

Anomalien.  
Vorlesung auf der Sommerschule  
„Grundlagen und neue Methoden der Theoretischen Physik“  
zu Saalburg 1997

Prof. Dr. H. Römer

September 1997

# 1 Einleitung

Dies ist die niedergeschriebene Version der Vorlesung, die H. Römer im September 1997 auf der Sommerschule zu Saalburg in Thüringen gehalten hat. Einen ähnlichen Blickwinkel auf das folgende Thema gibt H. Römers Artikel „Field theoretical applications of the index theorem“, [14], der zudem eine ausführliche Literaturliste über Aspekte dieses Gebietes bietet. Weitere Ausführungen sowie Literatur findet man in [3, 6]. Einführende Betrachtungen sind in den Standardlehrbüchern der Quantenfeldtheorie enthalten.

Die allgemeinste Definition einer Anomalie ist, daß die Symmetrie einer klassischen Theorie nicht in die quantisierte Version übernommen werden kann. Es treten „anomale“, d.h. symmetriebrechende Terme auf.

Eigentlich sollte man sich allmählich daran gewöhnen, in Gedanken von der Quantentheorie auszugehen. Dann wären Anomalien mit zusätzlichen Symmetrien im klassischen Limes verbunden.

Das Studium der Anomalien erschließt ein weites Gebiet: Es werden zum Beispiel Resultate aus der Topologie, der nichtkommutativen Geometrie und der Algebra verwendet.

In den klassischen Feldtheorien treten verschiedene Symmetrien auf:

## 1. $\gamma^5$ -Invarianz

In der Feldtheorie des Standardmodells mit zunächst masselosen Quarks sollte die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \mathcal{D} \psi + \dots$$

nicht nur unter lokalen und globalen Isospintransformationen, sondern auch unter globalen chiralen Transformationen

$$\psi \mapsto e^{i\alpha\gamma^5} \psi, \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma^5}$$

invariant sein. Insgesamt ergibt sich damit eine globale Invarianz unter der Gruppe

$$U(2) \times U(2),$$

wo der erste Faktor chiralen, der zweite Faktor nicht-chiralen globalen Transformationen entspricht. Die zugehörigen erhaltenen Ströme sind

$$\begin{aligned} j^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, & j_i^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^i \psi \\ j_5^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi, & j_{5,i}^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^i \psi \end{aligned}$$

Eine solche hohe globale Symmetrie wird im Teilchenspektrum nicht beobachtet; sie würde etwa eine Verdopplung des Teilchenspektrums in entartete Zustände entgegengesetzter Parität bewirken.

In Wirklichkeit ist der chirale Anteil der  $U(2) \times U(2)$ -Symmetrie spontan gebrochen, die zugehörigen Goldstone-Teilchen sollten die  $\pi$ -Mesonen für die chirale  $SU(2)$ -Symmetrie und ein isoskalares Teilchen  $X$  mit Parität  $(-1)$  sein. Man erwartet dann

$$\partial_\mu j_{5,i}^\mu \sim \partial_\mu j_5^\mu \sim m_\pi^2 \sim m_X^2.$$

Hier tritt das sogenannte  $U(1)$ -Problem auf: Es gibt kein pseudoskalares Meson mit Isospin 0, das ähnlich leicht wie das  $\pi$ -Meson wäre. Die Lösung des  $U(1)$ -Problems ist eine Anomalie der chiralen  $U(1)$ -Invarianz, die zu einer zusätzlichen Symmetriebrechung auf dem Quantenniveau führt.

## 2. Dilatationsinvarianz

Hierunter versteht man die Invarianz unter Reskalierungen der Raum-Zeit,

$$x^\mu \mapsto e^{-a} x^\mu.$$

Jede Regularisierung der Feldtheorie bricht die Symmetrie und führt zu spontaner Massenerzeugung.

In den ersten beiden Beispielen sind die auftretenden Anomalien erwünscht, sie dienen zur Lösung des  $U(1)$ -Problems.

