Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 1
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 3.5.2006

1. Lorentztransformation (2 Punkte)

Wie lauten die Vektorgleichungen der Lorentztransformation für den Fall, daß sich das gestrichene Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegen das ungestrichene bewegt?
Zerlegen Sie $\vec{r}$ in seine Komponenten $\vec{r}_{||} = (\vec{r}\vec{v})\vec{v}/v^2$ und $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_{||}$ parallel und senkrecht zu $\vec{v}$.

Lösung: Sei $\vec{v}$ in Richtung der positiven x-Achse.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt)\,, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Sei $\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_\perp$, die parallele und orthogonale Komponente ist gegeben bei

$$\begin{aligned} \vec{r}_{||} &= \frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2}\vec{v}, \\ \vec{r}_\perp &= \vec{r} - \vec{r}_{||}. \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'_{||} &= \gamma\left(\vec{r}_{||} - \vec{v}t\right)\,, \\ \vec{r}\,'_\perp &= \vec{r}_\perp. \end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r}\,'_{||} + \vec{r}\,'_\perp = \gamma\left(\frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2}\vec{v} - t\vec{v}\right) + \vec{r} - \frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2}\vec{v} \\ &= \vec{r} + \left((\gamma - 1)\frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2} - \gamma t\right)\vec{v}. \end{aligned}$$

2. Relativistische Geschwindigkeitsaddition (3 Punkte)

Ein System S_1 bewege sich mit der Geschwindigkeit v_1 gegen ein System S_2, daß sich wiederum mit v_2 gegen ein drittes System S_3 bewege. Alle Geschwindigkeiten seien parallel. Wie lautet die Lorentztransforamtion von S_1 nach S_3?

Lösung: S_1 bewegt sich mit v_1 gegen S_2, daher lautet die Transformation von S_1 nach S_2

$$\begin{aligned} t_2 &= \gamma_1 \left(t_1 + \frac{v_1}{c^2} x_1 \right), \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \\ x_2 &= \gamma_1 \left(x_1 + v_1 t_1 \right), \\ y_2 &= y_1, \\ z_2 &= z_1. \end{aligned}$$

S_2 bewegt sich mit v_2 gegen S_3, daher lautet die Transformation von S_2 nach S_3

$$\begin{aligned} t_3 &= \gamma_2 \left(t_2 + \frac{v_2}{c^2} x_2 \right), \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}, \\ x_3 &= \gamma_2 \left(x_2 + v_2 t_2 \right), \\ y_3 &= y_2, \\ z_3 &= z_2. \end{aligned}$$

Daher lautet die Transformation von S_1 nach S_3

$$\begin{aligned} t_3 &= \gamma_1\gamma_2 \left(t_1 + \frac{v_1}{c^2} x_1 + \frac{v_2}{c^2} \left(x_1 + v_1 t_1 \right) \right) = \gamma_1\gamma_2 \left(\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) t_1 + \frac{v_1 + v_2}{c^2} x_1 \right), \\ x_3 &= \gamma_1\gamma_2 \left(x_1 + v_1 t_1 + v_2 \left(t_1 + \frac{v_1}{c^2} x_1 \right) \right) = \gamma_1\gamma_2 \left(\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) x_1 + \left(v_1 + v_2 \right) t_1 \right), \\ y_3 &= y_2, \\ z_3 &= z_2. \end{aligned}$$

Andererseits gibt es eine direkte Transformation von S_1 nach S_3:

$$\begin{aligned} t_3 &= \gamma_{12} \left(t_1 + \frac{v_{12}}{c^2} x_1 \right), \\ x_3 &= \gamma_{12} \left(x_1 + v_{12} t_1 \right), \\ y_3 &= y_1, \\ z_3 &= z_1. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \gamma_1\gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right), \\ v_{12} &= \frac{v_1 + v_2}{\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right)}. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich auch aus dem Gesetz für die relativistische Addition von Geschwindigkeiten.

3. Lorentzinvarianz der Wellengleichung (4 Punkte)

Man transformiere die Wellengleichung (eine Raumdimension)

$$\Box\phi(x,t) \;=\; 0,$$

indem man explizit die Lorentztransforamtion für x und t verwende, und zeige, daß sich $\Box$ wie ein Skalar transformiert, also die Wellengleichung forminvariant ist.

Lösung: Die Wellengleichung in K lautet

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;=\; 0.$$

Die Lorentztransformation von K nach K' ist gegeben durch

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right), \\ x' &= \gamma\,(x + vt)\,. \end{aligned}$$

Die Rücktransformation lautet

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' - \frac{v}{c^2}x'\right), \\ x &= \gamma\,(x' - vt')\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x'} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} = \gamma\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial x'} + \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\right]\frac{\partial t}{\partial x'} \\ &= \gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\right] - \frac{v}{c^2}\gamma\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\right] \\ &= \gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right] - \frac{v}{c^2}\gamma\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right] \\ &= \gamma^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t'} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} = -v\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial t'} + \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)\right]\frac{\partial t}{\partial t'} \\ &= -v\gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)\right] + \gamma\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -v\gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-v\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]+\gamma\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(-v\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]\\
&= \gamma^2\left(v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2v\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} &= \gamma^2\left(\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)-\gamma^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\\
&= \gamma^2\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\gamma^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{v^2}{c^4}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\\
&= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

4. Zwillingsparadoxon (7 Punkte)

Ein Raumschiff verläßt die Erde. Es ist so gebaut, daß es eine gleichförmige Beschleunigung von der Größe der Erdbeschleunigung g in seinem Ruhesystem erzeugt. Die Beschleunigung wirke genau 5 Jahre (nach den Uhren im Raumschiff), dann wird genauso lange gebremst, umgedreht, wieder 5 Jahre beschleunigt, dann 5 Jahre gebremst und auf der Erde gelandet. Für die Besatzung des Raumschiffs sind jetzt seit dem Start 20 Jahre vergangen.

a) Welche Zeitspanne verging auf der Erde zwischen Start und Landung?

b) Wie weit war das Raumschiff von der Erde entfernt?

c) Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn das Raumschiff nach der ersten und zweiten Beschleunigungsphase jeweils für 10 Jahre (Eigenzeit) unbeschleunigt fliegt?

Hinweis: Das Koordinatensystem des Raumschiffs ist kein Inertialsystem. Es kann aber in jedem Moment von einem Inertialsystem S' begeleitet werden, daß mit dem Inertialsystem der Erde über eine Lorentztransformation verknüpft ist. Diese verknüpft insbesondere die Vierervektoren u und a der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in S und S' ($u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, a_\mu = \frac{d^2x_\mu}{d\tau^2}$).

Lösung: Sei S das Inertialsystem der Erde und S' ein Inertialsystem in dem sich das Raumschiff zum Zeitpunkt t_0 befindet. S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v(t_0)$ gegenüber S.

Eigenzeit des Raumschiffes;

$$
d\tau = dt' = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}
$$

In S' wird das Raumschiff mit g beschleunigt. Falls S' so gewählt wird, daß das Raumschiff zum Zeitpunkt t'_0 in S' ruht, so hat es zum Zeitpunkt t'_0+dt' die Geschwindigkeit $du' = gdt'$. Im System S hat man somit (relativistische Addition von Geschwindigkeiten)

$$v(t+dt) = \frac{v+du'}{1+\frac{vdu'}{c^2}} \approx (v+du')\left(1-\frac{vdu'}{c^2}\right) \approx v+du' - \frac{v^2}{c^2}du'$$

Daher

$$\frac{dv}{dt} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{du'}{dt}$$

Nun ist aber $dt = dt'/\sqrt{1-v^2/c^2}$ und daher

$$\frac{dv}{dt} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{du'}{dt'} = g\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Somit

$$\frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = gdt$$

Integration liefert

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = gt + c_0.$$

Aus der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ folgt $c_0 = 0$. Auflösen nach $v(t)$ liefert

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} = \frac{dt'}{dt}$$

Durch Integration erhält man

$$t' = \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{1+\left(\frac{g\tilde{t}}{c}\right)^2}} = \frac{c}{g}\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{gt}{c}\right)$$

und somit

$$t = \frac{c}{g}\sinh\frac{gt'}{c}$$

Sei $T' = 5\text{y}$, dann ist

$$T = 84.6\text{y}$$

Bis zur Rückankunft auf der Erde vergeht viermal diese Zeitspanne, also

$$4T = 338.4\text{y}.$$

Teilaufgabe b)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(\tilde{t})d\tilde{t} = \int_0^t \frac{g\tilde{t}}{\sqrt{1+\left(\frac{g\tilde{t}}{c}\right)^2}}d\tilde{t} = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}-1\right] \\ &= \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(\sinh\frac{gt'}{c}\right)^2}-1\right] \end{aligned}$$

$$x(T) = 83.6\text{ ly}$$

Die maximale Distanz beträgt zweimal diesen Wert, daher

$$2x(T) = 167.3\text{ ly}$$

Teilaufgabe c) Nach der Beschleunigungsphase beträgt die Geschwindigkeit

$$v(T) = \frac{gT}{\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}} = \frac{c\sinh\frac{gT'}{c}}{\sqrt{1+\left(\sinh\frac{gT'}{c}\right)^2}} = c\tanh\frac{gT'}{c}$$

Einem Zeitintervall von $\Delta T' = 10\text{y}$ im System des Raumschiffes entspricht daher ein Zeitintervall von

$$\Delta T = \frac{\Delta T'}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}} = 873.7\text{ y}$$

Die Ankunft verzögert sich daher um zweimal diese Zeitspanne, also um $2\Delta T = 1747.4\text{y}$ In dem Zeitintervall ΔT legt das Raumschiff zusätzlich

$$v(T)\Delta T = 873.6\text{ ly}$$

zurück. (Alle numerischen Werte wurden mit $c = 2.99792\cdot 10^8\text{m/s}$, $g = 9.81\text{ms}^{-2}$ und $1\text{y} = 365.25\cdot 24\cdot 3600\text{s}$ gerechnet.)

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 2
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 10.5.2006

1. Einsteinscher Kasten (5 Punkte)

Ein angeregtes Atom in der linken Wand eines frei schwebenden Kastens gibt seine Anregungsenergie E durch ein Lichtquant an ein Atom in der rechten Wand des Kastens ab. Berechnen Sie die bei dem Übergang entstehende Verschiebung des Kastens Δx
a) aus dem Impulssatz und der Laufzeit des Lichtquants;
b) aus dem Schwerpunktsatz, wenn der Anregung eine Masse m zugeordnet wird.
Aus dem Vergleich der Ergebnisse von a) und b) läßt sich mit der Energie des Strahlungsfeldes $E = pc$ der Zusammenhang zwischen Masse und Energie ableiten.

Lösung: Sei M die Masse des Kastens, v die Geschwindigkeit des Kastens nach der Emission des Lichtquants, l die Breite des Kastens und p der Impuls des Photons. Das Photon werde an der Stelle $x = 0$ emitiert.

Impulserhaltung:

$$M\gamma v + p = 0,$$

daher

$$v = -\frac{p}{M\gamma}.$$

In einem System, das mit dem Kasten bewegt wird, hat dieser die Breite l. Im Laborsystem gilt $l' = l/\gamma$. Das Lichtquant bewegt mit Lichtgeschwindigkeit:

$$x_{Photon} = ct,$$

Die andere Wand des Kastens bewegt sich auf das Photon zu, Im Laborsystem hat man

$$x_{Wand} = \gamma \left(\frac{l}{\gamma} + tv \right)$$

Aus $x_{Photon} = x_{Wand}$ folgt

$$t_{absorb} = \frac{l}{c - \gamma v}$$

Das Photon trifft daher am Ort

$$x_{absorb} = ct_{absorb} = \frac{l}{1 - \gamma \frac{v}{c}} = \frac{l}{1 + \frac{p}{Mc}}$$

auf die Wand. Der Kasten hat sich daher um

$$\Delta x = x_{absorb} - l = l\left(\frac{-\frac{p}{Mc}}{1+\frac{p}{Mc}}\right) = -\frac{l}{1+\frac{Mc}{p}}$$

bewegt.

Aus dem Schwerpunktsatz folgt:

$$\frac{1}{M+m}\left(M\cdot\frac{l}{2}+m\cdot 0\right) = \frac{1}{M+m}\left(M\left(\frac{l}{2}+\Delta x\right)+m\left(l+\Delta x\right)\right)$$

Somit:

$$(M+m)\,\Delta x = -ml,$$

und daher

$$\Delta x = -\frac{l}{1+\frac{M}{m}}.$$

Somit haben wir

$$-\frac{l}{1+\frac{Mc}{p}} = -\frac{l}{1+\frac{M}{m}},$$

und daher

$$m = \frac{p}{c}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit c: $mc^2 = pc = E$ und daher

$$E = mc^2.$$

2. Doppler-Effekt, Aberration (7 Punkte)

Die Phase einer ebenen Lichtwelle mit Ausbreitungsrichtung $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ lautet im System S

$$\varphi = 2\pi\nu\left(t - \frac{xn_x + yn_y + zn_z}{c}\right).$$

Die gleiche Relation gilt für die gestrichenen Größen in einem System S', welches z.B. durch eine Lorentztransformation mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung aus S hervorgehen soll. Finden Sie die Transformation

$$(n_x, n_y, n_z, \nu) \rightarrow \left(n'_x, n'_y, n'_z, \nu'\right)$$

aus der Bedingung, daß die Phase lorentzinvariant ist. Diskutieren Sie anhand dieser Relationen:
a) den linearen (longitudinalen) Dopplereffekt für $n_x = n'_x = \pm 1$;
b) den quadratischen (transversalen) Dopplereffekt für $n_x = 0$,
c) die Aberration, d.h. die Neigung der eintreffenden Wellenfronten für eine im Unendlichen ruhende Lichtquelle $n_x = n_z = 0$, $n_y = 1$ und einen in x-Richtung mit v bewegten Beobachter. (Aberrationswinkel α: $\tan\alpha = n'_x/n'_y$).

Lösung: Phase φ ist invariant:

$$2\pi\nu\left(t - \frac{xn_x + yn_y + zn_z}{c}\right) = 2\pi\nu'\left(t' - \frac{x'n'_x + y'n'_y + z'n'_z}{c}\right)$$

Lorentztransformation:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right), \\ x' &= \gamma\left(-vt + x\right), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Einsetzen und sortieren nach t, x, y, z liefert

$$\begin{aligned} c\nu t - \nu x n_x - \nu y n_y - \nu z n_z &= \gamma c\nu'\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) - \gamma\nu'\left(-vt + x\right)n'_x - \nu' y n'_y - \nu' z n'_z \\ &= \gamma\nu'\left(c + vn'_x\right)t - \gamma\nu'\left(\frac{v}{c} + n'_x\right)x - \nu' y n'_y - \nu' z n'_z. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \nu &= \gamma\nu'\left(1 + \frac{v}{c}n'_x\right), \\ \nu n_x &= \gamma\nu'\left(n'_x + \frac{v}{c}\right), \\ \nu n_y &= \nu' n'_y, \\ \nu n_z &= \nu' n'_z. \end{aligned}$$

Auflösen liefert

$$\begin{aligned} \nu' &= \gamma\left(1 - \frac{v}{c}n_x\right)\nu, \\ n'_x &= \frac{n_x - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}n_x}, \\ n'_y &= \frac{n_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}n_x\right)}, \\ n'_z &= \frac{n_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}n_x\right)}. \end{aligned}$$

Teilaufgabe a): Longitudinaler Dopplereffekt. Sei $n_x = 1$ und $n_y = n_z = 0$. Dann gilt

$$n'_x = 1, \quad n'_y = n'_z = 0,$$

und

$$\nu' = \frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\nu = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\nu.$$

Sei nun $n_x = -1$ und $n_y = n_z = 0$. Dann gilt

$$n'_x = -1, \quad n'_y = n'_z = 0,$$

und

$$\nu' = \frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\nu = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\nu.$$

Teilaufgabe b) Transversaler Dopplereffekt. Sei nun $n_x = 0$. Ohne Einschränkung kann $n_y = 1$ und $n_z = 0$ gewählt werden. Dann gilt

$$n'_x = -\frac{v}{c}, \quad n'_y = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad n'_z = 0,$$

und

$$\nu' = \gamma\nu = \frac{\nu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Teilaufgabe c) Aberration. (Vorbemerkung: In dem ausgeteilten Übungsblatt wurde in der Angabe zu Teilaufgabe c) versehentlich die gestrichenen Größen mit den ungestrichenen vertauscht.)

Sei $n_x = n_z = 0$ und $n_y = 1$. Somit

$$n'_x = -\frac{v}{c},$$
$$n'_y = \frac{n_y}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Somit

$$\tan\alpha = \frac{n'_x}{n'_y} = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

und

$$\alpha = -\arctan \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

3. Symmetrische und anti-symmetrische Tensoren (1 Punkt)

Zeigen Sie, daß die Kontraktion eines symmetrischen Tensors $S_{\mu\nu}$ mit einem anti-symmetrischen Tensor $A^{\mu\nu}$ Null ergibt.

