Nichtkommutative Geometrie in der Quantenfeldtheorie

Cornelius Paufler

Institut für Physik (ThEP), Johannes-Gutenberg-Universität, Staudingerweg 7, D-55099 Mainz, Germany

Nichtkommutative Geometrie

Welche physikalischen Gesetze gelten bei sehr kleinen Längenskalen? Bis zu einer Größenordnung von $10^{-18}m$ konnten noch keine Abweichungen von der differentialgeometrischen Formulierung physikalischer Feldtheorien gefunden werden. Einfache Gedankenexperimente zeigen aber, dass die Messung sehr kurzer Abstände Singularitäten in der Raum-Zeit erzeugt, die eine noch genauere Messung verhindern. Es herrscht daher Einigkeit darüber, dass unser physikalisches Weltbild Veränderungen erfahren wird.

Geleitet von Erfahrungen mit Quantisierungsverfahren lautet ein von A. Connes und anderen unter dem Namen "nichtkommutative Geometrie" ausgearbeiteter Vorschlag, eine algebraische Formulierung der klassischen Differentialgeometrie zu entwickeln und diese zu "quantisieren" [1]. Man hofft, auf diese Weise zu allgemeineren Modellen für physikalische Theorien zu kommen, die den erwähnten Überlegungen Rechnung tragen.

Wenn wir die klassische Differentialgeometrie verlassen, was tritt dann an die Stelle von Lokalität und Kausalität der Quantenfelder, die zentrale Eigenschaften für jede Quantenfeldtheorie sind? Um derartige Fragen beantworten zu können, muss man einfache Beispiele für die vorgeschlagene Verallgemeinerung auf ihre physikalischen Konsequenzen untersuchen, um so ein intuitives Verständnis zu erreichen.

Beispiel: Die Moyal-Ebene

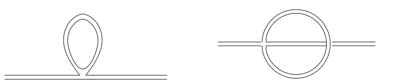
Die Moyal-Ebene stellt ein Beispiel für eine nichtkommutative Geometrie dar, das sehr nahe an dem vertrauten Rahmen der Quantenfeldtheorie bleibt. Die Bausteine dieses Beispiels sind Funktionen auf dem vierdimensionalen, flachen euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$, die aber nicht wie üblich punktweise, sondern mit einem nichtkommutativen Produkt, dem Moyal-Produkt $\star$, zu multiplizieren sind. Für die elementaren Koordinaten-Funktionen x^μ ergibt sich beispielsweise

$$[x^\mu, x^\nu] = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\vartheta J^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,\dots,4,$$

mit der symplektischen Matrix J und einem Parameter ϑ. Man sieht sofort, dass eine Unschärferelation für die Messung der Koordinaten eines Punktes gelten muss. Die allgemeine Formel für das Moyal-Produkt lautet

$$(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \exp\{i\xi(x-y)\}\, f(x - \tfrac{1}{2}\vartheta J\xi)\, g(y)$$

Für $\vartheta = 0$ ergibt sich das kommutative, punktweise Produkt von Funktionen. Die Annahme $\vartheta \neq 0$ bewirkt eine interessante Veränderung der Feynman-Regeln: Jeder Vertex eines Diagramms erhält einen zusätzlichen Phasenfaktor, der von der relativen Anordnung der in den Vertex laufenden Impulse abhängt. Dies bedeutet aber einfach, dass die Linien eines jeden Diagramms eine zusätzliche, transversale Dimension bekommen und wir zwischen planaren (in einer Ebene zeichenbaren, A) und nicht-planaren (B) Graphen unterscheiden müssen:



A B

Der Einfluss von ϑ zeigt sich nur in der letzten Gruppe.

Wir möchten im folgenden untersuchen, wie das Moyal-Produkt effektive Wirkungen beeinflusst.

