

Die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$

Carolin Kurig und Daniel Reitz

3. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	3
2	Wiederholung	3
2.1	unitäre Matrizen und die Menge $SU(n)$	3
2.2	Darstellung einer Gruppe	3
2.3	irreduzibel	4
2.4	Schursche Lemmata	4
3	$SO(3)$ und $SU(2)$	4
3.1	Parametrisierungen der $SU(2)$	4
3.1.1	Cayley-Klein-Darstellung	5
3.1.2	Paulimatrizen	6
4	Zusammenhang zwischen $SO(3)$ und $SU(2)$	8
4.1	Vorbetrachtungen	8
4.1.1	Gruppentheoretische Bemerkung	9
4.2	Einfach- und zweifach-zusammenhängend	9
4.2.1	Klassische Beispiele	10
4.2.2	$SU(2)$	10
4.2.3	$SO(3)$	10
4.3	Vergleich der Lie-Algebren	11
5	Die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$	12
5.1	Homogene Polynome	12
5.2	Polynome transformieren	13
5.3	D-Matrizen sind irreduzibel	15
5.4	Einbeziehen der Eulerschen Winkel	16
5.5	Beispiele für D-Matrizen	17
5.5.1	Allgemeine Form	17
5.5.2	Kugelflächenfunktionen	17
5.5.3	Spinoperator	17
5.5.4	Drehimpulsoperator	17
6	Haarsches Maß	18

1 Motivation

Im ersten Seminarvortrag von Andreas Müller „Die Drehgruppe in der Quantenmechanik - Erzeugende und Darstellungen“ haben wir uns fast ausschließlich mit der aus der klassischen Mechanik wohlbekannten Drehgruppe $SO(3)$ beschäftigt. Dabei wurde jedoch deutlich, dass sich diese Gruppe nur mit Einschränkungen in der QM nutzen lässt, da Forderungen, welche beispielsweise aus der Stetigkeit der Kugelflächenfunktionen unter Drehungen des Bezugssystems um 2π stammten, für halbzahligen Drehimpuls nicht mehr erfüllt sind.

Als Ausweg wurde schon dort die Gruppe der eigentlichen unitären 2×2 -Matrizen ($SU(2)$) genannt, um die es nun in diesem Vortrag gehen soll.

2 Wiederholung

Zuerst möchten wir einige Begriffe wiederholen, die schon in den vorherigen Vorträgen genauer definiert und diskutiert wurden. Sie werden im Verlauf des Vortrags immer wieder auftauchen und sind daher für das Verständnis wichtig.

2.1 unitäre Matrizen und die Menge $SU(n)$

Eine Matrix $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ heißt *unitär*, wenn ihr hermitesch Konjugiertes (U^\dagger) mit der Inversen U^{-1} zusammenfällt: $U^\dagger = (U^*)^T = U^{-1}$.

Die Menge

$$SU(n) = \left\{ U \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger = U^{-1}, \det(U) = +1 \right\} \quad (1)$$

ist die Menge der sogenannten *eigentlichen, unitären $n \times n$ -Matrizen*. Sie bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

In diesem Vortrag behandeln wir ausschließlich den Fall $n = 2$, die Menge der 2-dimensionalen eigentlichen unitären Matrizen über \mathbb{C} . Im Vortrag „Kompakte Lie-Gruppen als innere Symmetrien“ von Michael Semmel und Sebastian Becker wird auch auf die anderen Fälle ($n \neq 2$) näher eingegangen.

2.2 Darstellung einer Gruppe

Sei G eine Gruppe, X ein Vektorraum.

Eine Abbildung $A : G \rightarrow L(X)$ heißt *Darstellung einer Gruppe*, wenn sie folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- $A(id_G) = id_{L(X)}$
- $\forall a, b \in G : A(a \circ b) = A(a) \circ A(b)$

2.3 irreduzibel

Eine Menge von Matrizen heißt *irreduzibel*, wenn es außer den trivialen Unterräumen $\{0\}$ und \mathbb{C}^N keine Unterräume gibt, die unter allen Matrizen invariant sind.

$$\{\forall x \in U \subseteq \mathbb{C}^N, A \in M : Ax \in U\} \quad (2)$$

Um eine genauere Vorstellung davon zu erhalten, wie solche irreduziblen Matrizen aussehen, verweisen wir an dieser Stelle schon einmal auf die Beispiele weiter unten.

2.4 Schursche Lemmata

Auch hier möchten wir die Schurschen Lemmata nur zitieren. Die Beweise sind bereits im Vortrag von Andreas Müller behandelt worden und können im Paper unter <http://www.uni-mainz.de/~andrmuel/Seminar/> nachgelesen werden.