Lösung: Durch Vertauschung der Indizes läßt und anschliessender Umbenennung sich zeigen:

$$S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = -S_{\mu\nu}A^{\nu\mu} = -S_{\nu\mu}A^{\nu\mu} = -S_{\mu\nu}A^{\mu\nu}.$$

Daher folgt

$$S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0.$$

4. Der total anti-symmetrische Tensor (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß der Levi-Civita-Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ invariant unter eigentlichen Lorentztransformationen ist.

Lösung: Ein Vierervektor transformiert sich wie

$$V^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}V^{\nu}.$$

Der Levi-Civita-Tensor ist von Rang 4 und transformiert sich daher wie

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Zu zeigen ist:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\prime} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Definiere die Hilfsgröße

$$A^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$A^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist total antisymmetrisch:

$$\begin{aligned} A^{\nu\mu\rho\sigma} &= \Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\Lambda^{\mu}{}_{\beta}\Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\,\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} = -\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -A^{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned}$$

und analog für jedes andere Indexpaar. Daher

$$A^{\mu\nu\rho\sigma} = c\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Zur Bestimmung der Konstanten c betrachte einerseits

$$A^{0123} = c\varepsilon^{0123} = -c,$$

andererseits ist

$$A^{0123} = \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta \Lambda^2{}_\gamma \Lambda^3{}_\delta \, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\det\Lambda$$

und somit $c = \det\Lambda$. Daher gilt

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\prime} = (\det\Lambda)\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Für eine eigentliche Lorentztransformation gilt $\det\Lambda = 1$ und daher

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\prime} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 3
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 17.5.2006

1. Der zweite Green'sche Satz (2 Punkte)

Beweisen Sie den zweiten Green'schen Satz:

$$\int \int_{V(F)} \int d^3x \; (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi) \;\; = \;\; \int \int_F d\sigma \; \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right).$$

Hierbei sei $V(F)$ ein endliches Volumen und $F = \partial V$ seine Oberfläche. Φ und Ψ seien glatte Funktionen auf diesem Gebiet. $\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}}$ bzw. $\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}}$ bezeichnet die Normalableitung, das ist die Richtungsableitung der jeweiligen Funktion in Richtung der Flächennormale $\hat{n}$ am betrachteten Punkt der Fläche F:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \;\; = \;\; \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi.$$

Lösung: In der Vorlesung wurde der erste Green'sche Satz bewiesen:

$$\int \int_{V(F)} \int d^3x \; \left(\Phi\Delta\Psi + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi \right) \;\; = \;\; \int \int_F d\sigma \; \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}}.$$

Dieser Satz ist eine direkte Anwendung des Gauß'schen Satzes

$$\int \int_{V(F)} \int d^3x \; \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \;\; = \;\; \int \int_F d\sigma \; \vec{U} \cdot \hat{n},$$

wenn man dort das Vektorfeld

$$\vec{U} \;\; = \;\; \Phi \left(\vec{\nabla}\Psi \right)$$

einsetzt und die Produktregel für die Differentiation verwendet,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\Phi \vec{\nabla} \Psi \right) \;\; = \;\; \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi + \Phi\Delta\Psi.$$

Subtrahiert man vom ersten Green'schen Satz den Ausdruck mit Φ und Ψ vertauscht, so erhält man

$$\int \int_{V(F)} \int d^3x \; \left(\Phi\Delta\Psi + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi \right) - \left(\Psi\Delta\Phi + \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\Phi \right)$$

$$= \int \int_{V(F)} \int d^3x \; (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi) = \int \int_F d\sigma \; \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right).$$

2. Bestimmung eines Vektorfeldes aus seinen Quellen und Wirbeln

(6 Punkte)

Ist es möglich ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$ durch seine Divergenz und seine Rotation zu bestimmen? Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ eine skalare Funktion $f(\vec{x})$ und ein Vektorfeld $\vec{g}(\vec{x})$, die beide im Unendlichen verschwinden:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(\vec{x}) = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Gesucht ist ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$, das

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) &= \vec{g}(\vec{x}). \end{aligned}$$

erfüllt. Konstruieren Sie $\vec{V}(\vec{x})$, indem Sie die Zerlegung $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x})$ verwenden, wobei

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_2(\vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{V}_1(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig? Welche Bedingungen für $\vec{V}$ sind erforderlich, um die Lösung eindeutig zu machen?

Lösung: Mit dem Ansatz $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x})$ erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{V}_1(\vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_2(\vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{V}_2(\vec{x}) &= \vec{g}(\vec{x}), \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten zwei Teilprobleme: Zum einen suchen wir ein rotationsfreies Vektorfeld $\vec{V}_1$, dessen Quellen vorgegeben sind, zum anderen suchen wir ein divergenzfreies Vektorfeld $\vec{V}_2$, dessen Wirbel vorgegeben sind. Betrachten wir zunächst $\vec{V}_1$: Da es keine Wirbel besitzt, läßt es sich als ein Gradientenfeld schreiben:

$$\vec{V}_1(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}).$$

Eingesetzt in $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1(\vec{x}) = f(\vec{x})$ erhält man

$$\Delta\phi(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

In der Vorlesung wurde gezeigt

$$\Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta\left(\vec{x} - \vec{x}'\right).$$

Multipliziert man beide Seiten mit $f(\vec{x}')$ und integriert man über x' so erhält man

$$\int d^3x' \Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) f(\vec{x}') \;=\; -4\pi \int d^3x' \delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right) f(\vec{x}').$$

Δ_x wirkt nur auf die ungestrichenen Größen und kann vor das Integral gezogen werden:

$$\Delta_x \left(-\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \;=\; f(\vec{x}),$$

Somit ist

$$\phi(\vec{x}) \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

und

$$\vec{V}_1(\vec{x}) \;=\; -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \frac{f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Betrachten wir nun $\vec{V}_2$: Dieses Vektorfeld hat keine Quellen und kann daher als die Rotation eines Vektorpotentials geschrieben werden:

$$\vec{V}_2(\vec{x}) \;=\; \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}).$$

$\vec{A}(\vec{x})$ sei so gewählt, daß

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \;=\; 0$$

gilt. Einsetzen und die Verwendung der Beziehung

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V} \right) \;=\; \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) - \Delta \vec{V}$$

liefert

$$\Delta \vec{A}(\vec{x}) \;=\; -\vec{g}(\vec{x}).$$

Analog zu oben erhält man als Lösung

$$\vec{A}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{g}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Wir müssen noch überprüfen, ob $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$ gilt. Hierzu zunächst eine Vorbemerkung: Aus der Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}_2(\vec{x}) \;=\; \vec{g}(\vec{x})$$

folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) = 0$, indem man auf beiden Seiten die Divergenz bildet. (Die Divergenz einer Rotation verschwindet.) Nun hat man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \cdot \int d^3x' \frac{\vec{g}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\vec{g}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß

$$\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \vec{g}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Eine partielle Integration liefert das gewünschte Ergebnis:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \left(\vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{g}(\vec{x}') \right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0.$$

Somit habe wir also

$$\vec{V}_2(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{g}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

und somit

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \frac{f(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{g}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Die Lösung ist nicht eindeutig, da man zu $\vec{V}(\vec{x})$ immer ein Gradientenfeld $\vec{\nabla}\chi(\vec{x})$ addieren kann, bei dem $\chi(\vec{x})$ die Laplace-Gleichung erfüllt:

$$\Delta\chi(\vec{x}) = 0.$$

Wie man leicht nachrechnet gilt für $\vec{V}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{V}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}) \right) &= f(\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{V}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}) \right) &= \vec{g}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Wir nehmen an, daß $\vec{V}_a(\vec{x})$ und $\vec{V}_b(\vec{x})$ zwei Lösungen seien. Sie erfüllen daher

$$\vec{\nabla}\vec{V}_a(\vec{x}) = \vec{\nabla}\vec{V}_b(\vec{x}), \qquad \vec{\nabla} \times \vec{V}_a(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}_b(\vec{x}).$$

Betrachte nun $\vec{W}(\vec{x}) = \vec{V}_a(\vec{x}) - \vec{V}_b(\vec{x})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{W}(\vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Da die Rotation von $\vec{W}$ verschwindet, kann man $\vec{W} = \vec{\nabla}\phi$ schreiben. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 0.$$

Aus dem ersten Green'schen Satz

$$\int\underset{V(F)}{\int}\int d^3x \left(\Phi\Delta\Psi + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi\right) = \int\underset{F}{\int} d\sigma\, \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}}.$$

folgt mit $\Phi = \Psi = \phi$:

$$\int\underset{V(F)}{\int}\int d^3x \underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi\right)}_{\geq 0} = \int\underset{F}{\int} d\sigma\, \phi \underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi\right)}_{\vec{W}(\vec{x})} \cdot \hat{n}.$$

Falls nun $\vec{V}_a(\vec{x})$ und $\vec{V}_b(\vec{x})$ im Unendlichen verschwinden, so verschwindet dort auch die Differenz $\vec{W}(\vec{x}) = \vec{V}_a(\vec{x}) - \vec{V}_b(\vec{x})$. Somit ist das Oberflächenintegral auf der rechten Seite gleich Null. Dann gilt

$$\int\underset{V(F)}{\int}\int d^3x \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi\right) = 0,$$

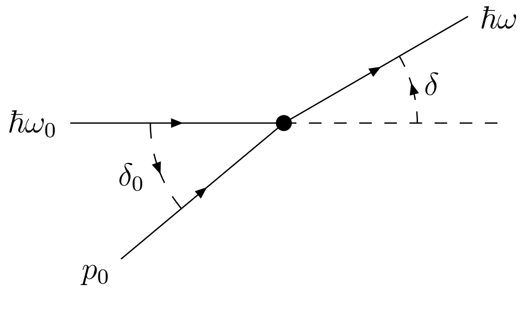
und da der Integrand nicht negativ sein kann, folgt

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{W} = 0.$$

Somit ist mit der Randbedingung, daß $\vec{V}$ im Unendlichen verschwindet, die Lösung eindeutig.

3. Compton Streuung (5 Punkte)

Ein Photon mit der Energie $\hbar\omega_0$ trifft unter dem Winkel δ_0 auf ein freies Elektron mit dem Impuls p_0.



Stellen Sie den Erhaltungssatz für den Viererimpuls auf und berechnen Sie die Energie des gestreuten Photons als Funktion des Steuwinkels δ. Geben Sie das Ergebnis speziell für den Fall an, daß das Elektron vor dem Stoß ruht.

Lösung: Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Streuprozess in der x-y-Ebene liegt.

$$\begin{aligned}
k^\mu_{Photon} &= \left(\frac{\hbar}{c}\omega_0, \frac{\hbar}{c}\omega_0, 0, 0\right), \\
q^\mu_{Elektron} &= \left(\sqrt{p_0^2 + m^2c^2}, p_0\cos\delta_0, p_0\sin\delta_0, 0\right), \\
{k^\mu_{Photon}}' &= \left(\frac{\hbar}{c}\omega, \frac{\hbar}{c}\omega\cos\delta, \frac{\hbar}{c}\omega\sin\delta, 0\right), \\
{q^\mu_{Elektron}}' &= \left(\sqrt{p^2 + m^2c^2}, p\cos\varphi, p\sin\varphi, 0\right).
\end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$k^\mu_{Photon} + q^\mu_{Elektron} = {k^\mu_{Photon}}' + {q^\mu_{Elektron}}'$$

Wir möchten das Ergebnis ohne die Größen p und φ, die das gestreute Elektron beschreiben, ausdrücken. Obige Gleichung gibt:

$${q^\mu_{Elektron}}' = {k^\mu_{Photon}}' - k^\mu_{Photon} - q^\mu_{Elektron}$$

Wir quadrieren beide Seiten:

$$\begin{aligned}
q^{\mu\prime}{q_\mu}' &= \left(k^{\mu\prime} - k^\mu - q^\mu\right)\left({k_\mu}' - k_\mu - q_\mu\right), \\
{q'}^2 &= {k'}^2 + k^2 + q^2 - 2k\cdot k' - 2k'\cdot q + 2k\cdot q.
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$${q'}^2 = q^2 = m^2c^4, \qquad {k'}^2 = k^2 = 0.$$

Daher

$$2k\cdot k' + 2k'\cdot q - 2k\cdot q = 0.$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
0 = {} & 2\frac{\hbar^2}{c^2}\omega\omega_0(1-\cos\delta) + 2\frac{\hbar}{c}\omega\left(\sqrt{p_0^2+m^2c^2} - p_0\cos\delta_0\cos\delta - p_0\sin\delta_0\sin\delta\right) \\
& -2\frac{\hbar}{c}\omega_0\left(\sqrt{p_0^2+m^2c^2} - p_0\cos\delta_0\right).
\end{aligned}$$

Auflösen nach ω:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar\omega_0\left(\sqrt{p_0^2+m^2c^2}-p_0\cos\delta_0\right)}{\frac{\hbar}{c}\omega_0\left(1-\cos\delta\right)+\sqrt{p_0^2+m^2c^2}-p_0\cos\left(\delta-\delta_0\right)}$$

Speziallfall $p_0 = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$\hbar\omega = \frac{\hbar\omega_0 mc}{\frac{\hbar}{c}\omega_0\left(1-\cos\delta\right)+mc} = \frac{\hbar\omega_0}{1+\frac{\hbar}{mc^2}\omega_0\left(1-\cos\delta\right)}.$$

4. Laplace-Operator (3 Punkte)

Der Laplace-Operator in drei Dimensionen in kartesischen Koordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Bestimmen Sie die Darstellung des Laplace-Operators in

a) Zylinderkoordinaten

b) Kugelkoordinaten.

Lösung: Wir betrachten zunächst die Zylinderkoordinaten.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}f &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\ &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\ &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Beachte hierzu die Kettenregel!
Analog:

$$\frac{\partial}{\partial y} f \quad = \quad \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f \quad = \quad \sin^2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\cos^2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\cos^2\varphi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Somit erhält man in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Teil b) Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Eine etwas längere Rechnung liefert

$$\Delta \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 4
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 24.5.2006

1. Vergleich von Gravitation und Coulombwechselwirkung (2 Punkte)

Zwischen Elektron und Proton wirkt sowohl die elektrostatische Anziehung, wie auch die Schwerkraft. Man berechne das Verhältnis der beiden Kräfte.
Aus einer Eisenkugel von 1 g Masse werden 1% der negativen Ladungen entfernt und in einen Abstand gebracht, der dem Erdradius entspricht. Berechnen Sie die Anziehung durch den Rest der Kugel.

Lösung: Im SI-System gilt:

$$\begin{aligned} F_{elektrisch} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \\ F_{Gravitation} &= G\frac{m_{Elektron} m_{Proton}}{r^2}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{F_{elektrisch}}{F_{Gravitation}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G}\frac{e^2}{m_{Elektron} m_{Proton}} = 2.3 \cdot 10^{-39}.$$

Teil b) Die Kraft ist gegeben durch

$$F_{elektrisch} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)^2}{r_{Erde}^2},$$

wobei Z die Anzahl der Elektronen ist, die entfernt wurde. Ein Eisenatom besteht aus 26 Elektronen, 26 Protonen sowie einer Anzahl von Neutronen. Ein Eisenatom hat das Gewicht 55.8 u, wobei $1u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg. Der Erdradius beträgt $r_{Erde} = 6.37 \cdot 10^6$ m. Somit

$$Z = 26 \times \frac{10^{-3} \text{ kg}}{55.8 \text{ u}} \times 1\% = 2.8 \cdot 10^{21},$$

und man erhält

$$F_{elektrisch} = 44.8N.$$

2. Potential eines Drahtringes (3 Punkte)

Ein Ring aus dünnem Draht mit Radius r_0 trage die Ladung Q. Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Dicke des Drahtes für die Orte auf der Achse senkrecht zur Ringebene:

a) den Potentialverlauf,
b) den Feldstärkeverlauf,
c) Lage und Betrag der maximalen Feldstärke.

