit einer Projektion

$$\begin{aligned} \pi : M \times \mathbb{R}^D &\rightarrow M, \\ (x, V) &\rightarrow x. \end{aligned}$$

Seien

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

zwei Basen des Tangentialraumes am Punkte x . Dann gilt für die Transformationsmatrix

$$\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \in GL(D, \mathbb{R}).$$

Die Gruppe $GL(D, \mathbb{R})$ bezeichnet man hier als Strukturgruppe von E .

Dieser Sachverhalt läßt sich in zwei Punkten verallgemeinern:

- Anstelle des Tangentialraumes, der jedem Punkt des Basisraums zugeordnet ist, läßt man beliebige Mannigfaltigkeiten zu.
- Die Forderung nach einer globalen Produktstruktur $M \times \mathbb{R}^D$ ist zu restriktiv. Daher fordert man nur, daß dies lokal gelten möge, d.h. in einer Umgebung eines jeden Punktes.

Definition: Ein differentierbares Faserbündel (E, π, M, F, G) besteht aus:

- einer differentierbarer Mannigfaltigkeit E , die als gesamter Raum bezeichnet wird,
- einer differentierbarer Mannigfaltigkeit M , die man als Basisraum bezeichnet,
- einer differentierbarer Mannigfaltigkeit F , die man als Faser bezeichnet,
- einer Projektion $\pi : E \rightarrow M$. Das inverse Bild $\pi^{-1}(p) = F_p$ bezeichnet man als die Faser am Punkt p .
- einer Lie-Gruppe G die als Strukturgruppe bezeichnet wird, die auf F von links wirkt.
- einer Menge offener Überdeckungen $\{U_i\}$ von M mit Diffeomorphismen

$$\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

so daß $\pi\phi_i(p, f) = p$.

Die Abbildung ϕ_i bezeichnet man als die lokale Trivialisierung, da ϕ_i^{-1} den Bereich $\pi^{-1}(U_i)$ auf das direkte Produkt $U_i \times F$ abbildet.

- Sei $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$ und sei

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \rightarrow F.$$

Dann wird weiter gefordert, daß $t_{ij}(p)$ ein Element von G ist und die Konsistenzbedingungen

$$t_{ii} = \text{id}, \quad t_{ij} = t_{ji}^{-1}, \quad t_{ij}t_{jk} = t_{ik}$$

erfüllt.

Bemerkung: Da die Produktstruktur $U_i \times F$ nur lokal gefordert wird, kann das Faserbündel global betrachtet ineinander "verdrillt" sein (Beispiel: Möbiusband).

Besondere Faserbündel: Ein Vektorbündel ist ein Faserbündel, dessen Faser ein Vektorraum ist.

Ein Hauptfaserbündel ist ein Faserbündel, dessen Faser mit der Strukturgruppe G identisch ist. Es wird oft mit $P(M, G)$ bezeichnet.

Ein Schnitt ist eine glatte Abbildung $\sigma : M \rightarrow E$, welche $\pi\sigma = \text{id}_M$ erfüllt.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Lie-Gruppe: Gruppe und Mannigfaltigkeit.

Beispiele für Lie-Gruppen: $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$.

Gruppenelemente ausgedrückt durch

$$g = \exp(-iT^a \alpha_a).$$

Die Generatoren T^a bilden eine Lie-Algebra:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$$

Faserbündel:

- gesamter Raum E ;
- Basisraum M ;
- Faser F ;
- Projektion $\pi : E \rightarrow M$;
- Strukturgruppe G ;
- lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$;
- Übergangsfunktionen $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \phi_{j,p} : F \rightarrow F$, die folgende Konsistenzbedingungen erfüllen:

$$t_{ii} = \text{id}, \quad t_{ij} = t_{ji}^{-1}, \quad t_{ij} t_{jk} = t_{ik}$$

17.4 Zusammenhangsformen auf Hauptfaserbündeln

Betrachtet man als Faser den Tangentialraum, erhält man ein Vektorbündel, das man als Tangentialbündel bezeichnet. Ein Punkt im gesamten Raum wird durch (x, V) bezeichnet, wobei x einen Punkt auf der Basismannigfaltigkeit bezeichnet und V einen Tangentialvektor darstellt. In der allgemeinen Relativitätstheorie hatten wir das Problem, Tangentialvektoren V und W miteinander zu vergleichen, die zu den Punkten x und y gehören. Dieses Problem wurde mit Hilfe des affinen Zusammenhangs und des dadurch definierten Paralleltransports von Tangentialvektoren gelöst.

Wir übertragen nun diese Situation auf ein Hauptfaserbündel. Zunächst ist zu bemerken, daß hier die Faser kein Vektorraum, sondern eine Lie-Gruppe ist. Dennoch bleibt die Fragestellung analog: Wir betrachten einen Punkt (x, g_0) im gesamten Raum. Bewegen wir uns in der Basismannigfaltigkeit von x nach y , welchem Punkt (y, g_1) entspricht dies im gesamten Raum ?

Zur Beantwortung dieser Frage ist wieder die Definition eines Paralleltransports durch einen Zusammenhang erforderlich.

Wir betrachten hierzu den Tangentialraum TP zu dem gesamten Raum P . Sei $u = (x, g_0)$ ein Punkt des Hauptfaserbündels $P(M, G)$ und sei G_x die Faser bei $x = \pi(u)$. Der vertikale Unterraum V_uP ist ein Unterraum des Tangentialraumes T_uP , welcher tangential zu G_x bei u ist.

Eine Zusammenhangsform $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$, die Werte in der Lie Algebra \mathfrak{g} von G annimmt, ist eine Projektion von T_uP auf die vertikale Komponente $V_uP \cong \mathfrak{g}$.

Es gilt ausserdem

$$\omega_{ug}(R_g^*X) = g^{-1}\omega_u(X)g.$$

Der horizontale Unterraum H_uP ist dann als der Kern von ω definiert. Somit definiert ω eine eineutige Zerlegung

$$T_uP = H_uP \oplus V_uP.$$

Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve in M . Eine Kurve $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow P$ bezeichnet man als horizontalen Lift, falls $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$ gilt und der Tangentenvektor zu $\tilde{\gamma}(t)$ immer in $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegt.

Ein Punkt u_1 bezeichnet man als nach u_0 parallel transportierbar, falls es einen horizontalen Lift $\tilde{\gamma}$ gibt, der u_1 und u_0 verbindet.

Bemerkung: Damit definiert die Zusammenhangsform den horizontalen Lift und den Paralleltransport.

Mit Hilfe eines Schnittes $\sigma: M \rightarrow P$ kann die Zusammenhangsform auf M zurückgezogen werden:

$$A = \sigma^*\omega.$$

Wir schreiben

$$A = -\left(\frac{g}{\hbar c}\right) iT^a A_\mu^a dx^\mu$$

g ist hierbei eine Kopplungskonstante, für die Elektrodynamik ist g gleich der Elementarladung e .

Bemerkung: Seien σ_1 und σ_2 zwei Schnitte, dann gilt immer

$$\sigma_2(x) = \sigma_1(x)U(x),$$

wobei $U(x)$ ein von x abhängiges Element der Lie-Gruppe G ist. Dann findet man für den lokalen Ausdruck der Zusammenhangsformen

$$A_2 = U^{-1}A_1U + U^{-1}dU$$

Dies ist nichts anderes als eine Eichtransformation.

Die Zusammenhangsform definiert nun eine kovariante Ableitung

$$D_A = d + A = d - \left(\frac{g}{\hbar c}\right) iT^a A_\mu^a dx^\mu.$$

Bemerkung: Dies gilt nun für beliebige Lie-Gruppen. Für die Elektrodynamik haben wir die Gruppe $U(1)$, in diesem Fall hat die Gruppe nur einen Generator, der als 1 genommen werden kann und die Formel reduziert sich auf

$$D_A = d + A = d - \left(\frac{e}{\hbar c}\right) i A_\mu dx^\mu,$$

die uns schon bei früher begegnet ist.

