Poesie und Geheimnis: Magische Zahlen in der physikalischen Naturbeschreibung

Florian Scheck
Institut für Physik
Theoretische Elementarteilchenphysik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Interdisziplinäres Kolloquium, 30.–31. Mai 2008,
Poesie der Zahl,
Deutsches Institut der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

1. Einleitung

Die Zahlen, die uns in der Erforschung physikalischer Zusammenhänge und in deren Formulierung im Rahmen von Naturgesetzen begegnen, sind sehr unterschiedlicher Natur. Da gibt es sehr *große* Zahlen sowohl im Bereich der uns umgebenden Materie als auch in der Physik des Universums, es gibt sehr *kleine* Zahlen im Bereich der elementaren Bausteine der Materie. Viele bedeutsame Zahlen der Naturbeschreibung sind *dimensionsbehaftet,* d.h. werden in frei wählbaren Maßeinheiten ausgedrückt, andere sind *dimensionslos* und somit universell mitteilbar, ohne auf Eichstandards, „Urlängen", „Referenzzeiten und -gewichte" oder anderes Bezug zu nehmen. Diese Begriffe und Unterscheidungen werden wir als erste klären müssen, bevor wir uns dem eigentlichen Thema zuwenden können. Hierbei werde ich mich überwiegend auf die kleinsten Einheiten der Materie und auf die zwischen ihnen wirkenden, fundamentalen Kräfte konzentrieren. Alle makroskopischen Eigenschaften sollten daraus erklärbar sein. Strukturen bildende Materie unserer Alltagswelt baut auf elementaren Teilchen und ihren Wechselwirkungen auf und folgt, wenn wir in der Analyse nur tüchtig genug sind, aus den fundamentalen Gesetzmäßigkeiten. Auch der Aufbau des Universums, das Verständnis des Kosmos wie wir ihn beobachten, beruht auf einfachen Grundgesetzen und sollte mit der Mikrowelt verknüpfbar sein.

Wenn wir manche Zahl, die uns in der physikalisch erfassbaren Natur begegnet, als „magisch" oder „geheimnisvoll" bezeichnen, dann ist dies oft ein Eingeständnis unserer Unkenntnis, oder, schlimmer noch, unseres Unvermögens, solchen Zahlen eine überzeugende Erklärung zu geben. Wir haben anhand der Phänomenologie erkannt, dass ihnen eine tiefere Bedeutung innewohnt, wir sind aber außerstande, sie in einen größeren Zusammenhang zu stellen und sie einer kohärenten, möglichst einfachen Beschreibung einzugliedern.

Poetisch und nun wirklich und in einem tieferen Sinne *magisch* werden hingegen solche Zahlen, die uns einen Bauplan in der Struktur der Materie verraten und die wir – wenn die Götter mit uns sind – in einen logisch überzeugenden, mathematisch konsistenten Rahmen einordnen und vielleicht sogar erklären können. Sie sind *magisch,* weil sie der Grundstruktur unserer physikalischen Natur zu eigen sind, die offenbar so und nur so existieren kann. Sie werden *poetisch,* wenn sie auf schöpferische Weise weiterführen und den Fortschritt im physikalischen Verständnis auf intuitiven Wegen befördern.

> „What we actually do is nothing to what we dream of doing"
> (S. Coleman)

Von all solchen Zahlen soll hier die Rede sein, von denen, die eine Dimension tragen und die dennoch Naturkonstanten sind, von dimensionslosen, die grundlegende Verhältnisse angeben und von Zahlen, die magisch sind und denen durch die Assoziationen, die sie auslösen, ein poetischer Charakter zu eigen wird.