Lösung: Es handelt sich um ein elektrostatisches Problem. Für das Potential ist die Poisson-Gleichung zu lösen:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}).$$

Mit Hilfe der Green'schen Funktion erhält man

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Man verwendet Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Die Ladungsdichte in Zylinderkoordinaten lautet

$$\rho = \frac{Q}{2\pi r_0}\delta(r-r_0)\delta(z).$$

Somit erhält man für Orte auf der Achse

$$\Phi(z) = \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' r' \frac{Q}{2\pi r_0}\delta(r'-r_0)\delta(z')\frac{1}{\sqrt{z^2+r_0^2}} = \frac{Q}{\sqrt{z^2+r_0^2}}$$

Teil b) Es gilt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z)\cdot\vec{e}_z = \frac{Qz}{(z^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{e}_z.$$

Teil c) Bestimmung des Maximums aus

$$\frac{\partial}{\partial z}\left|\vec{E}\right| = 0.$$

Die Rechnung liefert:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left|\vec{E}\right| = \frac{\partial}{\partial z}\frac{Qz}{\left(z^2+r_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q\left(r_0^2-2z^2\right)}{\left(z^2+r_0^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Daher:

$$r_0^2 - 2z_{max}^2 = 0 \iff z_{max} = \pm\frac{r_0}{\sqrt{2}}.$$

$$\vec{E}\left(z_{max}\right) = \pm\frac{2Q}{3\sqrt{3}r_0^2}\cdot\vec{e}_z$$

3. Eichtransformation (4 Punkte)

Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld in z-Richtung: $\vec{B} = (0,0,B)$.
a) Zeigen Sie, daß folgende Vektorpotentiale dieses Magnetfeld beschreiben:

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1 &= \left(0, B\cdot x, 0\right),\\
\vec{A}_2 &= \left(x, B\cdot x, 0\right),\\
\vec{A}_3 &= \left(-B\cdot y, 0, 0\right),\\
\vec{A}_4 &= \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}.
\end{aligned}$$

b) Wie lauten die Eichtransformationen α_{ik}, die ein Vektorpotential in ein anderes überführen?

$$\vec{A}_i = \vec{A}_k + \vec{\nabla}\alpha_{ik}.$$

Lösung: Teil a): Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\vec{A}_1 &= \mathrm{rot}\left(0, B\cdot x, 0\right) = \left(0,0,B\right),\\
\mathrm{rot}\,\vec{A}_2 &= \mathrm{rot}\left(x, B\cdot x, 0\right) = \left(0,0,B\right),\\
\mathrm{rot}\,\vec{A}_3 &= \mathrm{rot}\left(-B\cdot y, 0, 0\right) = \left(0,0,B\right),\\
\mathrm{rot}\,\vec{A}_4 &= \mathrm{rot}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\left(-B\cdot y, B\cdot x, 0\right) = \left(0,0,B\right).
\end{aligned}$$

Teil b)

$$\vec{\nabla}\alpha_{12} = \vec{A}_1 - \vec{A}_2 = \left(-x,0,0\right) \;\Rightarrow\; \alpha_{12} = -\frac{1}{2}x^2,$$
$$\vec{\nabla}\alpha_{13} = \vec{A}_1 - \vec{A}_3 = B\left(y,x,0\right) \;\Rightarrow\; \alpha_{13} = Bxy,$$
$$\vec{\nabla}\alpha_{14} = \vec{A}_1 - \vec{A}_4 = \frac{1}{2}B\left(y,x,0\right) \;\Rightarrow\; \alpha_{14} = \frac{1}{2}Bxy,$$

$$\begin{aligned}\alpha_{23} &= \alpha_{13}-\alpha_{12} = Bxy + \frac{1}{2}x^2,\\ \alpha_{24} &= \alpha_{14}-\alpha_{12} = \frac{1}{2}Bxy + \frac{1}{2}x^2,\\ \alpha_{34} &= \alpha_{14}-\alpha_{13} = -\frac{1}{2}Bxy.\end{aligned}$$

4. Yukawa-Potential (7 Punkte)

Für die Beschreibung der Wechselwirkung mancher Elementarteilchen wird eine modifizierte Poisson-Gleichung

$$\left(\Delta - \mu^2\right)\Phi(\vec{x}) \quad = \quad \rho(\vec{x})$$

mit einem reellen Parameter μ benötigt. Ihre Green'sche Funktion ist durch

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}') \quad = \quad \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

definiert, die im Grenzfall $\mu \rightarrow 0$ in die bekannte Green'sche Funktion der Poisson-Gleichung

$$G^{(0)}(\vec{x},\vec{x}') \quad = \quad -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

übergeht.

a) Zeigen Sie, daß $G^{(\mu)}$ nur von der Differenz $\vec{x}-\vec{x}'$ abhängt:

$$G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}') \quad = \quad G^{(\mu)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

b) Bestimmen Sie eine Lösung für $G^{(\mu)}$, indem Sie den Ansatz

$$G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}') \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k\; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k})$$

verwenden. Bestimmen Sie zunächst die Gleichung, die $\tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k})$ erfüllen muß und geben Sie $\tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k})$ an. Bestimmen Sie dann $G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}')$ durch die inverse Fouriertransformation.

c) Berechnen Sie $(\Delta-\mu^2)F(\vec{x})$ mit $F(\vec{x}) = \frac{1}{r}e^{-\mu r}$ (Yukawa-Potential) und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Teilaufgabe b)

d) Geben Sie eine Lösung der verallgemeinerten Poisson-Gleichung

$$\left(\Delta - \mu^2\right)\Phi(\vec{x}) \quad = \quad \rho(\vec{x})$$

für beliebiges bekanntes $\rho(\vec{x})$ an, die im Unendlichen verschwindet.

Lösung: Teil a) Es gilt für beliebiges $\vec{y}$ und $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$:

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) G^{(\mu)}(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x}' - \vec{y}) \;=\; \left(\Delta_z - \mu^2\right) G^{(\mu)}(\vec{z}, \vec{x}' - \vec{y}) = \delta(\vec{z} - \vec{x}' + \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Somit hat man für $\vec{y} = \vec{x}'$:

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) G^{(\mu)}(\vec{x} - \vec{x}', 0) \;=\; \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Teil b) Sei

$$G^{(\mu)}(\vec{x}, \vec{x}') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k})$$

und

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \left(\Delta_x - \mu^2\right) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k}) \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \; \left(-k^2 - \mu^2\right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k}) \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichhiet der Integranden folgt

$$\left(-k^2 - \mu^2\right) \tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}},$$

und somit

$$\tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k}) \;=\; -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{k^2 + \mu^2}.$$

Somit ist

$$G^{(\mu)}(\vec{x}, \vec{x}') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \tilde{G}^{(\mu)}(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{k^2 + \mu^2}$$

Sei nun $\vec{x} - \vec{x}' = (0, 0, r)$.

$$G^{(\mu)}(\vec{x}, \vec{x}') \;=\; -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta e^{-ikr\cos\theta} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2}, \qquad u = -\cos\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty dk \int\limits_{-1}^{1} du e^{ikru}\frac{k^2}{k^2+\mu^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty dk\frac{1}{ikr}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)\frac{k^2}{k^2+\mu^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2 ir}\int\limits_0^\infty dk\left(\frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2}-\frac{ke^{-ikr}}{k^2+\mu^2}\right) = -\frac{1}{(2\pi)^2 ir}\int\limits_{-\infty}^\infty dk\frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2}.
\end{aligned}
$$

Der Integrationsweg kann für $r > 0$ durch einen Halbkreis im Unendlichen des I. und II. Quadranten geschlossen werden. Dieses Stück liefert keinen Beitrag. Somit ergibt sich mit Hilfe des Residuensatzes:

$$
\int\limits_{-\infty}^\infty dk\frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2} = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2}\right)\Bigg|_{k=i|\mu|} = \pi i e^{-r|\mu|}
$$

Und somit

$$
G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-|\mu||\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}
$$

Für $r < 0$ schliessen wir die Kontour nach unten:

$$
\int\limits_{-\infty}^\infty dk\frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2} = -2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{ke^{ikr}}{k^2+\mu^2}\right)\Bigg|_{k=-i|\mu|} = -\pi i e^{-r|\mu|}
$$

und somit

$$
G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{|\mu||\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}
$$

Teil c) Wir betrachten zunächst $r \neq 0$. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
$$

Somit

$$
\left(\Delta-\mu^2\right)\frac{1}{r}e^{-\mu r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \mu^2\right)\frac{1}{r}e^{-\mu r}
$$

Bemerkung:

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rf(r)\right).
$$

Somit

$$
\left(\Delta-\mu^2\right)\frac{1}{r}e^{-\mu r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}e^{-\mu r} - \mu^2\frac{1}{r}e^{-\mu r} = \frac{(\mu^2-\mu^2)}{r}e^{-\mu r} = 0.
$$

Zur Überprüfung des Verhaltens am Ursprung integriert man über eine Testfunktion und verwendet den zweiten Green'schen Satz:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x|\le\varepsilon} d^3x\; f(r)\left(\Delta-\mu^2\right)\frac{1}{r}e^{-\mu r} &= \int\limits_{|x|\le\varepsilon} d^3x\;\frac{1}{r}e^{-\mu r}\Delta f(r)-\mu^2\int\limits_{|x|\le\varepsilon} d^3x\; f(r)\frac{1}{r}e^{-\mu r}\\
&\quad+\int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2\sigma\; f(r)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}e^{-\mu r}-\int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2\sigma\;\frac{1}{r}e^{-\mu r}\frac{\partial}{\partial r}f(r).
\end{aligned}$$

Es ist $d^3x = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ und $d^2\sigma = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$, daher verschwinden der erste, zweite und der vierte Term im Grenzfall $\varepsilon\to 0$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x|\le\varepsilon} d^3x\; f(r)\left(\Delta-\mu^2\right)\frac{1}{r}e^{-\mu r} &= \int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2\sigma\; f(r)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}e^{-\mu r} = \int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2\sigma\; f(r)\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{\mu}{\varepsilon}\right)e^{-\mu\varepsilon}\\
&= -4\pi e^{-\mu\varepsilon}f(\varepsilon)\to -4\pi f(0).
\end{aligned}$$

Teil d) Mit Hilfe der Green'schen Funktion haben wir

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x'\rho(\vec{x}')G^{(\mu)}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\rho(\vec{x}')\frac{e^{-|\mu||\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Offensichtlich verschwindet $\Phi(\vec{x})$ im Unendlichen.

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 5
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 31.5.2006

1. Lorentz-Transformation elektrischer und magnetischer Felder

(3 Punkte)

Leiten Sie die expliziten Formeln für die Lorentz-Transformation der Komponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und des magnetischen Feldes $\vec{B}$ aus dem allgemeinen Transformationsverhalten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ her. Es genügt, dies für einen Lorentz-Boost parallel zur z-Richtung durchzuführen.

Lösung: Der Feldstärketensor ist gegeben durch

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

und transformiert sich unter einer Lorentztransformation wie

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho F^{\rho\sigma} \left(\Lambda^T\right)_\sigma{}^\nu$$

Mit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplikation findet man

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma E^x - \beta\gamma B^y & -\gamma E^y + \beta\gamma B^x & -E^z \\ \gamma E^x + \beta\gamma B^y & 0 & -B^z & \beta\gamma E^x + \gamma B^y \\ \gamma E^y - \beta\gamma B^x & B^z & 0 & \beta\gamma E^y - \gamma B^x \\ E^z & -\beta\gamma E^x - \gamma B^y & -\beta\gamma E^y + \gamma B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat man

$$\begin{aligned} E'^x &= \gamma E^x + \beta\gamma B^y, \\ E'^y &= \gamma E^y - \beta\gamma B^x, \\ E'^z &= E^z, \\ \\ B'^x &= \gamma B^x - \beta\gamma E^y, \\ B'^y &= \gamma B^y + \beta\gamma E^x, \\ B'^z &= B^z. \end{aligned}$$

2. Invarianten des Feldstärketensors (6 Punkte)

a) Drücken sie die Größen $a = \vec{E} \cdot \vec{B}$ und $b = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$ durch die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ aus. (Hinweis: Sie benötigen auch den Levi-Civita-Tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.)

b) Wie transformieren sich a und b unter einer Lorentz-Transformation?

c) Zeigen Sie, falls es in einem bestimmten Inertialsystem konstante Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gibt, die nicht senkrecht aufeinander stehen, so gibt es kein Inertialsystem, in dem eines der beiden Felder verschwindet.

d) Gilt andererseits in einem Bezugsystem aber $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ und $|\vec{B}| \neq |\vec{E}|$, so gibt es ein Bezugssystem, in dem eines der beiden Felder verschwindet (abhängig davon, welches der beiden im ursprünglichen Bezugssystem stärker war). Zeigen Sie dies und geben Sie die Lorentz-Transformation an.

e) Falls letztlich in einem Bezugssystem $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ und $|\vec{B}| = |\vec{E}|$ gilt, so sind die Felder in einem anderen Bezugssystem, daß sich gegenüber dem ersten mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in der Richtung $\vec{E} \times \vec{B}$ bewegt, um den Dopplerfaktor

$$\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

reduziert. Zeigen Sie dies.

Lösung: Teil a) Es ist

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}.$$

Wir erhalten durch Einsetzen

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \;=\; 2\left(\left|\vec{B}\right|^2 - \left|\vec{E}\right|^2 \right).$$

Mit $\varepsilon_{0123} = +1$ erhalten wir

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \;=\; 8\vec{E} \cdot \vec{B}.$$

Also:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}, \\ b &= \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Teil b) Die Ausdrücke

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}.$$

sind invariant unter Transformationen der eigentlichen orthochronalen Lorentzgruppe.

Teil c) Nach Voraussetzung soll

$$a = \vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$$

gelten. Nun ist aber, wie oben gezeigt wurde $(\vec{E}\cdot\vec{B})$ Lorentz-invariant und hat daher in allen Bezugssystemen den gleichen Wert. Dies schliest $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$ aus, da in diesem Fall ja $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ wäre.

Teil d) Sei nun $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ und $|\vec{B}| \neq |\vec{E}|$. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß

$$\vec{B} = B^x\vec{e}_x, \qquad \vec{E} = E^y\vec{e}_y$$

gilt. Mittels der Lorentztransformation aus Aufgabe 1 erhalten wir

$$\begin{aligned} E'^x &= 0, \\ E'^y &= \gamma E^y - \beta\gamma B^x, \\ E'^z &= 0, \\ \\ B'^x &= \gamma B^x - \beta\gamma E^y, \\ B'^y &= 0, \\ B'^z &= 0. \end{aligned}$$

Sei nun $|E^y| > |B^x|$. Dann verschwindet das B-Feld, falls

$$\beta = \frac{B^x}{E^y}$$

gewählt wird. Beachte, daß wegen der Voraussetzung $|E^y| > |B^x|$ die Geschwindigkeit, mit der sich das gestrichene System gegebüber dem ursprünglichen bewegt, kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist:

$$|\beta| < 1.$$

Ist andererseits $|E^y| < |B^x|$, so verschwindet das E-Feld, falls

$$\beta \quad = \quad \frac{E^y}{B^x}$$

gewählt wird.

Teil e) Sei nun $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ und $|\vec{B}| = |\vec{E}|$. Wir wählen

$$\vec{B} = B^x \vec{e}_x, \qquad \vec{E} = E^y \vec{e}_y$$

wobei $|B^x| = |E^y|$ gilt. Dies bedeutet $B^x = \pm E^y$. Wir nehmen im folgenden $B^x = E^y$ and. Das gestrichene System bewegt sich mit der Geschwindigkeit $|v|$ in Richtung der (negativen) z-Achse. Wie oben haben wir

$$\begin{aligned} E'^y &= \gamma E^y - \beta\gamma B^x = \gamma(1-\beta)E^y, \\ B'^x &= \gamma B^x - \beta\gamma E^y = \gamma(1-\beta)B^x. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\gamma(1-\beta) \quad = \quad \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

3. Komplexe Drehungen (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß sich das Verhalten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und des magnetischen Feldes $\vec{B}$ unter einer Lorentz-Transformation auch als eine Drehung des Vektors

$$\vec{Z} \quad = \quad \vec{B} + i\vec{E}$$

um einen komplexen Winkel beschreiben läßt.

Lösung: Wir berechnen zunächst das Verhalten von $\vec{Z}$ unter der Lorentz-Transformation aus Aufgabe 1. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{Z}' &= \vec{B}' + i\vec{E}' = \begin{pmatrix} \gamma B^x - \beta\gamma E^y + i\left(\gamma E^x + \beta\gamma B^y\right) \\ \gamma B^y + \beta\gamma E^x + i\left(\gamma E^y - \beta\gamma B^x\right) \\ B^z + iE^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma\left(B^x + iE^x\right) + i\beta\gamma\left(B^y + iE^y\right) \\ \gamma\left(B^y + iE^y\right) - i\beta\gamma\left(B^x + iE^x\right) \\ B^z + iE^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma & 0 \\ -i\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{Z} \end{aligned}$$

Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma \\ -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

ist, wie man leicht nachrechnet, ein Element der (komplexifizierten) $SO(2)$:

$$\begin{aligned} \det M &= \gamma^2 + (i\beta\gamma)^2 = 1, \\ MM^T &= \gamma^2 \begin{pmatrix} 1-\beta^2 & 0 \\ 0 & 1-\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit kann M auch als

$$M = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

mit einem zu bestimmenden Winkel ϕ, parametrisiert werden. Es gilt

$$\cos\phi = \gamma.$$

Da $\gamma > 1$ ist, muß ϕ imaginär sein. Wir setzten $\phi = i\alpha$ und erhalten mit

$$\cos\phi = \cos(i\alpha) = \cosh\alpha$$

letztendlich

$$\cosh\alpha = \gamma.$$

4. Ernie und Bert bauen ein Walkie-Talkie (4 Punkte)

Ernie und Bert möchten auch unterwegs miteinander kommunizieren. Sie beschliesen, zwei Walkie-Talkies zu bauen, die mit statischen elektrischen und magnetischen Feldern arbeiten. So wollen sie durch An- und Abschalten Nachrichten mit Hilfe des Morse-Alphabets übermitteln.
Ernie entwickelt ein Gerät, das statische elektrische Felder erzeugen kann und darüberhinaus elektrische Felder detektieren kann, vorausgesetzt daß störende magnetische Felder im Gauß'schen Maßsystem nicht stärker als

$$\left|\vec{B}\right|^2 < 5\left|\vec{E}\right|^2$$

sind. Bert entwickelt ein Gerät, das statische magnetische Felder erzeugen kann und darüberhinaus magnetische Felder detektieren kann, vorausgesetzt daß störende elektrische Felder im Gauß'schen Maßsystem nicht stärker als

$$\left|\vec{E}\right|^2 < 5\left|\vec{B}\right|^2$$

sind. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß die Geräte homogene Felder erzeugen. Ernie und Bert testen ihre Geräte, indem Ernie die Sesamstraße entlang läuft und Bert am Ausgangspunkt zurückbleibt.

a) Welche Geschwindigkeit muß Ernie mindestens erreichen, so daß Nachrichten übermittelt werden können?

b) Wie hängt diese Geschwindigkeit von der Ausrichtung des Gerätes von Bert ab?

c) Für welche Ausrichtungen ist keine Nachrichtenübermittlung möglich?