Mittels der Zusammenhangsform und der kovarianten Ableitung definiert man die Krümmungsform

$$F = D_A A = dA + A \wedge A.$$

Bemerkung: Diese Definition steht in Analogie zur Definition des Riemann'schen Krümmungstensors. Auch dieser läßt sich als kovariante Ableitung des affinen Zusammenhangs berechnen.

In Koordinatenschreibweise hat man

$$F = -\frac{1}{2} \left(\frac{g}{\hbar c}\right) iT^a F_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

wobei

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \left(\frac{g}{\hbar c}\right) f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

17.5 Elektrodynamik als Eichtheorie

Die Elektrodynamik kann als ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe $U(1)$ und dem Basisraum der Raumzeit betrachtet werden. Auf diesem Faserbündel ist eine Zusammenhangsform definiert. Die Wirkung der Elektrodynamik ist durch das Betragsquadrat der Krümmungsform gegeben:

$$S_{Felder} = \frac{1}{8\pi c} \left(\frac{\hbar c}{e}\right)^2 \int F \wedge *F = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

17.6 Nicht-abelsche Eichtheorien

C.N. Yang und R.L.Mills³ schlugen 1954 eine Verallgemeinerung auf nicht-abelsche Lie-Gruppen vor:

$$S = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\hbar c}{g}\right)^2 \int \text{Tr} F \wedge *F = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu},$$

mit

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \left(\frac{g}{\hbar c}\right) f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

³C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. 96, (1954), 191

Die Lagrangedichte ist unter den folgenden lokalen Eichtransformationen invariant:

$$T^a A_\mu^a(x) \rightarrow U(x) \left(T^a A_\mu^a(x) + i \frac{\hbar c}{g} \partial_\mu \right) U(x)^\dagger$$

wobei

$$U(x) = \exp(-iT^a \theta^a(x)).$$

Sei nun

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\left(\frac{g}{\hbar c}\right) iT^a A_\mu^a, \\ F_{\mu\nu} &= -\left(\frac{g}{\hbar c}\right) iT^a F_{\mu\nu}^a. \end{aligned}$$

und ferner

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Dann findet man aus geometrischen Gründen die Bianchi-Identität

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{F}^{\mu\nu}] = 0,$$

und aus der Variation der Wirkung die klassischen Yang-Mills Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0$$

Somit lassen sich die Theorien von Maxwell und Yang-Mills im Vakuum wie folgt zusammenfassen:

	Maxwell	Yang-Mills	Einstein
Bianchi	$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$	$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{F}^{\mu\nu}] = 0$	$\nabla_\mu \tilde{R}^{\rho\ \mu\nu} = 0$
Euler-Lagrange	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0$	$Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = 0$

wobei

$$\tilde{R}^{\rho\ \mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^{\rho}_{\ \lambda\alpha\beta}$$

gesetzt wurde.

Bemerkung 1: Gemeinsam ist allen drei Theorien die Konzepte eines Zusammenhangs, der kovarianten Ableitung und der Krümmung.

Bemerkung 2: Die Wirkung der Maxwell-Theorie und der Yang-Mills-Theorie ist quadratisch in der Krümmung, die Einstein-Hilbert-Wirkung ist jedoch linear in der Krümmung.

Bemerkung 3: Für die Elektrodynamik und die Yang-Mills-Theorie existieren Quantenfeldtheorien. Die Euler-Lagrange-Gleichungen beschreiben Feldkonfigurationen, die die Wirkung minimieren. Für den Übergang von der klassischen Feldtheorie zur Quantenfeldtheorie betrachtet man nicht nur die klassischen Lösungen, sondern alle Feldkonfigurationen und gewichtet jede Feldkonfiguration mit

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right).$$