Determinanten

Die effektive Wirkung zu einer Quantenfeldtheorie definiert eine klassische Feldtheorie, die die physikalischen Eigenschaften der Quantenfeldtheorie bis zu einer Energieskala Λ simuliert. Für eine klassische Wirkung $S[\varphi]$ mit Bosonen φ und den zugordnetem Strom $J = \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi}$ findet man aus dem Feynmanschen Pfadintegral mit der Methode der stationären Phase

$$\log Z[J] = \tfrac{1}{\hbar}\left(S[\varphi] + \langle\varphi, J\rangle\right) + \tfrac{1}{2}\det Q + o(\hbar).$$

(Für Fermionen würde sich der Faktor $\frac{1}{2}$ ändern.) Hierbei ist der Differentialoperator Q gegeben durch die zweite Variation der klassischen Wirkung,

$$Q(x,y) = \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)}.$$

Der Logarithmus der Determinante von Q beschreibt daher die Quantenkorrekturen zur klassischen Wirkung in niedrigster Ordnung $\hbar$. Die Entwicklung nach Potenzen von $\hbar$ bedeutet eine Entwicklung nach der Zahl der unabhängigen Schleifen der Feynman-Graphen.

Die Determinante eines Differentialoperators ist aber mathematisch nicht wohldefiniert, es ist die Auswahl einer Regularisierungsvorschrift vonnöten, die eine physikalische Skala einführt. Die effektive Theorie ist dann innerhalb dieser Skala gültig, und man kann nun studieren, wie sich die effektive Theorie bei Veränderung des Skalenparameters verhält.

In dem unten diskutierten Beispiel findet man eine asymptotische Reihe im Skalenparameter Λ

$$\log\det Q = c_3\Lambda^3 + c_2\Lambda^2 + c_1\Lambda + c_{\log}\log\Lambda + o(\lambda^0)$$

Die für $\Lambda \to \infty$ polynomial divergenten Anteile sind zu verwerfen. Der $\log\Lambda$-Term trägt aber zu dem endlichen Anteil bei Reskalierung von Λ bei, er ist daher potentiell problematisch. Hier soll der entprechende Koeffizient $c_{\log}$ berechnet werden.

Pseudodifferentialoperatoren

Den Logarithmus der Determinante eines Differentialoperators Q definiert man über die Gleichung

$$\log\det Q = \operatorname{tr}\log Q,$$

wobei tr$A$ die Spur des Operators A bezeichnet. Zur Berechnung des Operators $\log Q$ bietet die Theorie der Pseudodifferentialopertoren ein geeignetes Werkzeug. Über die Formel

$$\sigma[A](x,p) = \mathrm{e}^{-ixp} A \mathrm{e}^{ixp}$$

wird dem Differentialoperator A eine Funktion von x und p, das Symbol von A, zugeordnet. Schreibt man mit Dirac'schen bra und ket $\langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\exp\{ixp\}$, so sieht man leicht wegen der Vollständigkeit der Eigenvektoren des Impulsoperators $|p\rangle$

$$\langle x|A|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} d^4p \,\langle x|A|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\overline{\langle x|p\rangle}\,\sigma[A](x,p)\,\langle p|\psi\rangle$$

In dieser Formel muss das Symbol nicht unbedingt ein Polynom in p sein — sie dient zur Definition des Pseudodifferentialoperators A zum Symbol $\sigma[A]$.

Für die Spur eines solchen Pseudodifferentialoperators berechnet man

$$\operatorname{tr}A = \int_{\mathbb{R}^4} d^4p\,\langle p|A|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{|p|<\Lambda}\int_{\mathbb{R}^4} d^4p\, d^4x\, \sigma[A](x,p)$$

Da für die uns interessierenden Fälle die p-Integration wegen des Verhaltens für große p nicht existiert, haben wir den Integrationsbereich beschränkt. Wir betrachten damit nur Beiträge unterhalb einer Impuls-Schwelle Λ.