Lösung: Ernie (System K) erzeugt im System K ein reines E-Feld. Bert (System K') läuft mit Geschwindigkeit v in Richtung der negativen z-Achse, also bewegt sich das System K gegenüber K' mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven z-Achse. Die Felder im System K' lauten:

$$\begin{aligned} E'^x &= \gamma E^x, \\ E'^y &= \gamma E^y, \\ E'^z &= E^z, \\ \\ B'^x &= -\beta\gamma E^y, \\ B'^y &= \beta\gamma E^x, \\ B'^z &= 0. \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} |E'|^2 &= (E^z)^2 + \gamma^2 \left[(E^x)^2 + (E^y)^2 \right] = E_{||}^2 + \gamma^2 E_\perp^2, \\ |B'|^2 &= \beta^2\gamma^2 \left[(E^x)^2 + (E^y)^2 \right] = \beta^2\gamma^2 E_\perp^2. \end{aligned}$$

Daß Bert ein Signal detektieren kann, ist

$$\frac{|B'|^2}{|E'|^2} > \frac{1}{5}$$

erforderlich. Also

$$\frac{\beta^2\gamma^2 E_\perp^2}{E_{||}^2 + \gamma^2 E_\perp^2} > \frac{1}{5}.$$

Teil a) Diese Funktion wird maximiert für $E_{||}^2 = 0$, also $\beta^2 > 1/5$ und daher

$$v > \frac{1}{\sqrt{5}} c.$$

Teil b) Sei R das Verhältnis

$$R = \frac{E_{||}^2}{E_\perp^2}.$$

Auflösen von

$$\frac{\beta^2\gamma^2 E_\perp^2}{E_{||}^2 + \gamma^2 E_\perp^2} > \frac{1}{5}.$$

liefert

$$\beta^2 > \frac{1+R}{5+R}$$

also

$$v > \sqrt{\frac{1+R}{5+R}}c.$$

Teil c) Wir betrachten zunächst den Fall $E_\perp^2 \neq 0$ Kein Empfang erfordert

$$\beta^2 \leq \frac{1+R}{5+R}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1+R}{5+R} < 1$$

für $R \in [0, \infty[$. In diesem Fall muß Bert nur schnell genug laufen. Für den Fall $E_\perp^2 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} E'^x &= 0, \\ E'^y &= 0, \\ E'^z &= E^z, \\ \\ B'^x &= 0, \\ B'^y &= 0, \\ B'^z &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall empfängt Bert, so schnell er auch läuft, nichts.

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 6
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 14.6.2006

1. Der Energie-Impuls-Tensor (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes für den Fall, daß keine äußeren Quellen vorhanden sind, definiert. Betrachten Sie nun das elektromagnetische Feld mit äußeren Quellen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu.$$

Behalten Sie die Definition des Energie-Impuls-Tensors bei und berechnen Sie seine Divergenz. Geben Sie das Ergebnis speziell für die zeitliche Komponente an und drücken Sie es durch die Energiedichte, den Poynting'schen Vektor und die Stromdichte aus.

Lösung: Wir behalten die Definition des Energie-Impuls-Tensors bei

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\tau}(x) F_\tau{}^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right].$$

Für dessen Divergenz finden wir

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\mu \left(F_{\mu\tau} F^{\tau\nu} \right) + \frac{1}{4} \partial^\nu \left(F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\left(\partial^\mu F_{\mu\tau} \right) F^{\tau\nu} + F_{\mu\tau} \partial^\mu F^{\tau\nu} + \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} \right] \\
&= \frac{1}{c} j_\tau F^{\tau\nu} + \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\tau} \partial^\mu F^{\tau\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\tau} \partial^\nu F^{\mu\tau} \right] \\
&= -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu + \frac{1}{8\pi} F_{\mu\tau} \left[\partial^\mu F^{\tau\nu} - \partial^\tau F^{\nu\mu} \right] \\
&= -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu + \frac{1}{8\pi} F_{\mu\tau} \left[\partial^\mu F^{\tau\nu} + \partial^\tau F^{\mu\nu} \right] \\
&= -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu.
\end{aligned}$$

Ausgeschrieben für die zeitliche Komponente erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \vec{S} \right) &= -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}, \\
\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} &= 0.
\end{aligned}$$

2. Energie- und Impulserhaltung (4 Punkte)

Definieren Sie zunächst für ein Teilchen der Masse m die Massendichte und die Massenstromdichte. Bestimmen Sie dann für ein freies Teilchen den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}_{Teilchen}$. Zeigen Sie dann, daß für das System von einem geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld gilt:

$$\partial_\mu \left(T^{\mu\nu}_{el.-magn.} + T^{\mu\nu}_{Teilchen} \right) \;=\; 0,$$

d.h. der Gesamtimpuls und die Gesamtenergie ist erhalten. $T^{\mu\nu}_{el.-magn.}$ ist der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes.

Lösung: Zur Erinnerung: Die Vierer-Stromdichte eines geladenen Teilchens ist

$$j^\mu \;=\; \left(c\rho, \vec{j} \right) = qc \int ds\; u^\mu\; \delta^4(x - x_a(t)),$$

wobei $u^\mu = \gamma(1, \vec{v}/c)$ die Vierergeschwindigkeit ist. Analog läßt sich eine Vierer-Massenstromdichte definieren als

$$j^\mu_M \;=\; \left(c\rho_M, \vec{j}_M \right) = mc \int ds\; u^\mu\; \delta^4(x - x_a(t)).$$

Massenerhaltung impliziert (analog zur Ladungserhaltung):

$$\partial_\mu j^\mu_M \;=\; 0.$$

Die Massendichte ist also

$$\rho_M \;=\; m\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_a(t)).$$

Der Impuls eines freien Teilchens ist $p^\mu = mcu^\mu$, und die Impulsdichte daher $\rho_M c u^\mu$. Nun hängt aber die Impulsdichte mit den Komponenten des Energie-Impulstensors für ein freies Teilchen wie folgt zusammen:

$$\frac{1}{c} T^{0\nu}_{Teilchen} \;=\; \rho_M c u^\nu.$$

Nun ist aber $c\rho_M$ die Zeitkomponente des Vierervektors j^μ_M. Daher ergibt sich der Energie-Impuls-Tensor eines freien Teilchens zu

$$T^{\mu\nu}_{Teilchen} \;=\; c j^\mu u^\nu = \frac{\rho_M c^2}{\gamma} u^\mu u^\nu.$$

Dieser Tensor ist offensichtlich symmetrisch.

Wir betrachten nun ein System mit der Wirkung

$$S \;=\; -\frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - mc \int_a^b ds + S_{WW}.$$

Für den Wechselwirkungsterm gilt:

$$S_{WW} = -\frac{1}{c}\int d^4x j^\mu(x)\ A_\mu(x) = -\frac{q}{c}\int_a^b dx^\mu\ A_\mu(x).$$

Wir behalten die Definitionen des Energie-Impuls-Tensors für die Felder und das Teilchen:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{Felder} &= \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}(x)F_\tau{}^\nu(x) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right], \\ T^{\mu\nu}_{Teilchen} &= \frac{\rho_M c^2}{\gamma}u^\mu u^\nu = cj^\mu_M u^\nu. \end{aligned}$$

In Aufgabe 1. wurde schon gezeigt, daß

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{Felder} = -\frac{1}{c}F^{\nu\mu}j_\mu$$

gilt. Wir berechnen nun die Divergenz von $T^{\mu\nu}_{Teilchen}$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu}_{Teilchen} &= \partial_\mu\left(cj^\mu_M u^\nu\right) = cj^\mu_M\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}, \quad \text{(Erhaltung des Massenstromes)} \\ &= \frac{c^2}{\gamma}\rho_M u^\mu\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{c^2}{\gamma}\rho_M\frac{dx^\mu}{ds}\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{c^2}{\gamma}\rho_M\frac{du^\nu}{ds}. \end{aligned}$$

Nun ist aber $\rho_M = \frac{m}{q}\rho$ und ausserdem haben wir die Formulierung der Loretnz-Kraft in Viererschreibweise:

$$mc\frac{d}{ds}u^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu.$$

Somit

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu}_{Teilchen} &= \frac{c^2}{\gamma}\rho_M\frac{du^\nu}{ds} = \frac{c^2}{\gamma}\left(\frac{m}{q}\rho\right)\left(\frac{q}{mc^2}F^{\nu\mu}u_\mu\right) \\ &= \frac{1}{\gamma}\rho F^{\nu\mu}u_\mu = \frac{1}{c}F^{\nu\mu}j_\mu. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\partial_\mu\left(T^{\mu\nu}_{el.-magn.} + T^{\mu\nu}_{Teilchen}\right) = 0,$$

was zu beweisen war.

3. **Energiedichte** (4 Punkte)

a) Eine Kugel mit Radius r_0 trage auf ihrer Oberfläche die Ladung Q. Man berechne die Energie des elektrischen Feldes.

b) Zwei gleiche Kugeln nach a) befinde sich in einem Abstand L. Man berechne die Energie des Feldes dieses Systems. Man variiere dann den Abstand L und berechne so die Kraft.

Lösung: Teil a) Für die Feldstärke gilt: Die elektrische Feldstärke ist radial nach außen gerichtet, ihr Betrag ist gegeben durch

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r < r_0 \\ \frac{Q}{r^2} & \text{für} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Die Energiedichte eines elektrischen Feldes ist gegeben durch

$$u = \frac{1}{8\pi} |E|^2 .$$

Somit ergibt sich die Energie U zu

$$U = \int d^3x \; u(\vec{x}) = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} dr \; r^2 \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4} = \frac{Q^2}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2r_0}.$$

Teil b) Vorbemerkung: Sei K_1 die erste Kugel, K_2 die zweite Kugel und bezeichne ∂K_j die Oberfläche der Kugel j. Auf der Kugeloberfläche ist das Potential konstant. Also

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= c_1 \qquad \text{für alle } \vec{x} \in \partial K_1, \\ \phi(\vec{x}) &= c_2 \qquad \text{für alle } \vec{x} \in \partial K_2. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist $c_1 = c_2$. Weiter folgt aus Teil a) das

$$c_1 = c_2 = \frac{Q}{r_0} + \frac{Q}{(L - r_0)}.$$

Zweite Vorbemerkung: Bezeichne ρ_{FL} die Flächenladungsdichte der Oberflächen der Kugeln. Da beide Kugeln die Ladung Q tragen sollen, gilt,

$$\int_{\partial K_1} d\sigma \; \rho_{FL}(\vec{x}) = \int_{\partial K_2} d\sigma \; \rho_{FL}(\vec{x}) = Q.$$

Wir bestimmen nun den Energieinhalt des Feldes:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left|\vec{E}\right|^2 = -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \; \vec{E} \; \vec{\nabla}\phi$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{\nabla}\left(\vec{E}\,\phi\right) + \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right)\phi, \quad \text{(partielle Integration)} \\
&= \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right)\phi \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho\phi, \quad \text{(dritte Maxwell-Gleichung)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\partial K_1} d\sigma\rho_{FL}\phi + \int\limits_{\partial K_2} d\sigma\rho_{FL}\phi\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Ladungsdichte nur auf der Oberfläche}\\ \text{der Kugeln von Null verschieden}\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{r_0} + \frac{Q}{(L-r_0)}\right)\left(\int\limits_{\partial K_1} d\sigma\rho_{FL} + \int\limits_{\partial K_2} d\sigma\rho_{FL}\right) \\
&= Q^2\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{(L-r_0)}\right).
\end{aligned}
$$

Berechnung der Kraft:

$$
F = -\frac{dU}{d(L-r_0)} = \frac{Q^2}{(L-r_0)^2}.
$$

4. Das Dirac-Feld (4 Punkte)

Teilchen mit Spin 1/2 werden durch die Dirac-Felder $\psi_\alpha(x)$ und $\bar{\psi}_\beta(x)$ beschrieben, $\alpha, \beta \in \{1,2,3,4\}$. α und β sind keine Lorentz-Indizes ! Die Lagrangedichte lautet

$$
\mathcal{L}_{frei} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x)\left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta(x).
$$

In diesem Ausdruck sind $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ 4×4-Matrizen (Dirac-Matrizen), welche $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$ erfüllen. m ist die Masse des Teilchens.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Felder $\psi(x)$ und $\bar{\psi}$ her.

b) Wir betrachten nun die Wechselwirkung von Fermionen mit Photonen, die durch

$$
\mathcal{L}_{WW} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} q\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}A_\mu(x)\psi_\beta(x)
$$

beschrieben werden kann. q ist die Ladung des Fermions. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{WW}$ invariant ist unter der Transformation

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(x) &\rightarrow e^{-i\chi(x)}\psi_\alpha(x), \\
\bar{\psi}_\beta(x) &\rightarrow \bar{\psi}_\beta(x)e^{i\chi(x)}, \\
A_\mu(x) &\rightarrow e^{-i\chi(x)}\left(A_\mu(x) + \frac{i}{q}\partial_\mu\right)e^{i\chi(x)}.
\end{aligned}
$$

c) Wie lautet der zugehörige erhaltene Strom?

Lösung: Teil a) Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den Euler-Lagrange-Gleichungen. Für $\bar{\psi}_\alpha(x)$ lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha\right)} = 0.$$

Somit

$$\sum_{\beta=1}^{4} \left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta(x) = 0.$$

Bemerkung: In der Lagrangedichte tritt nur das Feld $\bar{\psi}_\alpha(x)$ aber nicht die Ableitung $\partial_\mu\bar{\psi}_\alpha(x)$ auf. Analog lautet die Euler-Lagrange-gleichung für $\psi_\beta(x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\beta} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_\beta\right)} = 0.$$

Hier tritt nun sowohl das Feld $\psi_\beta(x)$ als auch dessen Ableitung $\partial_\mu\psi_\beta(x)$ in der Lagrangedichte auf. Man findet:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x)\left(-m\delta_{\alpha\beta}\right) - \partial_\mu \sum_{\alpha=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x)\left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\right) = 0.$$

Umgeformt:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta} + m\delta_{\alpha\beta}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen nennt man auch die Dirac-Gleichungen.
(Bemerkung: Da Fermion-Felder antikommutieren, tritt noch ein globales Vorzeichen auf, das daher rührt, daß man die Funktionalableitungen nach $\psi_\beta(x)$ und $\partial_\mu\psi_\beta(x)$ an $\bar{\psi}_\alpha(x)$ vorbeiziehen muß.)

Teil b) $\mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{WW}$ läßt sich schreiben als

$$\mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{WW} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x)\left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu + q\gamma^\mu_{\alpha\beta}A_\mu(x) - m\delta_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta(x).$$

Die transformierte Lagrangedichte lautet

$\mathcal{L}'_{frei} + \mathcal{L}'_{WW} =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) e^{i\chi(x)} \left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu + q\gamma^\mu_{\alpha\beta} \left[e^{-i\chi(x)} \left(A_\mu(x) + \frac{i}{q}\partial_\mu \right) e^{i\chi(x)} \right] - m\delta_{\alpha\beta} \right) e^{-i\chi(x)} \psi_\beta(x) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) e^{i\chi(x)} i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu e^{-i\chi(x)} \psi_\beta(x) + \bar{\psi}_\alpha(x) \left(q\gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu(x) - m\delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x) \\
&\quad + \bar{\psi}_\alpha(x) i\gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\partial_\mu e^{i\chi(x)} \right) e^{-i\chi(x)} \psi_\beta(x) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) \left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu + q\gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu(x) - m\delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x) \\
&\quad + \bar{\psi}_\alpha(x) e^{i\chi(x)} i\gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\partial_\mu e^{-i\chi(x)} \right) \psi_\beta(x) + \bar{\psi}_\alpha(x) i\gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\partial_\mu e^{i\chi(x)} \right) e^{-i\chi(x)} \psi_\beta(x) \\
&= \mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{WW} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\partial_\mu \chi(x) \right) \psi_\beta(x) - \bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\partial_\mu \chi(x) \right) \psi_\beta(x) \\
&= \mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{WW}.
\end{aligned}$$

Teil c) Für infinitessimale Eichtransformationen hat man

$$\delta\psi_\beta(x) = -i\chi(x)\psi_\beta(x).$$

Der erhaltene Noetherstrom ist gegeben durch

$$J^\mu(x) = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\beta)} \delta\psi_\beta.$$

Bemerkung: In $\mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{WW}$ tritt weder $\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha$ noch $\partial_\mu A_\nu$ auf. Somit:

$$J^\mu(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) \left(i\gamma^\mu_{\alpha\beta} \right) \left(-i\chi(x) \right) \psi_\beta(x) = \chi(x) \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^\mu_{\alpha\beta} \psi_\beta(x)$$

Da $\chi(x)$ beliebig sein kann, gilt insbesondere

$$\partial_\mu \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^\mu_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right) = 0.$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 7
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 21.6.2006

1. Wechselwirkung von Dipolen (4 Punkte)

Zwei gleiche Dipole vom Moment d seien um ihren Schwerpunkt drehbar aufgehängt. Ihr Abstand sei auf a fixiert. Wie stellen sich die Dipole unter ihrer gegenseitigen Kraftwirkung ein? Berechnen Sie hierzu ihre Wechselwirkungsenergie und bestimmen Sie dessen Minimum.