Erstes Schursches Lemma

Genau dann, wenn eine Matrix \mathbf{A} mit einer Menge irreduzibler Matrizen, die von $\mathbf{R} \in SO(3)$ abhängen, kommutiert, dann ist

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{1}, \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{C} \quad (3)$$

Anmerkung: Wichtig hierbei ist, dass auch die Rückrichtung gilt, also aus der Vielfachheit der Einheitsmatrix auf die Irreuzibilität der Matrizen geschlossen werden kann. Genau diese Richtung werden wir später für den Beweis der Irreduzibilität der konstruierten Darstellungen der $SU(2)$ benutzen.

Zweites Schursches Lemma

Es seien $D(\mathbf{R})$ und $D'(\mathbf{R})$ quadratische Matrizen der Dimension n bzw. n' , die *unitär* und *irreduzibel* sind, und die von $\mathbf{R} \in SO(3)$ abhängen.

Sei weiterhin \mathbf{M} eine Matrix mit n Spalten und n' Zeilen, die die Relation

$$\mathbf{M}D(\mathbf{R}) = D'(\mathbf{R})\mathbf{M} \quad \text{für alle } \mathbf{R} \in SO(3) \quad (4)$$

erfüllt.

Dann gilt: Entweder ist $\mathbf{M} \equiv 0$ oder aber $n = n'$ und $\det(\mathbf{M}) \neq 0$. Im zweiten Fall sind $D(\mathbf{R})$ und $D'(\mathbf{R})$ äquivalent, d.h. $D'(\mathbf{R}) = \mathbf{M}D(\mathbf{R})\mathbf{M}^{-1}$, was bedeutet, dass sich $D'(\mathbf{R})$ durch Basistransformation in $D(\mathbf{R})$ umformen lässt.

3 $SO(3)$ und $SU(2)$

3.1 Parametrisierungen der $SU(2)$

Da an die hier betrachteten komplexen 2×2 -Matrizen weitere Zusatzbedingungen (unitär und $\det = 1$) gemacht werden, ist es verständlich, dass zur Parametrisierung einer solchen Matrix nicht notwendigerweise alle vier Einträge explizit bekannt sein müssen.

Vielmehr ergeben sich aus einer geringeren Anzahl mit Hilfe der Zusatzbedingungen die restlichen Einträge. Wie viele dies sind und welche Eigenschaften an sie gestellt werden muss, wollen wir nun kurz erarbeiten.

Aus der Vielzahl der Parametrisierungsmöglichkeiten der $SU(2)$ greifen wir nun die zwei in unserem Vortrag verwendeten heraus und stellen sie kurz vor:

3.1.1 Cayley-Klein-Darstellung

Jedes Element U der $SU(2)$ lässt sich eindeutig durch die komplexen Parameter

$$u = \xi_0 + i\xi_1, \quad v = \xi_2 + i\xi_3 \in \mathbb{C} \quad (5)$$

in der Form:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} \equiv u & u_{12} \equiv v \\ u_{21} \equiv -v^* & u_{22} \equiv u^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |u|^2 + |v|^2 = 1 \quad (6)$$

darstellen. Man bezeichnet, je nach Literatur, entweder die komplexen Parameter u, v oder aber die vier reellen Werte $\{\xi_i\}_{i=0}^3$ als *Cayley-Klein-Parameter*.

Aus der Zusatzbedingung an die Determinante der Matrix folgt sofort, dass nur drei der vier Parameter wirklich frei gewählt werden können, der vierte ist dann automatisch über die Gleichung (6) festgelegt.

Gleichung (6) lässt auch erste topologische Aussagen über die Gruppe $SU(2)$ zu:

$$|u|^2 + |v|^2 = \sum_{i=0}^3 \xi_i^2 = 1 \quad (7)$$

Dies erinnert nicht ohne Grund an die bekannte Kugelgleichung im \mathbb{R}^3 , sondern sagt aus, dass die $SU(2)$ als S^3 im \mathbb{R}^4 aufgefasst werden kann, worauf wir jedoch später noch zurückkommen werden.

Beweis der Darstellbarkeit der $SU(2)$ -Matrizen über die CK-Parameter:

Sei U eine beliebige 2×2 -Matrix mit komplexen Einträgen und Determinante 1:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (8)$$

Dann ist:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (9)$$

Aus der Forderung $U^\dagger = U^{-1}$ folgt somit $a = d^*$ und $b = -c^*$.

3.1.2 Paulimatrizen

Eine andere Möglichkeit der Darstellung bedient sich der drei Paulimatrizen.