2. Dimensionsbehaftete und dimensionlose Zahlen in der Physik

In der Regel sind die wichtigen Zahlen der Physik mit einer physikalischen Dimension versehen. In unserer Alltagswelt messen wir Abstände in Metern, Zeiten in Sekunden, Gewichte und Massen in Kilogramm usw., oder in anderen, der jeweiligen Situation angepassten Einheiten. Insofern könnte man argumentieren, dass der absoluten Zahl für eine physikalische Größe in einem dieser Maßsysteme keine Bedeutung zukommt. Wir können diese ja jederzeit ändern. So ist die Höhe des Eiffelturms

$$H = 300 \text{ Meter}, \quad \text{aber auch } = 200 \cdot 10^{-11} \text{ AE} ,$$

wo das Symbol AE die astronomische Einheit, d.h. die mittlere Distanz von der Erde zur Sonne bedeutet. (Wir verwenden durchweg die sehr bequeme Notation der Zehnerpotenzen. Der Exponent von Zehn, so er positiv ist, gibt die Zahl der Nullen an, die hinter die erste Zahl geschrieben werden müssen. Wenn er negativ ist, dann sind die Kehrwerte gemeint. So bedeuten zum Beispiel

$$3 \cdot 10^6 \equiv 3.000.000 \quad \text{und} \quad 8 \cdot 10^{-5} \equiv \frac{8}{100.000} = 0,00008 .$$

Der Vorteil dieser Schreibweise, neben ihrer Übersichtlichkeit, ist die Feststellung, dass beim Multiplizieren die Exponenten einfach addiert werden.
Beispiele: $10^3 \cdot 10^5 = 10^8$, $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2 = 100$.
Der Radius eines Wasserstoffatoms ist in Metern

$$R^{(\text{Wasserstoff})} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad \text{aber auch } \simeq 61500\, R^{(\text{Proton})} ,$$

wenn man ihn mit der Größe seines Kernes, dem Proton vergleicht.

An dieser Stelle ist eine wichtige Bemerkung angebracht:

> **Bemerkung:** Dimensionsbehaftete Zahlen der Physik sind fast immer mit dem Auftreten von Massen verknüpft. Im Bereich der fundamentalen Kräfte treten solche Zahlen in der Regel dann auf, wenn die Elementarteilchen *nichtverschwindende Massen* tragen. Die physikalischen Gesetze enthalten dann Konstanten, die von Längen, Zeiten und Massen abhängen. Sie bleiben nicht invariant, wenn man diese Einheiten skaliert (mit beliebigen Streckungs- oder Stauchfaktoren multipliziert). Interessanter Weise kann man sich aufgrund unserer Kenntnis der fundamentalen Wechselwirkungen durchaus ein physikalisch sinnvolles Universum vorstellen, in dem es nur *masselose* Teilchen gibt. In diesem Fall sind die Gesetze vollkommen skaleninvariant. (Natürlich ist diese Vorstellung physikalisch zwar wohlbegründet, aber unrealistisch, denn ohne uns massive Erdbewohner und ohne unsere massiven Messgeräte könnten wir keine dieser Aussagen experimentell überprüfen.)

Auch die bekannten Naturkonstanten sind mit einer physikalischen Dimension versehen. Besonders wichtige Beispiele sind die

$$\text{Lichtgeschwindigkeit } c = 299.792.458 \text{ m s}^{-1} \; ; \tag{1a}$$

$$\text{Newton'sche Gravitationskonstante } G_{\text{N}} = 6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \; ; \tag{1b}$$

$$\text{Planck'sche Konstante } h = 6,626\ldots \cdot 10^{-34} \text{ Joule s} \; ; \tag{1c}$$

$$\text{elektrische Ladung eines Protons } e = 1,602\ldots \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \; . \tag{1d}$$