Lösung: Die Dipole seien an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit den Dipolmomenten $\vec{d}_1$ und $\vec{d}_2$. Es gilt $|\vec{d}_1| = |\vec{d}_2|$ und $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = a$. Für das Potential eines Dipols gilt

$$\Phi_i = \frac{\vec{d}_i \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

Ein Dipol erzeugt im Außenraum das Feld

$$\vec{E}_i = \frac{3\left((\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot \vec{d}_i\right)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^5} (\vec{x} - \vec{x}_i) - \frac{\vec{d}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

Die Wechselwirkungsenergie zwischen einem Dipol und einem äußeren Feld ist gegeben durch

$$U_{WW} = -\vec{d}_1 \vec{E}_2 = -\vec{d}_2 \vec{E}_1.$$

Wählen wir $\vec{x}_1 = \vec{0}$, $\vec{x}_2 = a\vec{e}_3$, so ist

$$U_{WW} = -\vec{d}_2 \cdot \left(\frac{3\left(a\vec{e}_3 \cdot \vec{d}_1\right)}{a^5} a\vec{e}_3 - \frac{\vec{d}_1}{a^3} \right) = \frac{1}{a^3} \left[\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{e}_3\right)\left(\vec{d}_2 \cdot \vec{e}_3\right) \right]$$

Sein nun

$$\vec{d}_i = d \begin{pmatrix} \sin\theta_i \cos\varphi_i \\ \sin\theta_i \sin\varphi_i \\ \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Dann

$$U_{WW} = \frac{d^2}{a^3} \left[\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2 \right]$$

Wir setzen $\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$. Für ein Minimum muß gelten:

$$\frac{\partial U_{WW}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U_{WW}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial U_{WW}}{\partial \varphi'} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{WW}}{\partial \theta_1} &= \frac{d^2}{a^3}\left[\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi' + 2\sin\theta_1 \cos\theta_2\right], \\
\frac{\partial U_{WW}}{\partial \theta_2} &= \frac{d^2}{a^3}\left[\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\varphi' + 2\cos\theta_1 \sin\theta_2\right], \\
\frac{\partial U_{WW}}{\partial \varphi} &= -\frac{d^2}{a^3}\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\varphi'.
\end{aligned}$$

Als Bedingung für ein Minimum findet man die folgenden Fälle:

1. $\sin\theta_1 = 0$ und $\sin\theta_2 = 0$.
2. $\sin\varphi' = 0$ und $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = 0$.

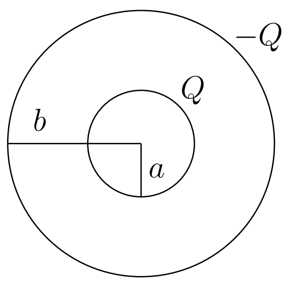
Also läßt sich zusammenfassend als Bedingung für ein Minimum angeben:

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = 0.$$

Man rechnet leicht nach, daß die Kombinationen $(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0)$ und $(\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi)$ ein Minimum ergeben, die Kombinationen $(\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi)$ und $(\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0)$ dagegen ein Maximum.

2. Multipolentwicklung (4 Punkte)

Zwei gleichförmig geladene, dünne koaxiale Kreisringe mit den Radien a und b und den Ladungen Q und $-Q$ sind in einer Ebene angeordnet.



Bestimmen Sie das Potential für große Abstände aus der Multipolentwicklung unter Ausnutzung der Symmetrie der Ladungsverteilung.

Lösung: Für dieses Problem verwendet man am günstigsten Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Die Ladungsverteilung lautet

$$\rho = \frac{Q}{2\pi a}\delta(r-a)\delta(z) - \frac{Q}{2\pi b}\delta(r-b)\delta(z).$$

Offensichtlich ist die Gesamtladung gleich Null:

$$Q_{total} = \int d^3x\, \rho = 0.$$

Ebenso verschwindet das Dipolmoment:

$$\vec{d} = \int d^3x \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \rho = \vec{0}.$$

Wir betrachten nun das Quadrupolmoment

$$Q^{ij} = \int d^3x \left[3x^i x^j - (r^2+z^2)\delta^{ij}\right] \rho(\vec{x}).$$

Man überzeugt sich leicht, daß die nicht-diagonalen Quadrupolmomente verschwinden, da die Integration über φ eine Null liefert. Außerdem folgt aus der Symmetrie der Ladungsverteilung, daß $Q^{11} = Q^{22}$ gilt. Da das Quadrupolmoment einen spurlosen Tensor darstellt

$$Q^{11} + Q^{22} + Q^{33} = 0,$$

muß nur ein Wert berechnet werden. Wir berechnen daher Q^{33}:

$$\begin{aligned} Q^{33} &= \int d^3x \left[3z^2 - (r^2+z^2)\right] \rho(\vec{x}) = \int d^3x \left[2z^2 - r^2\right] \rho(\vec{x}) \\ &= \int\limits_0^\infty dr\, r \left(-r^2\right) \left(\frac{Q}{a}\delta(r-a) - \frac{Q}{b}\delta(r-b)\right) \\ &= Q\left(b^2 - a^2\right). \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$Q^{11} = Q^{22} = -\frac{1}{2}Q^{33} = -\frac{Q}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Für das von diesem Quadrupol erzeugte Potential gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q^{ij}\frac{x^i x^j}{r^5} \\ &= \frac{1}{2}Q\left(b^2 - a^2\right)\frac{\left(z^2 - \frac{1}{2}r^2\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{1}{4}Q\left(b^2 - a^2\right)\frac{\left(3z^2 - |\vec{x}|^2\right)}{|\vec{x}|^5}. \end{aligned}$$

3. Multipolmomente (2 Punkte)

Eine Ladungsverteilung besitze die Form

$$\rho(\vec{x}) \;=\; \rho_0(r) + \rho_2(r)Y_{20}(\cos\theta) + \rho_3(r)Y_{30}(\cos\theta)$$

mit bekannten Funktionen $\rho_l(r)$. Welche Multipolmomente sind von Null verschieden ? Welche r-Integrale müssen berechnet werden, um diese anzugeben ?

Lösung: Die Multipolmomente berechnen sich nach

$$q_{lm} \;=\; \int d^3x r^l Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\rho(\vec{x}).$$

Wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen sind nur q_{00}, q_{20} und q_{30} für die gegebene Ladungsverteilung von Null verschieden.

$$\begin{aligned}
q_{00} &= \int d^3x Y_{00}^*(\theta,\varphi)\rho(\vec{x}) = \int d^3x Y_{00}^*(\theta,\varphi)\rho_0(r) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty dr\; r^2 \int d\Omega\rho_0(r) = \sqrt{4\pi}\int_0^\infty dr\; r^2\rho_0(r), \\
q_{20} &= \int d^3x r^2 Y_{20}^*(\theta,\varphi)\rho(\vec{x}) = \int d^3x r^2 Y_{20}^*(\theta,\varphi)\rho_2(r)Y_{20}(\theta,\varphi) \\
&= \int_0^\infty dr\; r^4\rho_2(r), \\
q_{30} &= \int d^3x r^3 Y_{30}^*(\theta,\varphi)\rho(\vec{x}) = \int d^3x r^3 Y_{30}^*(\theta,\varphi)\rho_3(r)Y_{30}(\theta,\varphi) \\
&= \int_0^\infty dr\; r^5\rho_3(r).
\end{aligned}$$

4. Quadrupol im Kristallgitter (6 Punkte)

In einem nichtkubischen Kristallgitter soll ein Atom betrachtet werden, dessen Kern eine deformierte Ladungsverteilung hat. Als ein Modell für das von den nächsten Nachbarn und den Elektronen am Ort des Kerns erzeugte Feld soll hier folgende Anordnung untersucht werden: Sechs negative Ladungen $q = -e$ seien auf der x-Achse und y-Achse in Abständen c und $-c$ vom Ursprung und auf der z-Achse in Abständen d und $-d$ vom Ursprung angebracht. Der betrachtete Atomkern sei ein homogen geladenes starres Rotationsellipsoid mit der Ladung Ze und den Hauptachsen a und b. Die Rotationsachse sei als z'-Achse bezeichnet. Der Kern sei im Ursrpung frei drehbar festgehalten.

a) Berechnen Sie das Quadrupolmoment des Kerns.

b) Man gebe das Potential ϕ der 6 Ladungen an und entwickle es um die Stelle $\vec{r} = 0$ bis zu Gliedern zweiter Ordnung. Man überzeuge sich, daß keine Ausdrücke proportional zu xy, xz, yz im Resultat vorkommen und daß $\Delta\phi = 0$ für $\vec{r} = 0$ gilt.

c) Man gebe das Drehmoment auf das Ellipsoid an, wenn seine z'-Achse mit der z-Achse den Winkel δ bildet.

Lösung: Teil a) Zur Berechnung des Quadrupolmoments des Kerns im Koordinatensystem K' verwenden wir wieder Zylinderkoordinaten (r', φ', z'). Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die z'-Achse mit der Symmetrieachse des Kerns zusammenfällt. Die Formel für das Quadrupolmoment lautet:

$$Q^{ij} = \int d^3x' \left[3x'^i x'^j - (r'^2 + z'^2)\delta^{ij}\right] \rho(\vec{x}').$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie von $\rho(\vec{x}')$ verschwindet auch hier Q^{ij} für $i \neq j$. Ebenso folgt aus der Rotationssymmetrie $Q^{11} = Q^{22}$, und da die Spur des Quadrupolmoments verschwindet

$$Q^{11} = Q^{22} = -\frac{1}{2}Q^{33}.$$

Wir berechnen Q^{33}:

$$\begin{aligned}
Q^{33} &= \int d^3x' \left(2z'^2 - r'^2\right) \rho(\vec{x}') \\
&= 2\pi\rho \int_{-b}^{b} dz' \int_{0}^{a\sqrt{1-\frac{z'^2}{b^2}}} dr' r' \left(2z'^2 - r'^2\right) \\
&= 2\pi\rho \int_{-b}^{b} dz' z'^2 a^2 \left(1 - \frac{z'^2}{b^2}\right) - \frac{1}{4}a^4 \left(1 - \frac{z'^2}{b^2}\right)^2 \\
&= 2\pi\rho a^2 \int_{-b}^{b} dz' \left[-\frac{1}{4}a^2 + \left(1 + \frac{a^2}{2b^2}\right) z'^2 - \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{a^2}{4b^2}\right) z'^4\right] \\
&= 2\pi\rho a^2 \left[-\frac{1}{2}a^2 b + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{a^2}{2b^2}\right) b^3 - \frac{2}{5}\left(1 + \frac{a^2}{4b^2}\right) b^3\right] \\
&= \frac{8\pi}{15}a^2 b(b^2 - a^2)\rho.
\end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\frac{4\pi}{3}a^2 b\rho = Ze$$

und daher

$$Q^{33} = \frac{2}{5}Ze(b^2 - a^2).$$

Somit

$$Q^{ij} = -\frac{1}{5}Ze(b^2 - a^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Teil b) Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \sum_{i=1}^{6} \frac{-e}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \\ &= -e\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{|\vec{x}_i|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^3} + \frac{1}{2}\left(3\frac{(\vec{x}\cdot\vec{x}_i)^2}{|\vec{x}_i|^5} - \frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}_i|^3}\right) + ... \end{aligned}$$

Mit $\vec{x}_1 = (c, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1$, $\vec{x}_3 = (0, c, 0)$, $\vec{x}_4 = -\vec{x}_3$, $\vec{x}_5 = (0, 0, d)$ und $\vec{x}_6 = -\vec{x}_5$ findet man

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -e\left(\frac{4}{c} + \frac{2}{d} + 3\frac{x^2+y^2}{c^3} + 3\frac{z^2}{d^3} - 2\frac{x^2+y^2+z^2}{c^3} - \frac{x^2+y^2+z^2}{d^3}\right) + ... \\ &= -e\left[\frac{4}{c} + \frac{2}{d} + \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\left(x^2+y^2-2z^2\right)\right] + ... \end{aligned}$$

Offensichtlich treten in der zweiten Ordnung keine Terme proportional zu xy, xz oder yz auf. Wir berechnen noch $\Delta\Phi_2$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\Delta\Phi_2|_{\vec{x}=\vec{0}} = -e\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\Delta\left(x^2+y^2-2z^2\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = 0.$$

Teil c): Für das äußere elektrische Feld am Ort des Quadrupols haben wir

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\Phi_2 = 2e\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$$

Das Drehmoment ist gegeben durch

$$\vec{N} = \int d^3x\; \vec{x} \times \rho\vec{E}_2$$

Integriert wir hier über das Rotationsellipsoid. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \vec{N} &= 2e\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\int d^3x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}\rho(\vec{x}) \\ &= 6e\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right)\int d^3x\; z\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\rho(\vec{x}) \end{aligned}$$

Für die Transformation vom System K' nach K gelte

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \vec{x}'$$

Somit

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= -6e\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\int d^3x'\;\left(y'\sin\delta+z'\cos\delta\right)\begin{pmatrix} y'\cos\delta-z'\sin\delta \\ -x' \\ 0 \end{pmatrix}\rho(\vec{x}') \\
&= -6e\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\int d^3x'\;\left(y'\sin\delta+z'\cos\delta\right)\left(y'\cos\delta-z'\sin\delta\right)\vec{e}_1\rho(\vec{x}') \\
&= -6e\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\vec{e}_1\int d^3x'\;\Big((y'^2-z'^2)\sin\delta\cos\delta+y'z'\left(\cos^2\delta-\sin^2\delta\right)\Big)\rho(\vec{x}') \\
&= -6e\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\vec{e}_1\sin\delta\cos\delta\int d^3x'\;(y'^2-z'^2)\rho(\vec{x}') \\
&= -6e\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\vec{e}_1\sin\delta\cos\delta\int d^3x'\;\left(\frac{1}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2-z'^2\right)\rho(\vec{x}') \\
&= 3e\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\vec{e}_1\sin\delta\cos\delta\;Q^{33} \\
&= \frac{6}{5}Ze^2(b^2-a^2)\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right)\vec{e}_1\sin\delta\cos\delta.
\end{aligned}$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 8
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 28.6.2006

1. Ladungsdichte eines Dipols (2 Punkte)

Ein elektrischer Dipol am Ort $\vec{x}_0$ kann durch eine effektive Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

beschrieben werden. Leiten Sie diese Aussage aus den bekannten Eigenschaften eines elektrischen Dipols her.

Lösung: Es ist bekannt, daß ein elektrischer Dipol durch das Potential

$$\Phi_{Dipol}(\vec{x}) = \frac{\vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{[\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

beschrieben wird. Aus der Poisson-Gleichung folgt:

$$\rho(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_x \Phi_{Dipol}(\vec{x})$$

Nun ist

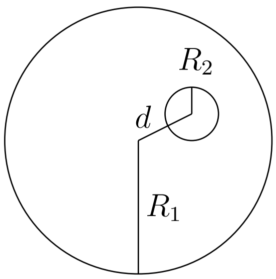
$$\frac{\vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{[\vec{x} - \vec{x}_0|^3} = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{[\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

und da $\vec{\nabla}_x$ und Δ_x vertauschen

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{d} \cdot \vec{\nabla}_x \Delta_x \frac{1}{[\vec{x} - \vec{x}_0|} = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla}_x \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

2. Magnetfeld im Hohlraum (3 Punkte)

Ein unendlich langer zylindrischer Leiter vom Radius R_1 besitze einen unendlich langen zylindrischen Hohlraum vom Radius R_2. Die Achsen von Leiter und Hohlraum verlaufen parallel im Abstand d. Es sei $R_2 + d < R_1$.



Im Leiter fließt gleichmäßig über den gesamten Querschnitt verteilt der zeitlich konstante Gesamtstrom J parallel zur Achse des Systems. Man bestimme das magnetische Feld in der zylindrischen bohrung. Man weise dabei insbesondere nach, daß das Feld homogen ist.