Wir benötigen also das Symbol von $\log Q$, um die erste Quantenkorrektur zur klassischen Wirkung zu berechnen. Dazu verwendet man die Integralgleichung

$$\log(t) = \int_0^1 ds\left(1 + \frac{1}{1 - s(t-1)}\right)$$

für den Operator Q anstelle von t. Die Berechnung des Symbols von $\log Q$ ergibt sich also aus der Berechnung des Symbols von dem Inversen von $1 - s(Q-1)$, also der Resolvente von Q, für alle $s \in [0,1]$.

Ein Beispiel

Wir betrachten Bosonen $\varphi(x)$, die minimal an ein äußeres Yang-Mills-Feld mit Eichgruppe G gekoppelt sind. Es sei zunächst $\vartheta = 0$. Die Felder φ tragen eine Darstellung von G, und Q ist der Laplace-Operator (wir rechnen euklidisch) mit minimaler Kopplung

$$Q = -D^\mu_A D_{A,\mu} + m^2 = -(\partial^\mu + ieA^\mu)(\partial_\mu + ieA_\mu),$$

wobei m die Masse der Bosonen bezeichnete. Q ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung. Das Symbol der Resolvente von Q erhält man über den folgenen Trick, der eine Rekursionsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{e}^{-ipx}(Q+\lambda)\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{e}^{-ipx}(Q+\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{ipx} \\ &= (p^2+\lambda)\sigma[(Q+\lambda)^{-1}] + (Q - 2ip^\mu D_{A,\mu})\sigma[(Q+\lambda)^{-1}]. \end{aligned}$$

Mit der Integraldarstellung des Logarithmus findet man die leicht zu merkende Formel

$$\sigma[\log Q](x,p) = \log(p^2 + Q - 2ip^\mu D_{A,\mu}),$$

die folgendermaßen zu verstehen ist: Man entwickle die Funktion auf der rechten Seite in eine Taylorreihe um p^2 und behandle die Differentialoperatoren als "kleine Größe", die auf eine gedachte Eins rechts anzuwenden ist. Man kann zeigen, dass diese Formel nicht nur für log, sondern für recht allgemeine Funktionen gültig bleibt.

Es entsteht so ein Term $\log p^2$ und eine Reihe in fallenden Potenzen von p. Der führende Term hängt nicht vom äußeren Feld A_μ ab und fällt bei Normierung des Pfadintegrals heraus. Die polynomialen Terme tragen je nach Potenz in p zum konvergenten/divergenten Teil der Determinante bei. Der uns interessierende Koeffizient $c_{\log}$ ergibt sich aus dem Term $\sim p^{-4}$. Nach einiger Rechnung findet man

$$c_{\log} = \frac{1}{96\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}\left\{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\},$$

wobei die Spur unter dem Integral über die internen Indizes der Darstellung von G läuft und $F_{\mu\nu}$ die Krümmung des Feldes A_μ bezeichnet. Überraschend: Diesen Term hätte man für die "volle" klassische Theorie, die auch das Verhalten der A_μ beschreibt, hinzunehmen müssen! Dann beschriebe der Vorfaktor des Integrals gerade die relative Stärke des Beitrags der Bosonen φ und der Yang-Mills-Felder A_μ. Der potenziell gefährliche $\log\Lambda$-Term bewirkt also lediglich eine Abänderung dieses Faktors. Eine alternative Interpretation greift auf das spektrale Wirkungsprinzip [1] zurück, nur das zu dessen Formulierung Fermionen nötig waren.