### 3. Eichinvarianz

$$A \mapsto u^{-1}Au + u^{-1}du, F \mapsto u^{-1}Fu$$

Eichinvarianz ist eine Redundanzsymmetrie: Die Observablen der Theorie sind gerade die eichinvarianten Polynome der Felder, die Eichtransformationen wirken also gerade nicht auf den beobachtbaren Größen. Hier ist eine Anomalie untragbar, da physikalische Eigenschaften wie die Positivität des Skalarproduktes und die Unitarität der S-Matrix verloren gehen.

### 4. Diffeomorphismeninvarianz

Hier ist allgemein Unveränderlichkeit unter Koordinatentransformationen gemeint. Speziell sollten zum Beispiel geometrisch formulierte Theorien wie die Allgemeine Relativitätstheorie oder die Yang-Mills-Theorie nicht von den lokal gewählten Koordinaten der Mannigfaltigkeit abhängen. Es gilt das gleiche wie für die Eichanomalien.

In diesen Fällen wären Anomalien tödlich, sie müssen sorgfältig vermieden werden. Notorisch gefährdet sind hierbei chirale Theorien, bei denen rechts- und links-chirale Fermionen verschieden an die Eich- bzw. Gravitationsfelder ankoppeln. Im Gegensatz zu nicht-chiralen Theorien bricht zum Beispiel die Pauli-Villars-Regularisierung durch den in ihr enthaltenen Massenterm die Eichinvarianz. Der dominante Anteil zum Zerfall  $\pi \rightarrow 2\gamma$  ist als Eichanomalie von chiralen  $U(2)$ -Quarkströmen interpretierbar. Im Standardmodell wird, wie zu fordern, diese Anomalie durch eine fermionische Anomalie kompensiert, so daß insgesamt keine Eichanomalie auftritt, die Amplitude für den Zerfall  $\pi \rightarrow 2\gamma$  aber unverändert bleibt.

### 5. Diffeomorphismen der Weltflächen in der Stringtheorie

Die Lagrange-Dichte der Polyakovschen Formulierung ist invariant unter allgemeinen Diffeomorphismen der Weltflächen.

$$\mathcal{L} = \int d^2x \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X_\mu \sqrt{g} g^{\rho\sigma}.$$

Dies ist ein Spezifikum 2-dimensionaler Theorien.

### 6. Weylinvarianz

Weil die Weltflächen der Strings 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind ergibt sich eine Invarianz unter konformen Transformationen

$$g \mapsto \lambda^2(x)g.$$

Anomalien sind eine Aussage über die Quantentheorie als solche, nicht über ihre Koordinatisierung. Die Algebra der Observablen kann durch ganz verschieden Sätze von Feldern erzeugt werden, wie sich neuerdings gerade in den verschiedenen Dualitätstransformationen zeigt, z.B. in

$$\begin{aligned} \text{Quarks} &\leftrightarrow \text{Hadronen (eventuell in effektiver Theorie)} \\ \text{String} &\leftrightarrow \sigma\text{-Modell.} \end{aligned}$$

Die An- oder Abwesenheit von Anomalien sollte unabhängig von der gewählten Formulierung sein.

Es gibt viele Aspekte, die wir berühren werden, um die Auswertung von Anomalien und ihre Bedeutung zu diskutieren.

1. Feynman-Graphen und Regularisierung
2. Seeley-Algorithmus für elliptische Differentialoperatoren als Weiterentwicklung des Symbolkalküls
3. Topologie: Hier werden wir Felder als Schnitte in Bündeln oder Zusammenhänge in Bündeln beschreiben. Damit wird sich eine Beziehung zwischen Anomalien und den Indices gewisser elliptischer Operatoren (den kinetischen Operatoren der Felder in euklidischer Formulierung) herstellen lassen.

4. Algebra: Hier gab es in letzter Zeit besondere Fortschritte. Es seien insbesondere die Wess-Zumino-Konsistenzbedingung, das Themengebiet der Kozykeln auf Algebren bzw. Gruppen, die Nicht-kommutative Geometrie sowie  $q$ -Deformationen genannt.

Von nun an sei unsere Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit mit einer EUKLIDISCHEN SIGNATUR versehen.