Lösung: Vorbemerkung: Wir betrachten zunächst einen homogenen Zylinder (ohne Bohrung) mit Radius R und Strom J. Die Achse sei längs der z-Richtung. Aus dem Satz von Stoke

$$\int_\gamma \vec{B} d\vec{r} \;=\; \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} d\vec{\sigma}$$

folgt γ eine Kreislinie mit Radius $r < R$ beschreibt:

$$\begin{aligned} 2\pi r \left| \vec{B}(r) \right| &= \frac{4\pi}{c} \frac{J}{R^2 \pi} r^2 \pi, \\ \left| \vec{B}(r) \right| &= \frac{2}{c} J \frac{r}{R^2}. \end{aligned}$$

Somit

$$\vec{B}(r) \;=\; \frac{2J}{cR^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun zwei Zylinder, einen mit R_1 und J_1, der zweite mit R_2 und J_2, wobei

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} J, \\ J_2 &= -\frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} J. \end{aligned}$$

Sei $\vec{d} = (d, 0, 0)$. Dann gilt im Hohlraum

$$\vec{B} \;=\; \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{2J_1}{cR_1^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2J_2}{cR_2^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2J}{c(R_1^2 - R_2^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Feld ist homogen, da keine Ortsabhängigkeit vorliegt.

3. Spiegelladungen (4 Punkte)

Gegeben seien zwei leitende, geerdete Halbebenen $(x = 0, y > 0, -\infty < z < \infty)$ und $(y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty)$ und eine Ladung im Punkt $(x_0, y_0, 0)$, wobei $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ ist.

a) Man gebe das Potential $\Phi(\vec{x})$ und die Feldstärke $\vec{E}(\vec{x})$ an.

b) Man bestimme die auf jeder der beiden Halbebenen influenzierten Ladungen.
c) Wie groß ist die Kraft auf die Ladung?

Lösung: Die Ladung im Punkte $(x_0, y_0, 0)$ trage die Ladung q. Potential und Feldstärke bestimmt man, indem man annimmt, daß in den Punkten $(-x_0, y_0, 0)$ und $(x_0, -y_0, 0)$ zwei Ladungen mit $-q$ sich befinden, sowie im Punkte $(-x_0, -y_0, 0)$ eine Ladung mit $+q$. Somit

$$\begin{aligned}\Phi &= q\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+z^2}}\right)\end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\Phi(0,y,z) = \Phi(x,0,z) = 0.$$

Für $x, y \geq 0$ ergibt sich die Feldstärke zu

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi =$

$$\begin{aligned}q &\left(\frac{1}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z\end{pmatrix} - \frac{1}{((x+x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x+x_0 \\ y-y_0 \\ z\end{pmatrix}\right.\\ &\left.-\frac{1}{((x-x_0)^2+(y+y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y+y_0 \\ z\end{pmatrix} + \frac{1}{((x+x_0)^2+(y+y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ z\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

für $x < 0$ oder $y < 0$ gilt $\vec{E} = 0$.

Teil b) Für die Halbebene $x = 0$, $y > 0$ gilt;

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dy E^x = \frac{2x_0 q}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dy \left(\frac{1}{(x_0^2+(y+y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x_0^2+(y-y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\\ &= -\frac{2x_0 y_0 q}{\pi}\int_0^{\infty} dz \frac{1}{x_0^2+z^2}\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}} = -\frac{x_0 y_0 q}{\pi}\int_{x_0^2}^{\infty}\frac{du}{u}\frac{1}{\sqrt{u+y_0^2}\sqrt{u-x_0^2}}\\ &= -\frac{q}{\pi}\arcsin\frac{(y_0^2-x_0^2)u-2x_0^2y_0^2}{u(x_0^2+y_0^2)}\bigg|_{x_0^2}^{\infty} = -\frac{q}{\pi}\left(\arcsin\frac{y_0^2-x_0^2}{y_0^2+x_0^2} - \arcsin(-1)\right)\\ &= -q\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{y_0^2-x_0^2}{y_0^2+x_0^2}\right).\end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die andere Halbebene:

$$Q_2 = -q\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_0^2-y_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right).$$

Teil c) Die Kraft läßt sich aus der Kraft, die von den drei Spiegelladungen herrührt berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q^2 \left(-\frac{1}{(4x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(4x_0^2 + 4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{q^2}{4} \left(-\frac{1}{x_0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{y_0^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

4. Drehmoment auf eine Leiterschleife (7 Punkte)

Durch zwei konzentrische kreisförmige Leiterschleifen mit Radien a und b fließen die Ströme I_a und I_b. Der Winkel zwischen den Ebenenen, in denen die Leiterschleifen liegen, sei mit α bezeichnet. Es gelte $b < a$. Zeigen sie, daß das Drehmoment auf eine der beiden Leiterschleifen den Betrag

$$N = \frac{2\pi^2 I_a I_b b^2}{ac^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right]^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} P_{2n+1,1}(\cos\alpha)$$

hat und in Richtung der Schnittgeraden der beiden Ebenen gerichtet ist. In dieser Formel ist $P_{2n+1,1}(\cos\alpha)$ eine assozierte Legendre-Funktion.

Lösung: Bezeichne K ein Koordinatensystem, so daß die Leiterschleife a in der x-y-Ebene dieses Koordinatensystems liege. Für die Stromdichte in der Leiterschleife a gilt in Zylinder- und Kugelkoordinaten

$$\vec{j}_a = I_a \delta(r-a)\delta(z)\vec{e}_\varphi = \frac{I_a}{a}\delta(r-a)\delta(\cos\theta)\vec{e}_\varphi.$$

Ebenso sei K' das Koordinatensystem, so daß die Leiterschleife b in der x'-y'-Ebene dieses Koordinatensystems liege. Für die Stromdichte $\vec{j}_b$ haben wir

$$\vec{j}_b = I_b \delta(r'-b)\delta(z')\vec{e}_{\varphi'} = \frac{I_b}{b}\delta(r'-b)\delta(\cos\theta')\vec{e}_{\varphi'}$$

Für die Transformation vom System K' nach K gelte

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \vec{x}'$$

Die x-Achse stellt also die Schnittgerade der beiden Ebenen dar. Das Drehmoment auf die Leiterschleife a ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \frac{1}{c}\int d^3x\, \vec{x} \times \left(\vec{j}_a \times \vec{B}_b\right) \\
&= \frac{1}{c}\int d^3x\, \left(\vec{x}\cdot\vec{B}_b\right)\vec{j}_a - \left(\vec{x}\cdot\vec{j}_a\right)\vec{B}_b.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_a = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_a = 0$ und

$$\begin{aligned}
\int d^3x\, x^i j_a^i \vec{B}_a &= \int d^3x\, x^i \vec{B}_a \vec{j}_a \cdot \vec{\nabla} x^i = -\int d^3x\, x^i \sum_{k=1}^{3} \nabla^k \left(x^i \vec{B}_a j_a^k \right) \\
&= -\int d^3x\, x^i \vec{B}_a \vec{j}_a \cdot \vec{\nabla} x^i = -\int d^3x\, x^i j_a^i \vec{B}_a .
\end{aligned}$$

verschwindet der zweite Term. Somit

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \frac{1}{c} \int d^3x \, \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_b \right) \vec{j}_a = \frac{I_a}{c} \int d^3x \, \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_b \right) \delta(r-a)\delta(z) \vec{e}_\varphi \\
&= I_a \frac{a}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_b \right) \vec{e}_\varphi = I_a \frac{a^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \; B_{b,radial} \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $B_{b,radial}$ die Radialkomponente des magnetischen Feldes, welches von der Leiterschleife b erzeugt wird. $\vec{e}_\varphi$ ist gegeben durch

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun $B_{b,radial}$ im Koordinatensystem K': Die Leiterschleife b erzeugt im Koordinatensystem K' das Vektorpotential

$$\begin{aligned}
\vec{A}'_b(\vec{x}') &= \frac{1}{c} \int d^3x'' \, \frac{\vec{j}_b(\vec{x}'')}{|\vec{x}' - \vec{x}''|} \\
&= \frac{I_b}{c} \int d^3x'' \, \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{b^l}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \varphi') Y^*_{lm}(\theta'', \varphi'') \frac{1}{r''} \delta(r''-b) \delta(\cos\theta'') \vec{e}_{\varphi''} \\
&= \frac{I_b b}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{b^l}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \varphi') \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{lm}(\frac{\pi}{2}, \varphi'') \vec{e}_{\varphi''}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$Y^*_{lm}(\frac{\pi}{2}, \varphi'') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(0) e^{-im\varphi''}$$

und

$$\vec{e}_{\varphi''} = -\sin\varphi'' \vec{e}_{x'} + \cos\varphi'' \vec{e}_{y'} = -\mathrm{Im} \left(e^{i\varphi''} \right) \vec{e}_{x'} + \mathrm{Re} \left(e^{i\varphi''} \right) \vec{e}_{y'} .$$

Daher überlebt nur $m = \pm 1$. Aus Symmetriegründen liefern beide Ausdrücke den gleichen Beitrag. Wir berechnen daher $m = 1$ und multiplizieren mit 2.

$$\begin{aligned}
\vec{A}'_b(\vec{x}') &= 2\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{b^l}{r'^{l+1}}Y_{l1}(\theta',\varphi')\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}}P_{l,1}(0)\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\varphi''}\vec{e}_{\varphi''} \\
&= 2\pi\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{b^l}{r'^{l+1}}Y_{l1}(\theta',\varphi')\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}}P_{l,1}(0)\,(i\vec{e}_{x'}+\vec{e}_{y'}) \\
&= iA'_b\vec{e}_x + A'_b\vec{e}_y,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A'_b &= 2\pi\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{b^l}{r'^{l+1}}Y_{l1}(\theta',\varphi')\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}}P_{l,1}(0) \\
&= 2\pi\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}\frac{b^l}{r'^{l+1}}P_{l,1}(0)P_{l,1}(\cos\theta')e^{i\varphi'}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\vec{B}'_b(\vec{x}') = \vec{\nabla}\times\vec{A}'_b(\vec{x}') = \begin{pmatrix} -\partial^z A'^{\,y}_b \\ \partial^z A'^{\,x}_b \\ \partial^x A'^{\,y}_b - \partial^y A'^{\,x}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^z A'_b \\ i\partial^z A'_b \\ \partial^x A'_b - i\partial^y A'_b \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
B'_{b,radial} &= \hat{x}\cdot\vec{B}'_b(\vec{x}') = \frac{1}{r'}\left[(\cos\varphi' - i\sin\varphi')\frac{\partial}{\partial\theta'} - \frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}(\sin\varphi' + i\cos\varphi')\frac{\partial}{\partial\varphi'}\right]A'_b \\
&= \frac{e^{-i\varphi'}}{r'}\left[\frac{\partial}{\partial\theta'} - i\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}\right]A'_b \\
&= 2\pi\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}\frac{b^l}{r'^{l+2}}P_{l,1}(0)\left[\frac{\partial}{\partial\theta'} + \frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}\right]P_{l,1}(\cos\theta') \\
&= 2\pi\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}\frac{b^l}{r'^{l+2}}P_{l,1}(0)\frac{1}{\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\sin\theta' P_{l,1}(\cos\theta') \\
&= -2\pi\frac{I_b b}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}\frac{b^l}{r'^{l+2}}P_{l,1}(0)\frac{\partial}{\partial\cos\theta'}\sqrt{1-\cos^2\theta'}P_{l,1}(\cos\theta')
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}P_{l,1}(x) = l(l+1)P_l(x)$$

und wir erhalten für $B'_{b,radial}$ für $r' = a$:

$$B'_{b,radial} = -2\pi \frac{I_b b}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b^l}{a^{l+2}} P_{l,1}(0) P_l(\cos\theta')$$

Nun ist $\cos\theta'$ der Winkel zwischen dem Vektor zu einem Punkt auf a, der im System K durch die Winkel $\theta = \pi/2$, φ beschrieben wird, und dem Normalenvektor der Leiterschleife b. Im System K wird dieser durch die Winkel $\theta_\alpha = \alpha$ und $\varphi_\alpha = -3\pi/2$ beschrieben. Das Additionstheorem liefert uns dann

$$P_l(\cos\theta') = P_l(0)P_l(\cos\alpha) + 2\sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(0) P_{l,m}(\cos\alpha) \cos\left(m\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right)\right)$$

Somit ergibt sich für das Drehmoment

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= I_a \frac{a^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \; B_{b,radial} \left(-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y\right) \\
&= -2\pi I_a I_b \frac{b}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b^l}{a^l} P_{l,1}(0) \int_0^{2\pi} d\varphi \; \left(-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y\right) P_l(\cos\theta') \\
&= -4\pi I_a I_b \frac{b}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{b^l}{a^l} \left[P_{l,1}(0)\right]^2 P_{l,1}(\cos\alpha) \int_0^{2\pi} d\varphi \; \left(-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y\right) \cos\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) \\
&= 4\pi^2 I_a I_b \frac{b}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{b^l}{a^l} \left[P_{l,1}(0)\right]^2 P_{l,1}(\cos\alpha) \vec{e}_x
\end{aligned}$$

Nun ist $P_{l,1}(0) = 0$ falls l gerade ist und

$$P_{2n+1,1}(0) = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Daher

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= 4\pi^2 I_a I_b \frac{b^2}{ac^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} P_{2n+1,1}(\cos\alpha) \vec{e}_x \\
&= 2\pi^2 I_a I_b \frac{b^2}{ac^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} P_{2n+1,1}(\cos\alpha) \vec{e}_x
\end{aligned}$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 9
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 5.7.2006

1. Spiegelladung im Dielektrikum (4 Punkte)

Der Halbraum $x < 0$ sei mit einem Dielektrikum (mit der Dielektrizitätskonstanten ε) gefüllt. Im Punkt $x = d > 0$ auf der x-Achse befinde sich eine Punktladung q. Bestimmen Sie das elektrische Feld für $x > 0$ bzw. $x < 0$ jeweils durch Einführung einer geeigneten Spiegelladung. Bestimmen Sie die auf der Grenzfläche induzierte Ladungsverteilung und die induzierte Gesamtladung.

Lösung: Die Randbedingungen für die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (oder einem Dielektrikum und dem Vakuum) lauten

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)} \right) = 4\pi\eta, \qquad \hat{n} \times \left(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)} \right) = 0.$$

Hierbei ist η die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungen auf der Grenzschicht, Polarisationsladungen tragen hierzu nicht bei. Freie Ladungen auf der Oberfläche treten bei einem Dielektrikum nicht auf. Daher hat man als Stetigkeitsbedingungen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} E_x &= \lim_{x\to 0^-} \varepsilon E_x, \\ \lim_{x\to 0^+} E_y &= \lim_{x\to 0^-} E_y, \\ \lim_{x\to 0^+} E_z &= \lim_{x\to 0^-} E_z. \end{aligned}$$

Für $x > 0$ bestimmt man das Potential und das Feld durch eine Spiegelladung q' bei $x = -d$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}, \\ \vec{E} &= \frac{q}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x-d \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{q'}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x+d \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $x < 0$. Da im Halbraum $x < 0$ keine freien Ladungen vorhanden sind, ergibt sich das Potential aus der Punktladung bei $x = d$, die durch das Dielektrikum modifiziert wird. Wir machen für $x < 0$ den Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{q''}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}, \\ \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{q''}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x-d \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen ergeben sich Bedingungen für q' und q'':

$$\begin{aligned} q'' &= q - q', \\ \frac{q''}{\varepsilon} &= q + q'. \end{aligned}$$

Löst man nach q' und q'' auf, so findet man

$$\begin{aligned} q' &= \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} q, \\ q'' &= \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} q. \end{aligned}$$

Wir betrachten noch die Polarisationsladungsdichte. Diese ist gegeben durch

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Sie macht eine Sprung an der Grenzschicht und führt zu einer Flächenladungsdichte der Polarisationsladungen

$$\eta_{pol} = -\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \cdot \hat{n}_{21},$$

wobei $\hat{n}_{21}$ der Einheitsnormalenvektor von Medium 1 zum Medium 2 ist. In unserer Situation ist das Medium 1 das Vakuum und das Medium 2 das Dielektrikum im Halbraum $x < 0$. Somit

$$\eta_{pol} = -\lim_{x \to 0^-} \vec{P} \cdot \hat{n}_{21} = \lim_{x \to 0^-} P_x = \lim_{x \to 0^-} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_x = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{qd}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Induzierte Gesamtladung:

$$\begin{aligned} Q_{ind} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \eta_{pol} = \frac{qd}{2\pi} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{r}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= q \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $\varepsilon \gg 1$ nähert sich das Dielektrikum einem elektrischen Leiter an und man findet in diesem Grenzfall für die induzierte Ladung $Q_{ind} = -q$.

2. Plattenkondensator (4 Punkte)

In einem Plattenkondensator (Plattenabstand a) befinde sich eine Punktladung q im Abstand x_0 von einer Platte. Beide Platten seien leitend verbunden und auf Potential Null.

a) Man berechne die auf jeder Platte influenzierte Ladung.

(Anleitung: Für die Berechnung der Influenzladung ist es gleichgültig, an welcher Stelle der Ebene $x = x_0$ sich die Punktladung befindet. Also kann sie auch mit konstanter Flächendichte in dieser Ebene verschmiert werden.)

b) Nun wird die Ladung q mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt ($x_0 = vt$). Man berechne den Strom, der zwischen den beiden Platten fließt.