Man kann zeigen, dass sich jedes Element der $SU(2)$ als Exponentialreihe einer hermiteschen, spurlosen (2×2) -Matrix \mathbf{h} darstellen lässt (ohne Beweis):

$$U = \exp(i\mathbf{h}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{h}^\dagger = \mathbf{h} \quad \text{und} \quad \text{Sp}(\mathbf{h}) = 0 \quad (10)$$

Außerdem zeigt man leicht (vgl. Übungsaufgabe XX - Theoretische Physik III (Scheck)), dass der Raum der hermiteschen, spurlosen 2×2 -Matrizen isomorph zum \mathbb{R}^3 ist, so dass gilt:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die drei Paulimatrizen $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$ sind hermitesch, spurlos und linear unabhängig und bilden somit auch eine Basis für den Raum der hermiteschen, spurlosen Matrizen (??) über \mathbb{C}

Somit gilt:

$$U = \exp(i\mathbf{h}) = \exp\left(i \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\sigma_i}{2}\right) = \exp\left(i\boldsymbol{\alpha} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \quad , \quad \text{wobei} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (12)$$

Es fällt auf, dass ein Faktor $1/2$ künstlich aus dem Koeffizientenvektor $\boldsymbol{\alpha}$ herausgezogen wurde. Dass dieser Schritt jedoch durchaus sinnvoll ist, wird sich weiter unten zeigen, wenn es um den physikalischen Zusammenhang dieser Darstellung einer $SU(2)$ -Matrix geht.

Beweis der eindeutigen Darstellbarkeit mittels Paulimatrizen

Es wird nur bewiesen, dass die Abbildung

$$\boldsymbol{\alpha} \longmapsto h = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{mit} \quad h^\dagger = h, \quad \text{Sp}(h) = 0 \quad (13)$$

bijektiv ist. Die Eindeutigkeit der Darstellung ergibt sich dann aus der Tatsache, dass sich jede $SU(2)$ -Matrix über die Matrixexponentialfunktion in einer solchen hermiteschen, spurlosen Matrix h , darstellen lässt.

Beweis:

\Rightarrow :

Sei $\boldsymbol{\alpha} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$h = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sp}(h) = z + (-z) = 0 \quad (14)$$

Außerdem gilt

$$h^\dagger = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix} = h \quad (15)$$

⇐:

Sei h eine komplexe, hermitesche und spurlose 2×2 -Matrix.

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (16)$$

Dann folgt aus den geforderten Eigenschaften, dass

$$d = -a \quad (17)$$

$$a = a^* \Rightarrow a, d \in \mathbb{R} \quad (18)$$

$$c = b^* \quad (19)$$

$$(20)$$

h nimmt somit die geforderte Form an:

$$h = \begin{pmatrix} a & \Re(b) + i\Im(b) \\ \Re(b) - i\Im(b) & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(b) \\ \Im(b) \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Ein anderer Weg bei gegebener Matrix h die zugehörigen Einträge des Koeffizientenvektors α bestimmen zu können, bedient sich dem sogenannten *Antikommutator*

$$\{a, b\} = ab + ba \quad (22)$$

Mit ihm lassen sich die Einträge über

$$\alpha_i \mathbb{1} = \frac{1}{2} \{h, \sigma_i\} \quad (23)$$

bestimmen.

Beweis:

Zunächst rechnet man die Antikommutatorrelation der Paulimartizen nach:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1} \quad (24)$$

Sei nun h eine hermitesche, spurlose 2×2 -Matrix. Wie gezeigt, kann sie als Linearkombination der Paulimatrizen dargestellt werden:

$$h = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3 \quad (25)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \{h, \sigma_i\} &= \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k \sigma_k, \sigma_i \right\} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \{\sigma_k, \sigma_i\} \\ &= \sum_{k=1}^3 \alpha_k 2\delta_{ik} \mathbb{1} \\ &= 2\alpha_i \mathbb{1} \end{aligned} \quad (26)$$

4 Zusammenhang zwischen $SO(3)$ und $SU(2)$

4.1 Vorbetrachtungen

Ausgehend von den vorherigen Überlegungen zur Darstellung der Elemente der $SU(2)$ können wir die folgenden Rückschlüsse ziehen:

1. Jedem $V \in SU(2)$ lässt sich in eindeutiger Weise eine spurlose hermitesche Matrix $h \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ zuordnen.
2. Da die Paulimatrizen eine Basis für alle spurlosen hermiteschen 2×2 -Matrizen sind, kann dieses h eindeutig zerlegt werden:

$$h = x \sigma_1 + y \sigma_2 + z \sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } x, y, z \in \mathbb{R} \quad (27)$$

Insbesondere haben wir somit h (und damit auch $V \in SU(2)$) in eindeutiger Weise ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet.

Die Determinante von h ist:

$$\det(h) = z(-z) - ((x + iy)(x - iy)) = -\|\boldsymbol{x}\|^2 \quad (28)$$

3. Als nächstes untersuchen wir die Wirkung einer unitären Transformation $U \in SU(2)$ auf h .

Sei also

$$h' = U h U^\dagger \quad (29)$$

Diesem h' können wir (genauso wie in 2.) ein $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$ zuordnen. Die Determinante von h' ist dann:

$$\det(h') = -\|\boldsymbol{x}'\|^2 \quad (30)$$

4. Bekanntermaßen ändert sich die Determinante unter unitären Transformationen nicht:

$$\det(h') = \det(UhU^\dagger) = \det(hU^\dagger U) = \det(h) \quad (31)$$

Dann ist aber

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}'\|^2 \quad (32)$$

Daraus folgt sofort, dass sich \mathbf{x} und \mathbf{x}' nur um eine Drehung im \mathbb{R}^3 unterscheiden können, also: $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$

Auf diese Art und Weise lässt sich jedem $U \in SU(2)$ ein $R \in SO(3)$ zuordnen.