Zunächst ist man etwas ratlos, wenn man gefragt wird, was solche Zahlen, jede für sich genommen, aussagen. Sind sie groß? Sind sie klein? In welchem Maßstab? Begreifbarer werden solche Zahlen erst, wenn man sie in Relation zu anderen Zahlen der gleichen physikalischen Dimension setzen kann. Ein Beispiel mag dies beleuchten: Wir kennen alle den Blitz- und Donner-Effekt bei der Beobachtung eines Gewitters in der Ferne. Die typische Schallgeschwindigkeit in atmosphärischer Luft ist $v_{\text{Schall}} \sim 300$ m s^{-1}, die des Lichtes aber ist die oben angegebene. Ihr Verhältnis

$$v_{\text{Schall}} \, : \, c \simeq 1 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{1.000.000}$$

gibt uns ein unmittelbares Gefühl für die ungeheure Größe der Lichtgeschwindigkeit. Diese Feststellung ist physikalisch bedeutsam: In der Regel ist unsere alltägliche Dynamik nichtrelativistisch, d.h. alle Geschwindigkeiten sind sehr klein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit. Selbst die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne, die von der Größenordnung 30 km s^{-1} ist, bleibt sehr klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Nur weil alle relevanten Geschwindigkeiten klein gegen den Wert (1a) von c sind, kann die Himmelsmechanik unseres Planetensystems mit Newton'scher Mechanik beschrieben werden und kommt ohne Gebrauch der Speziellen Relativitätstheorie aus.
Dies ist ganz anders in der Mikrophysik der Elementarteilchen. Hier kann man Elektronen sehr leicht auf Geschwindigkeiten bringen, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen. Die Dynamik ist dann eine grundlegend andere als die des Billardspiels, des Fußballs oder des Fahrradfahrens.

Damit sind wir bei *Verhältnissen* gleichdimensionierter Größen angelangt, die dann reine Zahlen sind und die möglicherweise tiefere Bedeutung tragen.

3. Verhältnisse vergleichbarer Größen und universelle Zahlen

In der Physik der kleinsten Bausteine gibt es magische Verhältnisse von empirischen Größen gleicher physikalischer Dimension, in denen verschlüsselte Information über die Struktur der Materie steckt. Ich gebe einige Beispiele:

- **Verhältnisse von Massen der Elementarteilchen:**

  Die beiden Bausteine des Wasserstoffatoms, das Elektron und das Proton, stehen im Verhältnis

$$\frac{m(\mathrm{p})}{m(\mathrm{e})} = 1836,15\ldots . \tag{2a}$$

Diese Zahl ist universell. In Form einer Botschaft könnten wir sie den Bewohnern eines fernen Planeten, weit weg von uns im Weltall, mitteilen. Wenn deren Umwelt ebenfalls Wasserstoff enthielte, könnten sie diese Nachricht sofort entschlüsseln. Warum dieses Verhältnis den Wert (2a) hat, wissen wir bis heute nicht. Was wir aber wissen, ist, welche Konsequenzen ein anderer Wert dieses Verhältnisses hätte. Wären zum Beispiel Elektron und Proton gleich schwer, so wäre das Wasserstoffatom zwei Mal größer als es nun einmal ist. Ebenso wären alle anderen Atome um etwa einen Faktor 2 vergrößert. Ob allerdings die ganze organische Chemie und Biochemie, von der wir abhängen, noch in gewohnter Weise funktionieren würde, müsste man sorgfältig überprüfen.
Das Elektron besitzt zwei schwerere Schwestern, die in allen Eigenschaften außer der Masse und der Stabilität mit ihm übereinstimmen. Das Elektron ist für alle Zeiten stabil, während seine Schwestern nach einer gewissen Zeit, *mittlere Lebensdauer* genannt, in leichtere, stabile Teilchen zerfallen. Die nächst schwerere Schwester ist das *Myon*, mit μ bezeichnet, dessen Masse etwa 207 Mal größer ist als die des Elektrons,

$$\frac{m(\mu)}{m(\mathrm{e})} = 206,768\ldots . \tag{2b}$$

Auch diese Zahl ist eine – zugegeben rätselhafte – Konstante der physikalischen Natur, die unveränderlich ist und die wir unseren Mitbewohnern des Weltalls als Botschaft mitteilen könnten. Das Myon ist instabil, lebt aber „für seine Verhältnisse“ lange: Die Lebensdauer ist

$$\tau(\mu) = 2,19703 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}\ ,$$

wobei das Myon dominant in ein Elektron und zwei Neutrinos übergeht (die ihrerseits stabil sind). Man darf von einer *langen* Lebensdauer sprechen, weil die Unschärfe in seiner Masse $h/\tau(\mu)$ sehr klein im Vergleich zur Masse selbst bleibt,

$$\frac{h}{\tau(\mu)} : m(\mu) \simeq 2 \cdot 10^{-17}\,, \qquad \text{sehr klein gegenüber } 1\ .$$