Zum Schluß der Einleitung sei hier die allgemeine Formel zur Berechnung der Anomalien einer Theorie angegeben. Die Bedeutung der verwendeten Symbole zu verstehen sowie die Rechtfertigung der Formel wird Gegenstand dieser Vorlesung sein.

$$\sigma = chF \hat{A}(R)$$

Dabei ist  $\hat{A}$  das  $A$ -Dach-Geschlecht der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit  $M$  (Raum-Zeit), definiert durch

$$\hat{A}(M) := 1 + \frac{1}{4\pi} \text{tr.} \{R^2\} + \frac{1}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{1}{288} (\text{tr.} R^2)^2 + \frac{1}{360} \text{tr.} R^4 \right\} + \dots$$

Wie man sieht, läßt sich  $\hat{A}(M)$  als Funktion des Riemannschen Krümmungstensors  $R$  ausdrücken.  $chF$  bezeichnet den Chern-Charakter der eventuell vorhandenen Eichbündel. Dieser ist gegeben durch gewisse Polynome in der Krümmung  $F$  des Yang-Mills-Zusammenhangs:

$$chF := r + \frac{i}{2\pi} \text{tr.} F + \dots + \frac{i^n}{(2\pi)^n n!} \text{tr.} F^n + \dots$$

Das Kochrezept für Axialanomalien auf  $D$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten lautet nun wie folgt: Man nehme den  $D$ -Form-Anteil von  $\sigma$ ,

$$\mathcal{A}_{ax} = \sigma|_D.$$

Für Eich- und Diffeomorphismenanomalien nehme man den  $D+2$ -Form-Anteil,

$$\mathcal{A}_0 := \sigma|_{D+2}.$$

Da  $\sigma$  geschlossen ist (im de Rham'schen Sinne), existiert (lokal) eine  $D+1$ -Form  $\mathcal{A}_1$  mit

$$\mathcal{A}_0 = d\mathcal{A}_1.$$

Weiterhin ist  $\sigma$  invariant unter infinitesimalen Eichtransformationen,  $\delta\sigma = 0$ , und damit auch  $\mathcal{A}_0$ . Da  $\delta$  mit  $d$  vertauscht, ergibt sich

$$0 = \delta\mathcal{A}_0 = \delta d\mathcal{A}_1 = d\delta\mathcal{A}_1.$$

Es läßt sich also wieder (lokal) eine  $D$ -Form  $\mathcal{A}_{ed}$  finden, für die

$$\delta\mathcal{A}_1 = d\mathcal{A}_{ed}$$

gilt. Obige Gleichungen nennt man Absteigegleichungen ('descent equations').  $\mathcal{A}_{ed}$  ist nun der gesuchte Ausdruck für Eich- bzw. Diffeomorphismen- Anomalien.

## 2 Quantisierung

### 2.1 Sternprodukte

In der klassischen Mechanik wird ein System vollständig durch einen Punkt im Phasenraum  $\mathcal{P}$  beschrieben. Beobachtbare Größen (Energie, Drehimpuls, ...) sind glatte Funktionen über  $\mathcal{P}$ . In der Quantenmechanik entspricht dem Zustand eines System ein Strahl in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ . Observable werden hier durch Operatoren auf  $\mathcal{H}$  beschrieben, die im Gegensatz zu den klassischen Funktionen eine nichtkommutative Algebra bilden. Die Quantisierung ist damit eine (aus physikalischen Gründen invertierbare) Abbildung

$$Q : C^\infty(\mathcal{P}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}),$$

für die wir folgende Eigenschaften fordern ( $g, f \in C^\infty(\mathcal{P}); \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in \text{End}(\mathcal{H})$ ):

**Q.i) Linearität**

$$Q(\alpha f + \beta g) = \alpha Q(f) + \beta Q(g)$$

**Q.ii)  $Q(1) = \mathbb{1}$**

**Q.iii) Korrespondenz von Poisson-Klammer und Kommutator**

$$Q(\{f, g\}) = \frac{1}{i\hbar} [Q(f), Q(g)]$$

**Q.iv) Irreduzibilität**

$$[A, Q(p)] = [A, Q(q)] = 0 \Rightarrow A = \alpha \mathbb{1}$$

Dabei bedeuten  $p, q$  in Eigenschaft **Q.iv)** alle verallgemeinerten Impulse und Koordinaten. Mit anderen Worten sollen die Operatoren auf dem Hilbert-Raum auch nur von Orten und Impulsen abhängen. Man beachte, daß  $Q$  aufgrund der Nichtkommutativität von  $\mathcal{H}$  kein Algebrenhomomorphismus sein kann.