5. Diese Abbildung von $SU(2) \rightarrow SO(3)$ ist nicht injektiv.

Wenn wir in (29) U durch $-U \in SU(2)$ ersetzen, folgt:

$$h'' = (-U)h(-U)^\dagger = UhU^\dagger = h' \quad (33)$$

Somit wird $-U \in SU(2)$ genau das gleiche $R \in SO(3)$ wie auch $U \in SU(2)$ zugeordnet.

4.1.1 Gruppentheoretische Bemerkung

Der in (5.) hergestellte Zusammenhang lässt sich auch wie folgt beschreiben:

$H = \{+1, -1\}$ ist eine invariante Untergruppe der $SU(2)$, d.h.

$$U(\pm 1)U' = \pm 1 \quad \forall U \in SU(2) \quad (34)$$

Wie die Gruppentheorie lehrt, bilden die *Nebenklassen* $\{UH\}$ wieder eine Gruppe.

In einer Nebenklasse sind alle $U \in SU(2)$ zusammengefasst, die sich nur um Multiplikation mit H unterscheiden. (Konkret umfasst hier also jede Nebenklasse genau zwei Elemente U und $-U \in SU(2)$.)

Dass die Nebenklassen $\{UH\}$ eine Gruppe bilden, prüft man durch die Gruppenaxiome nach (s. [4] Seite 12)

Diese Gruppe der Nebenklassen heißt auch *Faktorgruppe*, man schreibt dafür $SU(2) \{1, -1\}$. Gruppentheoretisch bedeutet also (5.):

Die $SO(3)$ ist isomorph zur Faktorgruppe aus den Nebenklassen der invarianten Untergruppe $\{1, -1\}$ der $SU(2)$, kurz

$$SO(3) \cong SU(2) \{1, -1\} \quad (35)$$

4.2 Einfach- und zweifach-zusammenhängend

Definition:

Eine Mannigfaltigkeit heißt *n-fach zusammenhängend*, wenn das Zusammenziehen aller möglichen geschlossenen stetigen Wege (s. dazu Vortrag 13) n Klassen von gleichartig zusammengezogenen Wegen ergibt.

4.2.1 Klassische Beispiele

- auf einer Kugeloberfläche lassen sich alle stetigen geschlossenen Wege auf einen Punkt zusammenziehen
→ 1-fach zusammenhängend.
- in einem Torus im \mathbb{R}^3 („Autoreifen“) gibt es zwei Arten von geschlossenen Wegen. Solche, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen und solche, die um das „Loch“ herumgehen und sich nicht weiter zusammenziehen lassen.
→ 2-fach zusammenhängend.

Betrachten wir nun die $SU(2)$ und die $SO(3)$ als Mannigfaltigkeiten. Wie oft sind diese wohl zusammenhängend?

4.2.2 $SU(2)$

Benutzen wir die Parametrisierung durch Cayley-Klein-Parameter. Dann gilt gemäß (5) und (6)

$$U = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (36)$$

Betrachten wir nun $(a, b, c, d)^T \in \mathbb{R}^4$ so wird also die $SU(2)$ gerade durch die S^3 im \mathbb{R}^4 beschrieben. Da die S^3 (wie jede endlich dimensionale Einheitssphäre) einfach zusammenhängend ist, ist auch die $SU(2)$ einfach zusammenhängend.

(Man kann sich die S^3 auch durch eine stereographische Projektion auf den ganzen \mathbb{R}^3 projiziert denken, auf S^3 geschlossene stetige Wege sind dies auch in der Karte \mathbb{R}^3 und dort natürlich auf einen Punkt zusammenziehbar.)

4.2.3 $SO(3)$

Die gängige Parametrisierung durch Eulersche Winkel ist für diese Überlegung denkbar ungünstig: Stattdessen benutzt man folgendes: $R \in SO(3)$ wird charakterisiert durch eine Drehachse und einen Drehwinkel. Die Achse gebe die Richtung eines Vektors im \mathbb{R}^3 und der Winkel seine Länge (zwischen 0 und π) an. Somit wird die $SO(3)$ zu einer Vollkugel mit Radius π im \mathbb{R}^3 .

Aber diese Kugel hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Antipoden „verklebt“ sind: Wenn man eine Drehung um π um eine gewisse Drehachse ausführt, kann man genauso gut die antiparallele Drehachse benutzen. Konkret bedeutet das für einen stetigen geschlossenen Weg: Wenn dieser die Oberfläche der Kugel (also eine Drehung um π) berührt, kann (!) er auf dem gegenüberliegenden Punkt auf der Oberfläche fortgesetzt werden.