(Eine praktische Konsequenz dieses Verhältnisses ist die Möglichkeit, Myonen über makroskopische Distanzen beschleunigen und führen zu können derart, dass man mit ihnen wie mit Elektronen Präzisionsexperimente durchführen kann.)

Gäbe es das Elektron nicht, so wäre seine schwere Schwester, das Myon, selbst stabil und würde den Platz des Elektrons einnehmen. Die Gesetze der Physik sagen uns, wie die unbelebte Natur dann beschaffen wäre: Denkt man sich alle Elektronen in unserer Materie durch Myonen ersetzt, so werden alle Gegenstände um uns und auch wir selber um das Verhältnis (2b) *kleiner.* Für sich alleine genommen, wäre die Reduzierung auf eine solch extreme Variante von Jonathan Swifts *Liliput* nicht sonderlich erschreckend. Man muss allerdings bedenken, dass zugleich alle Spektralinien in den Frequenzen um denselben Faktor vergrößert würden und dass somit aus wohltuender Morgenröte gefährlich harte Röntgenstrahlung würde, die unser organisches Leben unmöglich machen würde.
Die zweite Schwester des Elektrons, das sog. τ-Lepton, ist noch wesentlich schwerer,

$$\frac{m(\tau)}{m(\mathrm{e})} = 3.477,5 \;, \tag{2c}$$

tritt aber weniger dramatisch in Erscheinung, weil sie – im Gegensatz zum Myon – extrem kurzlebig ist und keine nachweisbaren Atome bilden kann.

- **Verhältnisse von Kombinationen der Naturkonstanten:**

  Die (dimensionsbehafteten) Naturkonstanten wie die der Gleichungen (1a) bis (1d) können und müssen zu reinen Zahlen ohne physikalische Dimension zusammengefasst werden. Man *kann* dies tun, wenn man ihre Einheiten analysiert und dafür sorgt, dass diese in einem Produkt oder Verhältnis herausfallen. Ein Beispiel mag dies erhellen: Man weiß aus Schultagen, dass das Coulomb'sche Potenzial

$$U_{\text{Coulomb}}(r) = \frac{e^2}{r}$$

  die Dimension einer Energie hat. Daraus folgt, dass $e^2 = U(r) \cdot r$ die Dimension Energie$\times$Länge haben muss. Dies ist aber auch die physikalische Dimension der Planck'schen Konstanten (1c), wenn man diese mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert,

$$[h \cdot c] = (\text{Energie} \times \text{Zeit}) \times \left(\text{Länge} \cdot \text{Zeit}^{-1}\right) = \text{ Energie} \cdot \text{Länge} \;.$$

  Es ist somit natürlich, das dimensions*lose* Verhältnis

$$\alpha(\text{Sommerfeld}) = \frac{2\pi e^2}{h \cdot c} \tag{3}$$

  aus der Ladung des Protons, der Planck'schen Konstanten und der Lichtgeschwindigkeit zu bilden. (Der reine Zahlenfaktor 2π ist dabei eine Sache

der Konvention.)
Man *muss* dies sogar tun, wenn man die Quantendynamik der Elementarteilchen und der Atome in Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung berechnen will. Dort stellt sich heraus, dass α(Sommerfeld) für die *Stärke* der Wechselwirkung und damit für alle elektrodynamischen Quanteneffekte charakteristisch ist. Auch hier wird man fragen, warum die Sommerfeld'sche Konstante gerade den Wert (3) hat, $\alpha \simeq 1/137$ und keinen anderen, der größer oder kleiner wäre. Würde man diesen Wert ändern, so hätte dies dramatische Konsequenzen. Die beiden hier relevanten Formeln sind der Bohr'sche Radius a_B und die Bindungsenergie B des Wasserstoffatoms,

$$a_\mathrm{B} = \frac{hc}{2\pi\alpha mc^2}\,, \qquad B = -\tfrac{1}{2}\alpha^2 mc^2\,. \tag{4}$$