Zu diesem Satz von Eigenschaften existiert allerdings ein no-go-Theorem von Groenewald und van Hove. Es gibt keine Abbildung  $Q$  mit diesen Eigenschaften!

**Übung 2.1.** Sei  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$  der Raum aller  $L^2$ -Funktionen über  $\mathbb{R}^2$  und die Quantisierung  $Q : C^\infty \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  gegeben durch ( $p, q$ -Koordinate und Impuls des Phasenraumes  $\mathbb{R}^2$ )

$$Q(f) = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \right) - \frac{\partial f}{\partial p} p + f.$$

Man prüfe **Q.i) – iv)**.

Sind nur **Q.i) – iii)** erfüllt, so spricht man von einer *Präquantisierung*. Es zeigt sich, daß die mildste Abschwächung der Eigenschaften einer Quantisierung, die aus der Gültigkeit des no-go-Theorems herausführt, die Hinzunahme höherer Ordnungen in  $\hbar$  in **Q.iii)** ist:

$$Q.iii') \quad Q(\{f, g\}) = \frac{1}{i\hbar} [Q(f), Q(g)] + \mathcal{O}(\hbar)^1$$

BEMERKUNG. Man beachte, daß der Kommutator in **Q.iii)** von der Ordnung  $\hbar$  ist. Damit ist der erste Term der rechten Seite von **Q.iii')** von der Ordnung 1.

Das Operator-Produkt auf Quantenniveau entspricht *nicht* der Multiplikation der klassischen Observablen. Mithilfe der zu  $Q$  inversen Abbildung  $\tilde{Q}$ ,

$$\tilde{Q} \circ Q = \text{id}_{C^\infty(\mathcal{P})},$$

erhält man somit eine zusätzliche Struktur auf dem Raum der (klassischen) Funktionen über dem Phasenraum, das  $*$ -Produkt. Man definiert es über

$$f * g := \tilde{Q}(Q(f)Q(g)).$$

Das Produkt erbt folgende Eigenschaften

---

<sup>1)</sup>Die Funktion  $\mathcal{O}$  erfüllt  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\hbar)}{\hbar} = \text{const.} < \infty$ .

\*.i)  $C^\infty(\mathcal{P})[[\hbar]]$  ist eine assoziative \*-Algebra

\*.ii)  $1 * f = f * 1 = f$

\*.iii)  $f * g = f \cdot g + \mathcal{O}(\hbar)$

\*.iv)  $f * g - g * f = i\hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2)$

BEMERKUNG.  $C^\infty(\mathcal{P})[[\hbar]]$  meint die Menge aller formalen, d.h. nicht unbedingt konvergenten Potenzreihen in  $\hbar$  von glatten Funktionen über dem Phasenraum.

Vergleich von \*.iv) mit Q.iii') zeigt, daß  $C^\infty(\mathcal{P})[[\hbar]]$  mit dem \*-Produkt anstatt der normalen Multiplikation eine Realisierung der quantisierten Theorie darstellt.

## Äquivalenz

Verschiedene Quantisierungsvorschriften führen nun zu verschiedenen \*-Produkten. Sei

$$S = \mathbb{1} + \sum_{r=1}^{\infty} \hbar^r S_r$$

mit Differentialoperatoren  $S_r$  von mindestens der Ordnung  $r$ , so daß

$$S1 = 1,$$

die konstante Funktion 1 also das Eins-Element bleibt. Dann ist durch

$$f *_{S} g := S^{-1}(Sf * Sg)$$

ein äquivalentes Sternprodukt definiert, die Äquivalenzklassen werden durch die zweite de Rham'sche Kohomologieklasse,  $H^2(\mathcal{P})$ , parametrisiert. Im folgenden werden wir nun ein mögliches Sternprodukt kennenlernen. Wie bereits eingangs erwähnt, kann die Quantisierungsabbildung  $Q$  kein Algebrenhomomorphismus sein. Damit ergibt sich die Frage, welche Operatoren nun Produkten von Observablen zugeordnet werden. In der klassischen Mechanik hat man zum Beispiel die kanonischen Variablen  $x, p$ . Diesen ordnet man bei Quantisierung jeweils  $x$  bzw.  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  zu, jedoch hat man damit noch nicht festgelegt, ob  $q \cdot p$  in  $x \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  oder in