Anhand der folgenden Skizzen erkennt man dann leicht, dass die $SO(3)$ zweifach zusammenhängend ist. Jeder Weg mit einer *geraden* Anzahl von „Antipodensprüngen“

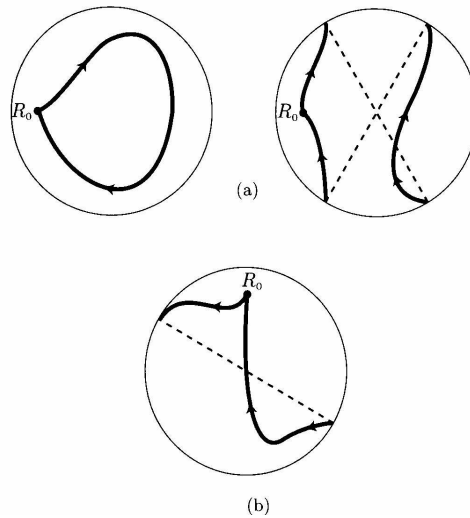


Abbildung 1: Einfach-zweifachzusammenhängend

lässt sich auf *einen* Punkt, jeder mit einer *ungeraden* Anzahl auf eine einzelne „Achse“ zusammenziehen.

4.3 Vergleich der Lie-Algebren

Da sich ein späterer Vortrag (s. Vortrag 14) genauer mit dem Thema *Lie-Algebra* befassen wird, führen wir hier nur kurz die Definition ein:

Definition:

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K .

Eine Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ heißt *Lie-Algebra*, wenn

- $[\cdot, \cdot]$ ist *bilinear*, d.h. linear in jedem Eintrag.
- Die Jacobi-Identität ist erfüllt

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0 \quad \forall a, b, c \in V \quad (37)$$

- $\forall x \in V$ gilt $[x, x] = 0$

$[\cdot, \cdot]$ heißt *Lie-Klammer*.

Wir betrachten nun als Lie-Klammer den Kommutator zwischen zwei Matrizen auf den Erzeugenden der jeweilige Gruppe:

$\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_3}{2}$ bilden eine Lie-Algebra der $SU(2)$

J_1, J_2, J_3 bilden eine Lie-Algebra der $SO(3)$

Beide erfüllen die selbe Kommutator-Relation:

$$\left[\left(\frac{\sigma_i}{2} \right), \left(\frac{\sigma_j}{2} \right) \right] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\sigma_k}{2} \right) \quad (38)$$

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{J}_k \quad (39)$$

Da der Kommutator das Verhalten in der Nähe der $\mathbb{1}$ beschreibt, sind $SU(2)$ und $SO(3)$ *lokal isomorph*.

Man benutzt hier die halben Pauli-Matrizen, damit die Kommutator-Relationen auch im Vorfaktor übereinstimmen. Genau daher kommt der halbe Winkel in der Spin-Beschreibung.

5 Die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$

Nun geht es darum, die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ zu konstruieren. Sinn und Zweck dieser Konstruktion ist es, dass wir mit der Kenntnis der Menge der irreduziblen Darstellungen in der Lage sind, alle $SU(2)$ -Transformationen über diese auszudrücken.

5.1 Homogene Polynome

Zu allererst definiert man sich Polynome der folgenden Form:

$$f_m^{(j)}(\mathbf{c}) := \frac{(c_1)^{j+m}(c_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2)^T \quad (40)$$

$$\begin{aligned} j &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \\ m &= -j, -j+1, \dots, 0, \dots, j-1, j \end{aligned} \quad (41)$$

Den Ursprung dieser Polynome kann man sich anschaulich folgendermaßen überlegen: Wir möchten letztendlich die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ gewinnen. Desweiteren wissen wir schon, dass wir mit Hilfe dieser Gruppe beispielsweise in der Lage sein werden, den Spin eines Teilchens näher zu beschreiben. Aus dem Wissen, wie sich solche Zustände unter Drehungen verhalten, wollen wir die Darstellungen konstruieren. Also fordert man, dass sich diese Polynome unter Drehungen genauso verhalten sollen. Dies bedeutet aber auch, dass sie gleiches Verhalten beim Anwenden von beispielsweise Leiteroperatoren aufweisen sollen.

Über diese Forderungen kommt man letztendlich auf die spezielle Wahl der Exponenten und den Wurzelterm, welcher sich mitunter aus der Anwendung von J_{\pm} , als Normierung ergibt.

Eigenschaften der Polynome

Die Polynome sind

- *homogen* vom Grad $2j$

$$\begin{aligned}
 f_m^{(j)}(\lambda \mathbf{c}) &= \frac{(\lambda c_1)^{j+m} (\lambda c_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \\
 &= \lambda^{j+m+j-m} \frac{(c_1)^{j+m} (c_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \\
 &= \lambda^{2j} f_m^{(j)}(\mathbf{c})
 \end{aligned} \tag{42}$$

- *linear unabhängig*
- *normiert*, allerdings nicht auf Eins, sondern gerade so, dass die Norm der Polynome unter unitären Transformationen invariant ist.