Lösung: Vorbemerkung: Für das Potential einer einzelnen Kondensatorplatte mit Ladung Q und Fläche F folgt aus dem Gauß'schen Satz

$$\Phi = -2\pi \frac{Q}{F} \left| x \right| .$$

Teil a) Anstelle der Punktladung wird eine dritte geladene Platte angenommen. Für das Potential erhält man

$$\Phi = -\frac{2\pi Q_1}{F} \left| x \right| - \frac{2\pi q}{F} \left| x - x_0 \right| - \frac{2\pi Q_2}{F} \left| x - a \right| ,$$

wobei Q_1 die Influenzladung auf der ersten Platte und Q_2 die Influenzladung auf der zweiten Platte bezeichnet. Aus der Bedingung, daß die beiden Platten auf Potential Null liegen,

$$\Phi(0) = \Phi(a) = 0,$$

findet man

$$Q_1 = -\frac{|a - x_0|}{|a|} q,$$

$$Q_2 = -\frac{|x_0|}{|a|} q.$$

Teil b) Die Ladung bewege sich nun mit $x_0 = vt$. Ohne Einschränkung können wir $0 < x_0 < a$ annehmen. Für den Strom gilt

$$I = \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} = -q\frac{d}{dt}\frac{(a - x_0)}{a} = -q\frac{d}{dt}\frac{(a - vt)}{a} = \frac{qv}{a}.$$

3. Zylinderkondensator (4 Punkte)

a) Man berechne die Kapazitätskoeffizienten eines Zylinderkondensators mit den Radien r_1 und r_2.

b) Eine Punktladung q befinde sich im Zylinderkondensator im Abstand r_0 von der Achse. Man berechne die auf dem inneren und äußeren Zylinder influenzierte Ladung, wenn beide Zylinder leitend verbunden und auf Potential Null sind.

c) Man berechne den Strom zwischen beiden Zylindern, wenn sich die Ladung mit konstanter Geschwindigkeit nach außen bewegt.

Lösung: Teil a) Der Zylinder mit Radius r_1 trage die Ladung Q_1, der Zylinder mit Radius r_2 trage die Ladung Q_2. Sei weiter $r_1 < r_2$. Im Außenraum $r > r_2$ findet man mit dem Gauß'schen Satz

$$\begin{aligned} 4\pi\,(Q_1 + Q_2) &= E(r) \cdot 2\pi r L, \\ E(r) &= \frac{2\,(Q_1+Q_2)}{L}\frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Diese Feldstärke wird, wie man leicht nachrechnet, von dem Potential

$$\Phi(r) = -\frac{2\,(Q_1+Q_2)}{L} \ln r$$

erzeugt. Zwischen den beiden Zylindern $r_1 < r < r_2$ findet man

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{2Q_1}{L}\frac{1}{r}, \\ \Phi(r) &= -\frac{2Q_1}{L} \ln r + c. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit des Potentials bei $r = r_2$ erhält man

$$c = -\frac{2Q_2}{L} \ln r_2.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \Phi(r_1) \\ \Phi(r_2) \end{pmatrix} = -\frac{2}{L} \begin{pmatrix} \ln r_1 & \ln r_2 \\ \ln r_2 & \ln r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Invertiert man diese Relation, so erhält man

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = -\frac{L}{2}\frac{1}{(\ln r_1 - \ln r_2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{\ln r_1}{\ln r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(r_1) \\ \Phi(r_2) \end{pmatrix}$$

In Anlehnung an die Relation $Q = CU$ bezeichnet man die Einträge dieser Matrix (einschliesslich der Vorfaktoren) als Kapazitätskoeffizienten.

Teil b) Wir verschmieren die Ladung q über einen Zylinder mit Radius r_0. Es gelte $r_1 < r_0 < r_2$. Für $r > r_2$ verschwindet das Potential und daher

$$Q_1 + q + Q_2 = 0.$$

Für $r_0 < r < r_2$ gilt für das Potential

$$\Phi(r) = -\frac{2(Q_1+q)}{L}\ln r + c_1.$$

Aus der Stetigkeit bei $r = r_2$ folgt

$$c_1 = \frac{2(Q_1+q)}{L}\ln r_2.$$

Für $r_1 < r < r_0$ gilt

$$\Phi(r) = -\frac{2Q_1}{L}\ln r + c_2.$$

Aus der Stetigkeit bei $r = r_0$ folgt

$$c_2 = \frac{2Q_1}{L}\ln r_0 + \frac{2(Q_1+q)}{L}\ln\frac{r_2}{r_0}.$$

Der innere Zylinder liegt ebenfalls auf Nullpotential, daher

$$\begin{aligned} \Phi(r_1) &= 0, \\ Q_1 &= -q\frac{\ln\frac{r_0}{r_2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}. \end{aligned}$$

Ferner

$$Q_2 = -q - Q_1 = -q\frac{\ln\frac{r_1}{r_0}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}.$$

Teil c) Sei $r_0 = vt$. Für den Strom finden wir

$$I = \frac{dQ_1}{dt} = -q\frac{1}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\frac{d}{dt}\ln\frac{vt}{r_2} = -\frac{q}{t\ln\frac{r_1}{r_2}}.$$

4. Skinneffekt (4 Punkte)

Ein unendlich langer Metallzylinder (Leitfähigkeit σ, Permeabilität μ) werde so in eine unendlich lange Spule gebracht, daß seine Achse mit der Achse der Spule identisch ist. In der Spule fließe ein Strom $J = J_0 e^{i\omega t}$ und es sei $\omega << \sigma$. Bestimmen Sie das Magnetfeld und das elektrische Feld im ganzen Raum. Der Radius des Zylinders sei a, der Radius der Spule sei b und es gelte $a < b$.
Hinweis: Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2}H + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}H + k^2 H = 0$$

hat die Lösung $H = H_0 J_0(kr)$. Ferner gilt

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x).$$

Dabei sind J_0 bzw. J_1 die Besselfunktionen nullter bzw. erster Ordnung.

Lösung: Vorbemerkung: Eine stromdurchfloßene Spule erzeugt im Inneren ein homogenes magnetisches Induktionsfeld, das sich durch

$$lB = \oint B dr = \int d\sigma \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \int d\sigma \vec{j} \cdot \hat{n} = \frac{4\pi}{c} Jnl,$$

wobei n die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit ist. Also gilt für das $\vec{B}$-Feld innerhalb einer Spule mit einem Strom der zeitlich nur sehr langsam variiert:

$$B = \frac{4\pi}{c} J_0 n e^{i\omega t}$$

Wir betrachten nun das Magnetfeld im Inneren des Metallzylinders. Die vierte Maxwell'sche Gleichung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}.$$

Für den Strom gilt im metallischen Leiter $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Wegen $\omega \ll \sigma$ könnnen wir die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes vernachlässigen. Nehmen wir die Rotation der vierten Maxwell'schen Gleichung, so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

Daher

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

Für die zeitliche Variation des Magnetfeldes machen wir den Ansatz

$$\vec{H} = H(r) e^{i\omega t} \hat{e}_z.$$

Somit

$$\Delta H(r) = i \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} H(r).$$

Drücken wir den Laplace-Operator noch durch Zylinderkoordinaten aus, so erhalten wir die Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - i \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right) H(r) = 0.$$

Definieren wir noch

$$k^2 = -i\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2},$$

so lautet die Lösung

$$H(r) = H_0 J_0(kr)$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten H_0. An der Oberfläche des Metallzylinders ist die Tangentialkomponente von $\vec{H}$ stetig, außerhalb des Metallzylinders ist $\vec{B} = \vec{H}$. Somit ergibt sich H_0 zu

$$H_0 = \frac{4\pi}{c}\frac{J_0 n}{J_0(ka)}.$$

Nebenbemerkung: J_0 bezeichnet den Strom, der durch die Spule fliest, $J_0(ka)$ die Besselfunktion mit Argument (ka). Somit haben wir für das Magnetfeld im Metallzylinder

$$\vec{H} = \frac{4\pi}{c} J_0 n \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} e^{i\omega t}\hat{e}_z.$$

Außerhalb des Metallzylinders, aber innerhalb der Spule haben wir

$$\vec{H} = \frac{4\pi}{c} J_0 n e^{i\omega t}\hat{e}_z.$$

Wir müssen noch das elektrische Feld bestimmen: Im Metallzylinder gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}.$$

Daher

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} H_0 J_1(kr) e^{i\omega t}\hat{e}_\varphi = \frac{J_0 n}{\sigma}\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} e^{i\omega t}\hat{e}_\varphi.$$

Für $a < r < b$ gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.$$

Daher

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{i\omega}{c}\int d\sigma \vec{B}\cdot\hat{n}.$$

Somit

$$\begin{aligned} 2\pi r E_\varphi &= -\frac{i\omega}{c}\left[\frac{4\pi}{c} J_0 n e^{i\omega t}\pi\left(r^2 - a^2\right) + C\right], \\ E_\varphi &= -\frac{i\omega}{2\pi r c}\left[\frac{4\pi}{c} J_0 n e^{i\omega t}\pi\left(r^2 - a^2\right) + C\right] \end{aligned}$$

Stetigkeit für $r = a$ ergibt

$$C = 2\pi i \frac{acJ_0 n}{\omega\sigma} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} e^{i\omega t}.$$

Somit haben wir für $a < r < b$:

$$\vec{E} = J_0 n \left(\frac{a}{\sigma r} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} - 2\pi i \frac{\omega \left(r^2 - a^2\right)}{rc^2} \right) e^{i\omega t} \hat{e}_\varphi$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 10
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 12.7.2006

1. Gleichphasige Dipole (4 Punkte)

m gleichphasige Dipole seien im Abstand $\lambda/2$ auf einer Geraden angeordnet. Bestimmen Sie das Feld dieser Dipolanordnung.

Lösung: Für das Feld eines Dipols gilt in der Fernzone

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= k^2 \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \hat{x} \times \vec{d}, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= k^2 \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \left(\hat{x} \times \vec{d} \right) \times \hat{x}.\end{aligned}$$

Es sei

$$\vec{d} = d\vec{e}_z,$$

und die Dipole seien im Abstand $\lambda/2$ auf der y-Achse angeordnet:

$$\vec{x}_j = j\frac{\lambda}{2}\vec{e}_y.$$

Für den Aufpunkt verwenden wir Kugelkoordianten;

$$\vec{x} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z.$$

Somit

$$|\vec{x} - \vec{x}_j|^2 = r^2 - 2rj\frac{\lambda}{2}\sin\theta\sin\varphi + \left(\frac{j\lambda}{2}\right)^2$$

Daher

$$|\vec{x} - \vec{x}_j| \approx r\left(1 - \frac{j\lambda}{2r}\sin\theta\sin\varphi\right)$$

Es gilt das Superpositionsprinzip:

$$\vec{E} = \sum_{j=0}^{m-1} \vec{E}_j$$

Für große Abstände findet man

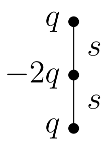
$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{k^2}{r}\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\times\hat{x}\sum_{j=0}^{m-1} e^{ikr-i\omega t}e^{-\frac{1}{2}ijk\lambda\sin\theta\sin\varphi} \\
&= \underbrace{\left(k^2\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\times\hat{x}\right)}_{\vec{E}_0}\frac{1-e^{-\frac{1}{2}imk\lambda\sin\theta\sin\varphi}}{1-e^{-\frac{1}{2}ik\lambda\sin\theta\sin\varphi}}
\end{aligned}$$

Da $k\lambda = 2\pi$ ist, folgt

$$\vec{E} = \vec{E}_0\frac{1-e^{-i\pi m\sin\theta\sin\varphi}}{1-e^{-i\pi\sin\theta\sin\varphi}}.$$

2. Elektrische Quadrupolstrahlung (4 Punkte)

Einen linearen elektrischen Quadrupol aus 3 äquidistanten Ladungen $+q$, $-2q$ und $+q$ (siehe Skizze)



kann man sich aus zwei Dipolen entgegengesetzter Richtung zusammengesetzt denken. Bestimmen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sowie die mittlere abgestrahlte Energie $\langle\vec{S}\rangle$ für das Fernfeld und skizzieren Sie die Winkelabhängigkeit von $\langle\vec{S}\rangle$. Es gelte

$$s \ll \lambda \ll r, \qquad q = q_0 e^{-i\omega t}.$$

Lösung: Wir betrachten einen Dipol $\vec{d}_1 = d\vec{e}_z$ am Orte $\vec{x}_1 = -\frac{s}{2}\vec{e}_z$ und einen Dipol $\vec{d}_2 = -d\vec{e}_z$ am Orte $\vec{x}_2 = \frac{s}{2}\vec{e}_z$. Für die Abstandsfunktion gilt wieder

$$|\vec{x}-\vec{x}_j|^2 = r^2 \pm \frac{1}{2}rs\cos\theta + \frac{s^2}{4}$$

und daher näherungsweise

$$|\vec{x}-\vec{x}_j| \approx r\left(1 \pm \frac{s}{r}\cos\theta\right).$$

Somit

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}) &= k^2\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left[\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\times\hat{x}\right]\left(e^{iks\cos\theta}-e^{-iks\cos\theta}\right) \\
&= 2ik^2\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left[\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\times\hat{x}\right]\sin\left(ks\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Analog:

$$\vec{B}(\vec{x}) \;=\; 2ik^2\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\sin\left(ks\cos\theta\right)$$

Für den Poynting'schen Vektor findet man

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{S}\right\rangle &= \left\langle\frac{c}{4\pi}\left(\mathrm{Re}\,\vec{E}\right)\times\left(\mathrm{Re}\,\vec{B}\right)\right\rangle\\ &= \frac{ck^4d^2}{2\pi r^2}\sin^2\left(\theta\right)\sin^2\left(ks\cos\theta\right)\hat{x}\end{aligned}$$

Wegen $s \ll \lambda$ gilt

$$ks \;\ll\; 1,$$

und daher kann $\sin(ks\cos\theta)$ durch das Argument $(ks\cos\theta)$ genähert werden:

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle \;=\; \frac{ck^6d^2s^2}{2\pi r^2}\sin^2\left(\theta\right)\cos^2\left(\theta\right)\hat{x}.$$

Die Winkelabhängigkeit ist

$$\sin^2\left(\theta\right)\cos^2\left(\theta\right) \;=\; \frac{1}{4}\sin^2\left(2\theta\right).$$

3. Doppelbrechung (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen in einem homogenen, anisotropen Dielektrikum ($\mu = 1$). Das Dielektrikum werde durch einen Tensor ε_{ij} charakterisiert. Wenn man die Hauptachsen des Tensors ε_{ij} als Koordinatenachsen wählt, gilt also $D_i = \varepsilon_i E_i$ $(i = 1,2,3)$.
a) Zeigen Sie, daß für ebene Wellen mit der Frequenz ω und Wellenvektor $\vec{k}$ gilt:

$$\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{D} \;=\; 0.$$

b) Zeigen Sie, daß für einen gegebenen Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{n}$ ($\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$) zwei verschiedene Ausbreitungsmoden mit verschiedener Phasengeschwindigkeit $v = \omega/k$ existieren, die die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i^2v^2}{v^2-v_i^2} \;=\; 0$$

mit $v_i = c/\sqrt{\varepsilon_i}$ erfüllen.

Lösung: Teil a) Wir untersuchen ebene Wellen der Form

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0e^{i\left(\vec{k}\vec{x}-\omega t\right)},\\ \vec{B} &= \vec{B}_0e^{i\left(\vec{k}\vec{x}-\omega t\right)}.\end{aligned}$$

Zwei der vier Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\vec{k} \times \vec{E}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= i\vec{k} \times \vec{B}.\end{aligned}$$

Somit findet man

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) &= -i\vec{k} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \frac{i}{c}\vec{k} \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{k} \times \vec{B}\right) \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D}, = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{D},\end{aligned}$$

also

$$\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{D}, \quad = \quad 0,$$

was zu zeigen war.