Würde man α vergrößern, so würden der Bohr'sche Radius a_B und mit ihm alle Atome mit dem Kehrwert von α *kleiner*. Gleichzeitig würden die Bindungsenergie B und mit ihr alle Energiedifferenzen in Atomen mit dem Quadrat von α *größer*. Man erreicht mit diesem Gedankenspiel schnell Grenzen, jenseits derer belebte Natur und damit unser Fragen nach dem Wie und Warum unmöglich wird.
Aus der Masse des Protons, der Lichtgeschwindigkeit, sowie den Newton'schen und Planck'schen Konstanten kann man ebenfalls eine dimensionslose Zahl bilden,

$$\alpha(\text{Gravitation}) = \frac{2\pi G_\mathrm{N} m^2(\mathrm{p})}{h\cdot c}\,, \tag{5}$$

deren tiefere Bedeutung nicht vollständig verstanden ist, die aber direkt mit der Sommerfeld'schen Konstanten (3) verglichen werden kann. Die empirischen Werte dieser beiden Zahlen sind

$$\alpha(\text{Sommerfeld}) = (137,036)^{-1} = 0,0072973\,,$$
$$\alpha(\text{Gravitation}) = 5,9\cdot 10^{-39}\,.$$

Eine direkte physikalische Interpretation erhalten diese so dramatisch verschiedenen Zahlen durch den Vergleich der elektrischen Wechselwirkung zweier Protonen mit ihrer gravitativen Wechselwirkung. Die Stärke der Gravitationskraft F_G zwischen zwei Protonen, die sie zueinander hin zieht, dividiert durch die Stärke der Coulombkraft F_C, die abstoßend ist, ergibt

$$\frac{|F_\mathrm{G}|}{|F_\mathrm{C}|} = 8,1\cdot 10^{-35}\ ! \tag{6}$$

Dies ist eine unvorstellbar kleine Zahl, die unserer Alltagserfahrung der blutigen Kniee beim Sturz vom Fahrrad und der Tränen über das herunter gefallene Meißner Porzellan aus Omas Zeiten zu widersprechen scheint.

Bemerkung: Der Kleinheit der Zahl (6) steht die ungeheuer große Zahl elementarer Bausteine entgegen, aus der die makroskopisch große Tasse besteht. Man zeigt sogar, dass ab etwa 10^{55} Protonmassen die Gravitation in der Diskussion von Stabilität die dominante Rolle spielt (siehe [2]). Um es genauer zu sagen: Sobald die Gravitation, die ja immer anziehend ist, zur dominanten Wechselwirkung aufrückt, gibt es keine Stablität mehr.

4. Magische Zahlen in der Mikrophysik

Zu den in einem tieferen Sinne wirklich magischen Zahlen führt uns die Physik der kleinsten Bausteine der Materie in ihren tiefen Grundlagen.

- **Spin und Statistik**

  Eine von diesen ist die Zahl **Zwei** in der Existenz von zwei Statistiken für ununterscheidbare Elementarteilchen. Dazu muss man folgendes wissen oder sich in Erinnerung rufen:

  (i) Elementarteilchen sind absolut ununterscheidbar. Es gibt keine Möglichkeit, ein einzelnes Elektron zu einem Individuum zu machen, indem man ihm eine Eigenschaft zuordnet (oder zufügt), die nur es und kein anderes trägt. Alle *Elektronen* sind absolut gleich. Wenn man 10^{12} von ihnen erzeugt hat, aber nur eines in einer Apparatur nachweist, kann man auf keine Weise feststellen, welches aus der ursprünglich großen Zahl dies war. Dieselbe Aussage gilt auch für *Photonen*, die Quanten des Lichtes. Photonen können nicht „markiert" werden. In einem Zustand, der zwei kinematisch unterschiedliche Photonen enthält, kann man niemals sagen, welches welches war und woher es kam.