5.2 Polynome transformieren

Transformieren wir nun das Argument der Polynome (40) mit einem Element $U \in SU(2)$, so erhält man

$$\left(f_m^{(j)} \right)_U (\mathbf{c}) \equiv f_m^{(j)} (U\mathbf{c}) = \frac{(uc_1 + vc_2)^{j+m} (-v^*c_1 + u^*c_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \tag{43}$$

wobei $u, v \in \mathbb{C}$ die Cayley-Klein-Parameter der Matrix U darstellen.

So erhält man nach Ersetzung der auftretenden Binome durch ihre Entwicklungen und Umschreibung der Summationen auf $m' = j - \mu - \lambda$

$$\begin{aligned}
 \left(f_m^{(j)} \right)_U (\mathbf{c}) &= \sum_{\mu, m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-\mu)! \mu! (m'-m+\mu)! (j-\mu-m')!} \times \\
 &\quad u^{j+m-\mu} (u^*)^{j-\mu-m'} v^\mu (-v^*)^{m'-m+\mu} (c_1)^{j+m'} (c_2)^{j-m'}
 \end{aligned} \tag{44}$$

Erweitern mit $\frac{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}$ lässt in (44) wieder die nichttransformierten Polynome (40) erkennen.

D-Matrizen

Gleichung (44) lässt sich dann in folgende Matrixgleichung umschreiben

$$\left(f_m^{(j)} \right)_U \equiv f_m^{(j)} (U\mathbf{c}) = \sum_{m'} D_{mm'}^{(j)} (u, v) f_{m'}^{(j)} (\mathbf{c}) \tag{45}$$

mit

$$D_{mm'}^{(j)}(u, v) = \sum_{\mu} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-\mu)!\mu!(j-m'-\mu)!(m'-m+\mu)!} \cdot u^{j+m-\mu} (u^*)^{j-m'-\mu} v^{\mu} (-v^*)^{m'-m+\mu} \quad (46)$$

den sogenannten *D-Matrizen*.

Der Aufbau dieser Matrizen erscheint auf den ersten Blick recht kompliziert. Beachtet man jedoch, dass die Fakultät nur für nicht-negative ganze Zahlen definiert ist, so fällt die Summe über μ in (46) oftmals schnell zusammen, so dass nur wenige Terme wirklich berechnet werden müssen.

An Gleichung (45) erkennt man außerdem, dass sich die Polynome zu festem j stets nur untereinander transformieren, so dass sie als Basis für eine $(2j+1)$ -dimensionale Darstellung dienen können.

Die D-Matrizen sind unitär

Um dies einzusehen, betrachten wir das Normquadrat des transformierten Polynomvektors

$$\begin{aligned} \left\| \left(f^{(j)} \right)_U \right\|^2 &= \frac{1}{(2j)!} (\|c_1\|^2 + \|c_2\|^2)^{2j} \\ &= \frac{1}{(2j)!} \sum_{m=0}^{2j} \binom{2j}{m} \|c_1\|^{2m} \|c_2\|^{2(2j-m)} \\ &= \frac{1}{(2j)!} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{m+j} \|c_1\|^{2(m+j)} \|c_2\|^{2(2j-(m+j))} \\ &= \frac{1}{(2j)!} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{m+j} \|c_1\|^{2(m+j)} \|c_2\|^{2(j-m)} \\ &= \frac{1}{(2j)!} \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(2j-m-j)!(m+j)!} \|c_1^{m+j} c_2^{j-m}\|^2 \\ &= \sum_m \frac{\|c_1^{j+m} c_2^{j-m}\|^2}{(j-m)!(j+m)!} \\ &= \left\| \left(f^{(j)} \right) \right\|^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Das Normquadrat ist invariant, die D-Matrizen somit unitär.

5.3 D-Matrizen sind irreduzibel

Wir beweisen die Irreduzibilität indem wir aus der Formel für $D_{m m'}^{(j)}(u, v)$ zwei Spezialfälle ablesen:

$$D_{m m'}^{(j)}(u, v) = \sum_{\mu} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-\mu)!\mu!(j-m'-\mu)!(m'-m+\mu)!} \cdot u^{j+m-\mu} (u^*)^{j-m'-\mu} v^{\mu} (-v^*)^{m'-m+\mu} \quad (48)$$

1. Spezialfall

Für $m' = j$ ergibt sich aufgrund des Faktors $\mu!(j-m'-\mu)!$ nur für $\mu = 0$ ein Beitrag

$$D_{m j}^{(j)}(u, v) = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} u^{j+m} (-v^*)^{j-m} \quad (49)$$

Wichtig ist hierbei nur, dass die D-Matrizen im Allgemeinen von Null verschieden sind.