Was ändert sich nun für $\vartheta \neq 0$? Dann ist Q gegeben durch

$$Q = -\tilde{D}^\mu_A \tilde{D}_{A,\mu} + m^2 = -(\partial^\mu + ieA^\mu\star)(\partial_\mu + ieA_\mu\star).$$

Die Felder A_μ wirken also auf den Wellenfunktionen der Bosonen mit der neuen Moyal-Multiplikation. Die Berechnung des Symbols von $\log Q$ vollzieht sich auf analoge Weise, und man findet

$$\sigma[\log Q](x,p) = \log(p^2 + \tilde{Q} - 2ip^\mu D_{\tilde{A},\mu})$$

mit $\tilde{Q} = D^\mu_{\tilde{A}} D_{\tilde{A},\mu}$ und

$$\tilde{A}_\mu(x,p) = A_\mu(x - \tfrac{1}{2}\vartheta Jp).$$

Die äußeren Felder A_μ bekommen im Symbol auch eine p-Abhängigkeit! Dies war zu erwarten, denn das Moyal-Multiplizieren ist ein Differentialoperator unendlicher Ordnung. Wie sieht für das veränderte Symbol nun der Koeffizient $c_{\log}$ aus? Die spezielle Abhängigkeit $x - \frac{1}{2}\vartheta Jp$ im Argument der Felder A_μ legt nahe, unter dem Integral der Spur eine Transformation $x \mapsto x + \frac{1}{2}\vartheta Jp$ durchzuführen. Dies würde die verschiedenen p-Beiträge wieder entmischen. Wir hatten aber die p-Potenzen verschiedenen konvergenten/divergenten Anteilen der Determinante zugeordnet, welchem Argument ist also zu trauen? Als Problem stellt sich heraus, dass das Symbol der Resolvente nicht exakt, sondern nur als Reihenentwicklung in $1/p$ bekannt ist, für die Variablen-Transformation jedoch das Verhalten für große x wichtig wäre. Naiv betrachtet verbessert das Moyal-Produkt zunächst das Verhalten des Symbols bei großen p, durch die unendliche Ausdehnung des $\mathbb{R}^4$ trägt diese Verbesserung aber nicht zu Eigenschaften wie dem Divergenzgrad der Determinante bei. Dies lässt sich als Manifestation der vieldiskutierten UV/IR-Mischung deuten. Eine mathematische Analyse, die die Rekursionsformeln mit allgemeinen Eigenschaften des Moyal-Produkts kombiniert, rechtfertigt schließlich die Transformation, so dass der Koeffizient $c_{\log}$ aus dem zu $\vartheta = 0$ gewonnen werden kann, indem überall zwischen die A_μ ein Moyal-Stern $\star$ geschrieben wird. Auf diese Weise erhält man eine (naive) nichtkommutative Yang-Mills-Wirkung zu den Bosonen in minimaler Kopplung.

Bis hierher und noch weiter!

Was passiert, wenn an die Stelle der flachen Metrik in Q eine beliebige Metrik tritt? Hier ändert sich die Formel für die Spur geringfügig. Es zeigt sich, dass $c_{\log}$ neben dem obigen Ausdruck noch die Riemannsche Krümmung enthält, allerdings nicht in Einstein-Hilbert-Form! Es ist noch zu klären, welche Normierungskonstante im Pfadintegral zu wählen ist, um den $\log p^2$-Term im Symbol der Resolvente zu entfernen.
Die Variablen-Substitution unter dem Spur-Integral ist gerade der Übergang von nichtkommutativen x-Variablen zu kommutativen. Ist dies eine Illustration der Seiberg-Witten-Abbildung, bei der nichtkommutative Theorien auf kommutative, wechselwirkende abgebildet werden?
Lassen sich mit den vorgestellten Methoden Gleichungen für den Renormierungsfluß für nichtkommutative Theorien ableiten?
Was ergibt sich für andere nichtkommutative Produkte auf $\mathbb{R}^4$, bei denen J von x abhängt. Ist $J = const.$ ein Grenzfall?

Links

[1] Nach dem Genuss dieses Posters und vor dem Grillfest wartet eine sportliche Herausforderung: Neben Raum 03 119 (Treppe nehmen!) ist die nichtkommutative Geometrie anschaulich auf einem Poster erklärt.
[2] Nachschlag gibt's auf meiner Homepage auf den Seiten von ThEP. Ich freue mich immer über Fragen und Diskussion (Zi 03 122).