  (ii) Die Elementarteilchen tragen einen inneren Drehimpuls, den sogenannten *Spin*, der zu seinen unveränderlichen und daher charakteristischen Eigenschaften gehört. Ein Drehimpuls trägt die physikalische Einheit Energie$\times$Zeit, das ist dieselbe Einheit wie die der Planck'schen Konstanten (1c). In Einheiten dieser Konstanten (geteilt durch 2π) ausgedrückt, haben Spins entweder *ganzzahlige* Werte, also $0, 1, 2, \ldots$, oder *halbzahlige* Werte, d.h. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Elektronen und Protonen tragen den Spin $\frac{1}{2}$. Photonen dagegen tragen den Spin 1. Teilchen fallen generell in zwei Klassen

  $$\text{Spin } S = \tfrac{2n+1}{2} \quad \text{und solche mit Spin } J = n\ , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\ . \tag{7}$$

  Protonen, Elektronen, Neutronen, auch die Quarks gehören zur ersten, Photonen, π-Mesonen, Gravitonen gehören zur zweiten Kategorie.[1]

  (iii) Zustände der Quantenmechanik besitzen die merkwürdige Eigenschaft,

[1] Der Zusammenhang zwischen der Ganz- oder Halbzahligkeit des Spins eines Teilchens und der Statistik, der es genügt, ist Inhalt eines fundamentalen Theorems von Markus Fierz und Wolfgang Pauli. Es beruht auf allgemeinen Voraussetzungen, denen jede „vernünftige" Quantenfeldtheorie genügen sollte, siehe z.B. [1].

dass sie sich wie optische Wellen überlagern, und somit sich durch Interferenz gegenseitig verstärken oder auslöschen können [3].

Die Welten der Teilchen mit *halb*zahligem Spin und derer mit *ganz*zahligem Spin sind vollständig getrennt. Teilchen der ersten Gruppe genügen einer grundlegend anderen Statistik als die der zweiten Gruppe. Es gibt keine Möglichkeit einen Zustand mit halbzahligem Drehimpuls mit einem Zustand interferieren zu lassen, der ganzzahligen Drehimpuls besitzt. Solche Zustände sind, wie wir sagen, durch eine *Super-Auswahlregel* getrennt. Die Elementarteilchen der ersten Gruppe, die nach Enrico Fermi (Physiker, 1901–1954) *Fermionen* genannt werden, sind besonders merkwürdig: Ein quantenmechanischer Zustand kann aus einer Sorte gleichartiger Fermionen nur mit einem oder gar keinem Exemplar besetzt sein. Dieses eigenartige Ausschließungsprinzip ist die Ursache für die Schalenstruktur der Atomhüllen und damit für das Periodensystem der Elemente. Auch in der Frage der Stabilität von Materie spielt es eine zentrale Rolle [2].
Teilchen mit ganzzahligem Spin, die *Bosonen* (nach Satyendra Nath Bose, 1894–1974) genannt werden, dagegen fühlen sich in ein und demselben Quantenzustand äußerst wohl. So kann man beliebig viele Photonen in ein sog. Bose-Einstein-Kondensat packen, das makroskopisch sichtbar gemacht wird.