2. Spezialfall

Wähle $u = e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $v = 0$.

Dann ist

$$D_{m m'}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, 0) = \sum_{\mu} \frac{\sqrt{\dots}}{\dots} (e^{i\frac{\alpha}{2}})^{j+m-\mu} (e^{-i\frac{\alpha}{2}})^{j-m'-\mu} 0^{\mu} 0^{m'-m+\mu} \quad (50)$$

- für $m \neq m'$ ist $D_{m m'}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, 0) = 0$
- für $m = m'$ gibt es jedoch für $\mu = 0$ einen Beitrag, da $0^0 = 1$. Der Vorfaktor ist dann gerade 1 und $D_{m m}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, 0) = e^{i\alpha m}$

$$\Rightarrow D_{m m}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, 0) = \delta_{m m} e^{i\alpha m} \quad (51)$$

Es gibt also auch D-Matrizen, die diagonal sind und auf jedem Diagonaleintrag einen anderen Wert haben.

Nun fragen wir uns, welche Matrizen mit dem 2. Fall kommutieren. Mit einer Diagonalmatrix mit verschiedenen Diagonaleinträgen kann nur eine weitere Diagonalmatrix vertauschen. Diese sei mit $A_{m m'} = a_m \delta_{m m'}$ bezeichnet. Berechnet man nun das $(m-j)$.te Element von $AD_{m m'}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}})$ bzw. $D_{m m'}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}})A$, so folgt, wenn A und $D_{m m'}^{(j)}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, 0)$ kommutieren sollen:

$$\sum_{m'} A_{m m'} D_{m' j} = \sum_{m'} D_{m m'} A_{m' j} \quad (52)$$

$$a_m D_{m j} = a_j D_{m j} \quad (53)$$

also $a_m = a_j$, d.h. A muss ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein. Daraus folgt dann mit dem Schurschen Lemma, dass die Darstellung irreduzibel ist.

5.4 Einbeziehen der Eulerschen Winkel

Wir hatten in Kapitel 4 gesehen, dass jedem $U \in SU(2)$ ein $R \in SO(3)$ zugeordnet werden kann. Parametrisiert man dieses $R \in SO(3)$ mit Eulerschen Winkeln, so ist (eines der möglichen) $U \in SU(2)$ gegeben durch

$$U(R) = e^{i(\psi \frac{\sigma_3}{2} + \theta \frac{\sigma_2}{2} + \phi \frac{\sigma_3}{2})} \quad (54)$$

Stellt man das in Cayley-Klein-Parametern dar, so ist

$$U(R) = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \quad \text{mit } u = e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{und } v = e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (55)$$

Das kann man „einfach“ durch Ausführen der Matrixexponentialfunktion nachrechnen. Setzt man diese u und v in unsere Formel für $D_{mm'}^{(j)}(u, v)$ ein, so faktorisiert diese in drei Teile, die jeweils nur von ψ, ϕ oder θ abhängen. Die Abhängigkeiten von ϕ und ψ sind einfache Exponentialfunktionen, die von θ ist komplizierter und wird hier mit $d_{mm'}^{(j)}(\theta)$ bezeichnet.

$$D_{mm'}^{(j)}(\psi, \theta, \phi) = e^{im\psi} d_{mm'}^{(j)}(\theta) e^{im'\phi} \quad (56)$$

Allerdings bezahlt man für diese Einführung von „anschaulichen“ Winkeln einen Preis. Wir haben u und v , also charakterisierende Größen der $SU(2)$, durch Größen mit Eulerschen Winkel, also solche der $SO(3)$ ausgedrückt. Erinnern wir uns an die unterschiedlichen Strukturen dieser beiden Gruppen, so kann/muss eine solche Ersetzung problematisch sein. In der Tat ist für halbzahlige j (also auch halbzahlige m, m') $D_{mm'}^{(j)}(\psi, \theta, \phi)$ „zweiwertig“. Das heißt, wenn man im \mathbb{R}^3 eine Drehung um 2π ausführt (z.B. $\psi' = \psi + 2\pi$ oder $\phi' = \phi + 2\pi$), so ändert $D_{mm'}^{(j)}$ sein Vorzeichen, ist also strenggenommen keine eindeutige Funktion mehr.

$$D_{mm'}^{(j)}(2\pi, 0, 0) = (-)^{2j} \delta_{mm'} \quad (57)$$

Betrachten wir nun $d_{mm'}^{(j)}(\theta)$ genauer:

Explizit ist

$$\begin{aligned} d_{mm'}^{(j)}(\theta) &= \sum_r (-)^r \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m'-r)!(m-m'+r)!(j-m-r)!r!} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+m'-m-2r} \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{m-m'+2r} \end{aligned} \quad (58)$$