Teil b) Sei $v = \omega/c$ und $v_i = c/\sqrt{\varepsilon_i}$. Mit $D_i = \varepsilon_i E_i$ erhält man für obige Gleichung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{v}{v_1}\right)^2 - (n_2^2 + n_3^2) & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & \left(\frac{v}{v_2}\right)^2 - (n_1^2 + n_3^2) & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & \left(\frac{v}{v_3}\right)^2 - (n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix}}_{M} \vec{E} \quad = \quad 0$$

Für eine nicht-triviale Lösung ist

$$\det M \quad = \quad 0$$

erforderlich. Setzt man

$$\lambda_i \quad = \quad 1 - \left(\frac{v_i}{v}\right)^2,$$

und berücksichtigt man, daß

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \quad = \quad 1$$

ist, so findet man

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}\left(\lambda_2\lambda_3 n_1^2+\lambda_3\lambda_1 n_2^2+\lambda_1\lambda_2 n_3^2\right) &= 0, \\
\lambda_2\lambda_3 n_1^2+\lambda_3\lambda_1 n_2^2+\lambda_1\lambda_2 n_3^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

Teilt man noch durch $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ so erhält man

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i^2}{\lambda_i} &= 0, \\
\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i^2}{1-\left(\frac{v_i}{v}\right)^2} &= 0, \\
\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i^2 v^2}{v^2-v_i^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

4. Die Telegraphengleichung (4 Punkte)

Der Song “Telegraph Road” der Gruppe Dire Straits dauert 14:15 min. In dieser Zeit können Sie auch die folgende Aufgabe bearbeiten:

Die Telegraphengleichung beschreibt die Ausbreitung elektrischer Schwingungen in Kabeln. Die Standardform der Telegraphengleichung lautet:

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(r_1+r_2)\frac{\partial v}{\partial t}+r_1 r_2 v\right].
$$

Die Parameter c, r_1 und r_2 lassen sich durch den Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L, der Kapazität C und dem Isolationsverlust A wie folgt ausdrücken:

$$
c=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad r_1=\frac{A}{C}, \quad r_2=\frac{R}{L}.
$$

Wir betrachten die Situation eines Kabels der Länge l, das zur Zeit $t=0$ ungestört ist und dann am einen Ende ($x=0$) sprunghaft auf die Spannung V_0 gebracht wird. Das andere Ende des Kabels ($x=l$) ist geerdet.

a) Bestimmen sie zunächst den zeitunabhängigen Spannungsverlauf $V(x)=v(\infty,x)$ der sich im Langzeitlimes ($t\to\infty$) einstellt. Woher rührt die Asymmetrie bezüglich $x\leftrightarrow l-x$?

b) Zeigen Sie, daß die Abweichung von der stationären Spannung $u(t,x)=v(t,x)-V(x)$ ebenfalls die Telegraphengleichung erfüllt. Geben Sie die Anfangs- und Randbedingungen an.

c) Bestimmen Sie durch einen Separationsansatz $u_n(t,x)=T_n(t)X_n(x)$ die Funktionen $T_n(t)$ und $X_n(x)$, so daß die Telegraphengleichung und die räumlichen Randbedingungen

erfüllt werden. Die zeitliche Anfangsbedingung wird zunächst nicht auferlegt.
d) Konstruieren Sie nun eine Überlagerung der Funktionen $u_n(t,x)$, so daß diese Überlagerung zur Zeit $t=0$ die zeitliche Anfangsbedingung erfüllt. Hiermit haben Sie die Lösung des kombinierten Anfangs- und Randwertproblems für $u(t,x)$ und daher auch für $v(t,x)$ gefunden.

Sollte es nach Ablauf der regulären Spielzeit des Songs zwischen Ihnen und der Aufgabe noch Unentschieden stehen, so geht es in die Verlängerung.
Sollten Sie dann an das Ende der Verlängerung kommen, so sind weitere Analogien nicht besonders hilfreich. Rechnen Sie lieber konzentriert weiter und achten Sie darauf, am hinteren Ende ($x=0$) keine Fehler zu machen.

Lösung: Teil a) Der stationäre Spannungsverlauf erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V = \frac{r_1 r_2}{c^2}V$$

Die allgemeine Lösung hierzu lautet

$$V(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx},$$

wobei

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{r_1 r_2}.$$

Als Randbedingungen haben wir

$$V(0) = V_0, \qquad V(l) = 0.$$

Daher

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= V_0, \\ c_1 e^{-kl} + c_2 e^{kl} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{V_0}{1 - e^{-2lk}}, \\ c_2 &= \frac{V_0}{1 - e^{2lk}} \end{aligned}$$

Die Asymmetrie bezüglich $x \leftrightarrow l - x$ folgt aus der Asymmetrie der Randbedingungen.

Teil b) Behauptung: Für $u(t,x) = v(t,x) - V(x)$ gilt:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (r_1 + r_2)\frac{\partial}{\partial t} + r_1 r_2\right]\right\} u = 0.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (r_1 + r_2) \frac{\partial}{\partial t} + r_1 r_2 \right] \right\} v = 0.$$

Außerdem haben wir

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{r_1 r_2}{c^2} \right\} V = 0,$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} V = 0.$$

Daher ist die Behauptung richtig. Die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} u(0,x) &= -V(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) &= 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} u(t,0) &= V_0 \Theta(t - t_0) - V_0 = -V_0 \Theta(t_0 - t), \\ u(t,l) &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: $u(t,0) = 0$ für $t > t_0$.

Teil c) Es sei $u_n(t,x) = T_n(t) X_n(x)$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_n(t) X_n(x) &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (r_1 + r_2) \frac{\partial}{\partial t} + r_1 r_2 \right] T_n(t) X_n(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_n(x) &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_n(t) + (r_1 + r_2) \frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} T_n(t) + r_1 r_2 \right] X_n(x), \\ \frac{c^2}{X_n(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_n(x) &= \left[\frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_n(t) + (r_1 + r_2) \frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} T_n(t) + r_1 r_2 \right] \end{aligned}$$

Da die linke Seite nicht von der Zeit und die rechte Seite nicht vom Ort abhängt, folgt

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{X_n(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_n(x) &= C_n, \\ \left[\frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_n(t) + (r_1 + r_2) \frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} T_n(t) + r_1 r_2 \right] &= C_n. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_n(x) - \frac{C_n}{c^2} X_n(x) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_n(t) + (r_1 + r_2) \frac{\partial}{\partial t} T_n(t) + (r_1 r_2 - C_n) T_n(t) &= 0. \end{aligned}$$

Lösungen für $X_n(x)$ sind

$$e^{\pm k_n x},$$

wobei

$$k_n = \frac{1}{c}\sqrt{C_n}.$$

Die Lösungen für $T_n(t)$ lauten

$$e^{-\omega_n^{(\pm)} t},$$

wobei

$$\omega_n^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4C_n}\right) = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4c^2 k_n^2}\right)$$

Wir betrachten zunächst nur die Ortsabhängigkeit:

$$u_n(t,x) = c_n^{(1)}(t) e^{-k_n x} + c_n^{(2)}(t) e^{k_n x}.$$

Aus der Randbedingung $u(t,l) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t) e^{-k_n l} + c_n^{(2)}(t) e^{k_n l} &= 0, \\ c_n^{(2)}(t) &= -c_n^{(1)}(t) e^{-2k_n l} \end{aligned}$$

Daher

$$u_n(t,x) = c_n^{(1)}(t) e^{-lk_n}\left(e^{-k_n(x-l)} - e^{k_n(x-l)}\right).$$

Aus der Randbedingung für $u(t,0)$ folgt für $t > t_0$:

$$c_n^{(1)}(t)\left(1 - e^{-2lk_n}\right) = 0.$$

Daher

$$k_n = \frac{\pi i n}{l}.$$

Teil d): Wir betrachten nun den Ansatz

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n^{(1)} e^{-\omega_n^{+} t} + c_n^{(2)} e^{-\omega_n^{-} t}\right) e^{-lk_n}\left(e^{-k_n(x-l)} - e^{k_n(x-l)}\right),$$

mit

$$k_n = \frac{\pi i n}{l}, \qquad \omega_n^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - \left(\frac{2\pi c n}{l}\right)^2}\right)$$

Aus $u(0,x) = -V(x)$ folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n^{(1)} + c_n^{(2)}\right)\left(e^{-k_n x} - e^{k_n x}\right) = -\frac{V_0}{1-e^{-2lk}} e^{-kx} - \frac{V_0}{1-e^{2lk}} e^{kx}.$$

Wir entwickeln die rechte Seite in Fourierreihen:

$$\begin{aligned} e^{-kx} &= \left(1-e^{-2kl}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i n \frac{x}{l}}}{2\pi i n + 2lk}, \\ e^{kx} &= \left(1-e^{2kl}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i n \frac{x}{l}}}{2\pi i n - 2lk}. \end{aligned}$$

Somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n^{(1)} + c_n^{(2)}\right)\left(e^{-\pi i n \frac{x}{l}} - e^{\pi i n \frac{x}{l}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_0 \pi i n}{(\pi n)^2 + (lk)^2} e^{\pi i n \frac{x}{l}}.$$

Daher $c_0^{(1)} + c_0^{(2)} = 0$ und für $n > 0$ haben wir:

$$c_n^{(1)} + c_n^{(2)} = -\frac{V_0 \pi i n}{(\pi n)^2 + (lk)^2}$$

Aus $d/dt u(0,x) = 0$ folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\omega_n^+ c_n^{(1)} + \omega_n^- c_n^{(2)}\right)\left(e^{-k_n x} - e^{k_n x}\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, falls

$$c_n^{(2)} = -\frac{\omega_n^+}{\omega_n^-} c_n^{(1)}$$

gilt. Somit haben wir

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \left(e^{-\omega_n^+ t} - \frac{\omega_n^+}{\omega_n^-} e^{-\omega_n^- t}\right) e^{-lk_n} \left(e^{-k_n(x-l)} - e^{k_n(x-l)}\right),$$

mit

$$c_n^{(1)} = -\frac{V_0}{\left(1 - \frac{\omega_n^+}{\omega_n^-}\right)} \frac{\pi i n}{[(\pi n)^2 + (lk)^2]},$$

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik und klassische Feldtheorie"

Blatt 11
S. Weinzierl
Abgabetermin: Mittwoch, 19.7.2006

1. Kovariante Vektoren (3 Punkte)

Es seien ξ^μ Normalkoordinaten und $x^\mu = x^\mu(\xi)$ und $x'^\mu = x'^\mu(\xi)$ allgemeine Koordinaten mit den Metriken

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu}, \qquad g'_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Es sei außerdem A^μ ein kontravarianter Vierervektor, der sich bekannterweise wie

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu$$

transformiert. Zeigen Sie, daß $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ ein kovarianter Vierervektor ist.

Lösung: Zu zeigen ist, daß sich A_μ wie folgt transformiert:

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A^\nu.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} A'^\tau = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\tau} A'^\tau \\ &= \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\tau} A'^\tau = g_{\lambda\tau} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} A'^\tau = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} A'_\lambda. \end{aligned}$$

2. Teilchen im Gravitationsfeld (4 Punkte)

Leiten Sie mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung aus der Wirkung

$$S = -mc \int\limits_a^b ds$$

für ein punktförmiges Teilchen die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

her.

Lösung: Wir betrachten zunächst die Variation von ds^2:

$$\delta\, ds^2 \;=\; \delta\left(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\right) = dx^\mu dx^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho + 2g_{\mu\nu}dx^\mu d\delta x^\nu .$$

Nun ist andererseits auch

$$\delta\, ds^2 \;=\; 2ds\,\delta ds,$$

und daher

$$\delta ds \;=\; \frac{1}{ds}\left(\frac{1}{2}dx^\mu dx^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho + g_{\mu\nu}dx^\mu d\delta x^\nu\right).$$

Daher

$$\begin{aligned}
\delta S \;&=\; -mc\delta\int\limits_a^b ds = -mc\int\limits_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{ds}\right) ds \\
&=\; -mc\int\limits_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\right)\delta x^\nu\right) ds \\
&=\; -mc\int\limits_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{ds}\right)\right)\delta x^\rho ds
\end{aligned}$$

Daher muß gelten

$$\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{ds}\right) \;=\; 0.$$

Die linke Seite läßt sich umschreiben zu

$$\frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\rho}u^\mu\right) = \frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - g_{\mu\rho}\frac{d}{ds}u^\mu - u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}.$$

Der dritte Term läß sich schreiben als

$$-u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} \;=\; -\frac{1}{2}u^\mu u^\nu\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}\right)$$

Mit der Definition des Christoffel-Symbols erhält man

$$\frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - g_{\mu\rho}\frac{d}{ds}u^\mu - \frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \;=\; -g_{\mu\rho}\frac{d}{ds}u^\mu - u^\mu u^\nu \Gamma_{\rho,\mu\nu}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{d}{ds}u^\rho + u^\mu u^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} \quad = \quad 0,$$

was zu beweisen war.

3. Die Bianchi-Identität (3 Punkte)

Beweisen Sie die Bianchi-Identität

$$\nabla_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda} + \nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\rho} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\lambda\kappa} \quad = \quad 0.$$

Lösung: Offensichtlich ist die Gleichung manifest kovariant formuliert, gilt sie in einem Koordinatensystem, so gilt sie auch in allen anderen Koordinatensystemen. Es genügt daher, diese Gleichung in Normalkoordinaten zu beweisen. In diesem System verschwinden am betrachteten Punkt alle Christoffel-Symbole. Die Formel für die kovariante Ableitung des Krümmungstensors vereinfacht sich daher zu

$$\nabla_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda} \quad = \quad \partial_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda} - \Gamma^\tau_{\kappa\mu} R_{\tau\nu\rho\lambda} - \Gamma^\tau_{\kappa\nu} R_{\mu\tau\rho\lambda} - \Gamma^\tau_{\kappa\rho} R_{\mu\nu\tau\lambda} - \Gamma^\tau_{\kappa\lambda} R_{\mu\nu\rho\tau} = \partial_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda}$$

und die Definition des Krümmungstensors zu

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\nu}\right) + g_{\xi\eta}\left(\Gamma^\xi{}_{\rho\mu}\Gamma^\eta{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\xi{}_{\rho\nu}\Gamma^\eta{}_{\lambda\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\nu}\right). \end{aligned}$$

Daher gilt in Normalkoordinaten

$$\begin{aligned} &\nabla_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda} + \nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\rho} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\lambda\kappa} = \partial_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda} + \partial_\lambda R_{\mu\nu\kappa\rho} + \partial_\rho R_{\mu\nu\lambda\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\kappa\partial_\lambda\partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\kappa\partial_\rho\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\kappa\partial_\lambda\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\kappa\partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\nu}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\rho\partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\lambda\partial_\kappa\partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\lambda\partial_\rho\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\lambda\partial_\kappa\partial_\mu g_{\rho\nu}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\kappa\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\rho\partial_\lambda\partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\rho\partial_\kappa\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\rho\partial_\lambda\partial_\mu g_{\kappa\nu}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Eine gekrümmte Fläche (6 Punkte)

Betrachten Sie eine gekrümmte Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes, z.B. $x = y = 0$. Die gleichung der Fläche in der Umgebung des Punktes sei

$$z \quad = \quad \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2},$$

so daß als Normalkoordinaten die kartesischen Koordinaten der Tangentialebene $z = 0$ gewählt werden können.

a) Drücken sie das Linienelement $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ auf der Fläche mit Hilfe von dx und dy aus.

b) Geben Sie die Komponenten des metrischen Tensors an.

c) Berechnen Sie die Komponenten des Krümmungstensors. (Hinweis: Es genügt R_{xyxy}.)

d) Berechnen Sie den Ricci-Tensor und den Krümmungsskalar.

Lösung: Teil a) Aus der Gleichung der Fläche

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2},$$

folgt

$$dz = \frac{x}{\rho_1}dx + \frac{y}{\rho_2}dy.$$

Somit

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{x}{\rho_1}dx + \frac{y}{\rho_2}dy\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right)dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2}dxdy. \end{aligned}$$

Teil b) Der metrische Tensor hat somit die Komponenten

$$g_{xx} = 1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}, \quad g_{yy} = 1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}, \quad g_{xy} = \frac{xy}{\rho_1\rho_2}.$$

Teil c) Vorbemerkung: Es wird der Punkt $x = y = 0$ betrachtet. In diesem Punkt verschwinden alle Ableitungen des metrischen Tensors:

$$\partial_x g = \partial_y g = 0.$$

Daher sind auch die Christoffel-Symbole in diesem Punkt gleich Null.

Vorbemerkung 2: Wegen der Antisymmetrie des Riemann'schen Krümmungstensors $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ in den ersten beiden Indizes und in den letzten beiden Indizes muß für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit nur eine Komponente berechnet werden, z. B. R_{xyxy}.

Für R_{xyxy} ergibt sich

$$R_{xyxy} = \frac{1}{2}\left(\partial_y \partial_x g_{xy} - \partial_x \partial_x g_{yy} + \partial_x \partial_y g_{yx} - \partial_y \partial_y g_{xx}\right) = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Teil d) Wir berechnen zunächst den Ricci-Tensor. Die allgemeine Formel lautet:

$$Ric_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}.$$

Bemerkung: Im Punkte $x = y = 0$ haben wir

$$g^{xx} = g^{yy} = 1, \qquad g^{xy} = 0.$$

Somit

$$\begin{aligned} Ric_{xx} &= g^{yy} R_{yxyx} = R_{xyxy}, \\ Ric_{yy} &= g^{xx} R_{xyxy} = R_{xyxy}, \\ Ric_{xy} &= g^{yx} R_{yxxy} = -g^{yx} R_{xyxy} = 0. \end{aligned}$$

Für den Krümmungsskalar findet man

$$\begin{aligned} R &= g^{xx} Ric_{xx} + 2 g^{xy} Ric_{xy} + g^{yy} Ric_{yy} = 2\left(g^{xx} g^{yy} - g^{xy} g^{xy}\right) R_{xyxy} \\ &= 2 R_{xyxy} = \frac{2}{\rho_1 \rho_2}. \end{aligned}$$