- **Das Geheimnis der drei Familien**
  Wie oben erwähnt, hat das Elektron zwei schwere Schwestern, das Myon μ und das τ-Lepton. Alle drei tragen elektrische Ladung und Spin $\frac{1}{2}$, und sie unterscheiden sich scheinbar nur durch ihre Masse. Jeder von ihnen ist außerdem ein neutrales Teilchen, ein Neutrino zugeordnet, so dass sie in Paaren

$$(\mathrm{e}\,,\nu_{\mathrm{e}})\ ,\quad (\mu,\nu_\mu)\quad \text{und}\quad (\tau,\nu_\tau) \tag{8}$$

  auftreten. Es gibt **drei** solcher Familien von Elektron-artigen Teilchen, nicht mehr. Dies weiß man sehr genau. Man weiß auch, dass jede einzelne der drei Familien (8) noch eine verborgene, innere Eigenschaft besitzen muss – wir nennen sie Leptonzahlen – derart, dass ein Myon mehr als nur ein angeregtes Elektron ist (d.h. nicht einfach über einen Prozess Myon $\to$ Elektron $+$ Photon zerfällt). Jeder Zerfallsprozess mit den Teilchen (8) läuft so ab, dass alle drei Lepton-Familienzahlen erhalten bleiben.
  Dieselbe magische Zahl 3 findet sich in den drei Familien von Quarks wieder,

$$(up, down)\ ,\quad (charm, strange)\quad \text{und}\quad (top, bottom)\ , \tag{9}$$

  aus denen stark wechselwirkende Teilchen und Materie aufgebaut sind. Auch hier sind es gerade drei Familien. Es gibt gute analytische Gründe dafür, dass diese Zahl mit der Zahl der Familien (8) übereinstimmt. Dies

bedeutet, mit anderen Worten, dass Elektron-artige Teilchen mit Quarks konspirieren, um eine mathematisch konsistente Beschreibung der elementaren Wechselwirkungen zu ermöglichen.
Die Zahl 3 wiederholt sich überdies in der Welt der Quarks in Form des inneren Farb-Freiheitsgrades, der für jede Quark-Familie zur Verfügung steht. Auch hier sind es je drei solche Freiheitsgrade.

5. Magische Zahlen und chaotische Bewegung

Eigenartiger Weise treten auch in der makroskopischen Dynamik, die im klassischen Sinn streng deterministisch ist, universelle Zahlen auf. Wir kennen diese Zahlen aus empirischen, oft auf Rechner gestützten Analysen, verstehen aber die allermeisten noch weniger als die magischen Zahlen im Mikrobereich, die wir weiter oben diskutiert haben. Als *deterministisch chaotisch* bezeichnet man eine Dynamik, die zwar im Prinzip aus ihren Anfangsbedingungen in eindeutiger Weise vorhergesagt werden kann, die aber dennoch in endlicher Zeit in ein chaotisches Regime überführt, weil benachbarte Anfangsbedingungen zu Lösungen gehören, die sich exponentiell voneinander entfernen [4]. Selbst die kanonischen Systeme der Mechanik, die wir seit W.R. Hamilton und C.G.J. Jacobi gut verstanden glaubten, zeigen in verdächtig vielen Fällen chaotisches Verhalten sobald sie eine Mindestzahl von Freiheitsgraden aufweisen. Aus der Fülle solcher Systeme, die man z.B. in [4] beschrieben findet, möchte ich nur das Planetensystem unserer Sonne herausgreifen, das Jahrhunderte lang als Hort der Stabilität und immerwährende, ruhig schlagende Himmelsuhr galt, in dem aber in Wirklichkeit Chaos lauert oder, wie im Fall der Rotationsdynamik des Saturnmondes Hyperion, offen sichtbar ist [5].