Durch Einsetzen und Umbenennen der Summationsindizes, bei (61) auch durch Additionstheoreme, beweist man die folgenden Symmetrierelationen von $d_{mm'}^{(j)}(\theta)$ (s. hierzu auch Vortrag 2):

$$d_{mm'}^{(j)}(\theta) = (-)^{m'-m} d_{m'm}^{(j)}(\theta) \quad (59)$$

$$d_{-m', -m}^{(j)}(\theta) = (-)^{m' - m} d_{m' m}^{(j)}(\theta) \quad (60)$$

$$d_{m', -m}^{(j)}(\theta) = (-)^{j - m'} d_{m' m}^{(j)}(\pi - \theta) \quad (61)$$

5.5 Beispiele für D-Matrizen

5.5.1 Allgemeine Form

$$\begin{pmatrix} D_{0,0}^{(0)} & 0 & & 0 & 0 \\ & D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} & D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} & & \\ 0 & D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} & D_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} & & \\ & & & D_{1,1}^{(1)} & D_{1,0}^{(1)} & D_{1,-1}^{(1)} \\ 0 & 0 & & D_{0,1}^{(1)} & D_{0,0}^{(1)} & D_{0,-1}^{(1)} & 0 \\ & & & D_{-1,1}^{(1)} & D_{-1,0}^{(1)} & D_{-1,-1}^{(1)} & \\ 0 & 0 & & & 0 & & \dots \end{pmatrix} \quad (62)$$

5.5.2 Kugelflächenfunktionen

$$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{0m}^{(l)}(0, \theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (63)$$

Sei $R \in SO(3)$ die Drehung, die die 3-Richtung in Richtung i dreht.

5.5.3 Spinoperator

Es ist $\sigma_i = D^{(1/2)}(R)^\dagger \sigma_3 D^{(1/2)}(R)$ mit $\sigma_3 = \text{diag}(1, -1)$

Sei z.B. $\sigma_i = \sigma_1$, d.h. $D^{(1/2)}(R) = D^{(1/2)}(0, \pi/2, 0)$

$$D^{(1/2)}(0, \pi/2, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

5.5.4 Drehimpulsoperator

Genauso: $l_i = D^{(1)}(R)^\dagger l_3 D^{(1)}(R)$ mit $l_3 = \text{diag}(1, 0, -1)$

Sei $l_i = l_2$, also ist $D^{(1)}(R) = D^{(1)}(\pi/2, \pi/2, 0)$

$$D^{(1)}(\pi/2, \pi/2, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & \sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & -i \end{pmatrix} \Rightarrow l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

6 Haarsches Maß

Die hergeleiteten Drehmatrizen haben viele Anwendungen, z.B. in der Kernphysik um deformierte Kerne zu beschreiben, bei Wellenfunktionen von Molekülen oder bei Streuamplituden für Teilchen mit Spin.

Dabei kommt es vor, dass man über alle möglichen Drehungen $R \in SO(3)$ integrieren muss.

Um das benötigte Integralmaß herzuleiten, benutzt man, dass die Integration über alle Drehungen invariant sein muss unter einer Drehung des Integranden, also

$$\int dR f(R) = \int dR f(R'R) \text{ mit } R' \in SO(3) \text{ fest} \quad (66)$$

Ganz analog ist die Integration über den ganzen Raum unter beliebigen Translationen invariant.

Das wichtige Ergebnis ist:

$$\int dR = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\psi \sin \theta d\theta d\phi \quad (67)$$

Wendet man diese Integration auf die D-Matrizen an, so findet man:

$$\begin{aligned} \int dR D_{mm'}^{(j)*}(R) D_{\mu\mu'}^{(j)}(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\psi \sin \theta d\theta d\phi D_{mm'}^{(j)*}(\psi, \theta, \phi) D_{\mu\mu'}^{(j)}(\psi, \theta, \phi) \\ &= \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{m\mu} \delta_{m'\mu'} \end{aligned} \quad (68)$$

In diesem Sinne sind die D-Funktionen orthogonal und können in ein vollständiges, orthonormiertes System von Basisfunktionen in den Eulerschen Winkeln geschrieben werden mit

$$\left\{ \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi^2}} D_{mm'}(\psi, \theta, \phi) \right\} \quad (69)$$

Literatur

- [1] Gottfried, Yan: *Quantum Mechanics: Fundamentals*, 2nd Edition, Springer Verlag 2003
- [2] F. Scheck: *Theoretische Physik 1, Mechanik*, Springer Verlag (2003)
- [3] F. Scheck: *Theoretische Physik 2, Nichtrelativistische Quantenmechanik*, Springer Verlag (2000)
- [4] F. Scheck: *Theoretische Physik 4, Quantisierte Felder*, Springer Verlag (2001)
- [5] Straumann: *Quantenmechanik*, Springer Lehrbuch (2002)
- [6] Edmonds, A.R.: *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim (1964)
- [7] Internetquelle: van Beveren, E. *Some notes on group theory*, <http://cft.fis.uc.pt/eef/evbgroups.ps.gz>