In der Dynamik von Planeten, Planetoiden und Asteroiden scheint der *Goldene Schnitt* eine verborgene, aber wichtige Rolle zu spielen. Zur Erinnerung: Der Goldene Schnitt ist ein Begriff aus der Proportionenlehre, den man an einer klassischen Säule der Höhe H demonstrieren kann. Diese Säule wird in zwei Teilstücke mit Höhen h_1 bzw. h_2 aufgeteilt derart, dass $h_1 + h_2 = H$ ist und dass das Verhältnis des kleineren Stückes zur Länge des größeren Teilstücks dasselbe ist wie das des größeren Teilstücks zur ganzen Säule,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{H} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \, , \qquad \Longrightarrow \gamma \equiv \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 0,618034 \, . \tag{10}$$

Hier ist rechts der aus der beschriebenen Bedingung folgende Wert des Goldenen Schnittes angegeben. Aus mathematischer Sicht ist der Goldene Schnitt eine „sehr“ irrationale Zahl. Auch in der Mechanik chaotischer Systeme spielt er eine besondere Rolle, auf die ich aus Zeit- und Platzgründen nur skizzenhaft eingehen kann. So führt quasiperiodische Bewegung mit rationalen Windungszahlen, für die man die berühmte Fibonacci-Reihe wählt,

$$F_0 = 0 \, , \; F_1 = 1 \, , \; F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \, ,$$

auf den Goldenen Schnitt,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)=\gamma$$

und damit in ein interessantes chaotisches Regime[6] .

Aus numerischen Studien ist bekannt, dass die Umlaufbahnen von Planetoiden, deren Umlaufzeit in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Umlaufzeit von Jupiter stehen, chaotische Bewegungen ausführen. Dies führt dazu, dass sie mit erhöhter Wahrscheinlichkeit anderen Planeten (darunter auch die Erde!) nahe kommen können und durch solche Beinahe-Kollisionen aus ihren Bahnen herausgestreut werden. Dieser Mechanismus erklärt recht überzeugend die aus der beobachtenden Astronomie bekannten *Kirkwood'schen Lücken.*

Noch rätselhafter sind die Ergebnisse einer phänomenologischen Untersuchung des Mathematikers J.-M. Souriau *Le Nombre d'Or et le Système Solaire*, in der er feststellt, dass die Verteilung der Planeten und deren Satelliten sich als Phänomen von Resonanzen bzw. Nicht-Resonanzen darstellt, in dem der Goldene Schnitt γ und sein Quadrat γ^2 eine nicht unerwartete, aber auch nicht entschlüsselte Rolle spielen [7].

Die Beispiele, die wir hier diskutiert haben, zeigen magische Zahlen in der physikalischen Naturbeschreibung, die uns entweder in die Verzweiflung treiben, weil wir sie nicht wirklich entzaubern können, oder uns in Träume über Strukturen der physikalischen Welt entführen, die sich dahinter verbergen und die wir eines Tages vielleicht erklären können. Bei allem bleibt uns Physikern, was eingangs gesagt wurde

> „What we actually do is nothing to what we dream of doing!“

Literatur

[1] Alle Definitionen, Zahlen und anderen Einzelheiten zu den im Vortrag genannten Größen der Quantenwelt findet man z. B. in:
F. Scheck: *Quantum Physics*, Springer-Verlag 2007
(siehe dort insbesondere die Tabelle des Anhangs A.8)

[2] Eine besonders schöne heuristische Diskussion der Stabilität der Materie und des physikalischen Universums findet man in:
W. Thirring: *Stabilität der Materie*,
Naturwissenschaften 73 (1986) 605 – 613

[3] Yakir Aharonov, Daniel Rohrlich: *Quantum Paradoxes – Quantum Theory for the Perplexed*,
WILEY-VCH Verlag, 2005

[4] F. Scheck: *Theoretische Physik 1: Mechanik – Von den Newton'schen Gesetzen zum deterministischen Chaos*,
8. Auflage, Springer-Verlag 2007

[5] J. Wisdom: *Chaotic Behaviour in the Solar System*,
Nuclear Physics **B** (Proceedings Supplement) 2 (1987) 391

[6] J. Guckenheimer, Ph. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*,
Springer-Verlag (New York) 2001

[7] Jean-Marie Souriau: *Le Nombre d'Or et le Système Solaire*,
CPT-89/P. 2296 (1989)