$$\alpha x \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot x$$

übergeht. Einer Funktion  $f(x_i, p_i)$  in den Koordinaten und Impulsen wird somit ein Differentialoperator zugeordnet, der auf die Form

$$Q(f) = \sum_{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\alpha|} f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = A_f,$$

mit Funktionen  $f_{\alpha}$ , die von den Orten  $x_i$  abhängen, gebracht werden kann. Man definiert nun das Symbol des Operators  $A_f$  durch

$$\sigma_{A_f} = f_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$$

und erhält auf diese Weise eine Funktion  $\sigma$  über dem ganzen Phasenraum,  $\sigma \in C^\infty(\mathcal{P})$ .

Man rechnet leicht nach, daß das Produkt zweier Operatoren  $A$  und  $B$ ,

$$A = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\alpha|} a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \sigma(A) = a_{\alpha} \xi^{\alpha},$$

$$B = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\alpha|} b_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \sigma(B) = b_{\alpha} \xi^{\alpha},$$

die Gestalt

$$\sigma(AB) = \sum_k \frac{1}{k!} \left( \frac{\hbar}{i} \right)^{|k|} \partial_\xi^k \sigma(A) \partial_x^k \sigma(B) =: \sigma(A) * \sigma(B)$$

annimmt. Hierdurch ist ein \*-Produkt definiert, der sogenannte Symbolkalkül. Er wird uns im Laufe dieser Vorlesung noch beschäftigen.

## 2.2 Die Übertragung von Symmetrien

Gegeben sei eine Gruppe  $\mathcal{G}$  von Symmetrieoperationen der Lagrange-Funktion, die durch kanonische Transformationen auf dem Phasenraum wirken.  $X$  sei ein Element aus der Lie-Algebra von  $\mathcal{G}$ , das über die Exponentialabbildung eine einparametrische Untergruppe von  $\mathcal{G}$  generiert.  $X$  entspricht dann, über die Gruppenwirkung auf dem Phasenraum, ein Vektorfeld, welches hier auch mit  $X$  bezeichnet werden soll.  $X$  stellt nun, auf Funktionen angewandt, die Richtungsableitung in Richtung der Gruppenwirkung dar. Die Impulsabbildung<sup>2)</sup>  $\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \text{Lie}\mathcal{G}^*$  liefert für jedes Element  $X$  aus der Lie-Algebra  $\text{Lie}\mathcal{G}$  eine Funktion auf  $\mathcal{M}$  über

$$\mathcal{M} \ni m \rightarrow \mathcal{I}(m)(X) \in \mathbb{R}.$$

Also wird jedem Lie-Algebra-Element  $X$  diejenige Funktion  $\mathcal{I}_X$  zugeordnet, die (infinitesimal) die kanonische Transformation zu  $X$  erzeugt,

$$X(f) =: \{\mathcal{I}_X, f\}.$$

Die Bilder der Impulsabbildung passen dann wieder in den klassischen Rahmen kommutativer Funktionenalgebren mit Poisson-Klammer. Wir fordern noch *Äquivarianz*, das heißt die Poisson-Klammer soll die Struktur der Symmetrieralgebra widerspiegeln,

$$\{\mathcal{I}_X, \mathcal{I}_Y\} = \mathcal{I}_{[X, Y]}. \quad (1)$$

Für ein \*-Produkt, das heißt auf Quanten-Niveau, lassen sich folgende Bedingungen formulieren

(I) Kovarianz

$$\mathcal{I}_X * \mathcal{I}_Y - \mathcal{I}_Y * \mathcal{I}_X = i\hbar \{\mathcal{I}_X, \mathcal{I}_Y\} = i\hbar \mathcal{I}_{[X, Y]},$$

(II) Invarianz

$$\{\mathcal{I}_X, f * g\} = \{\mathcal{I}_X, f\} * g + f * \{\mathcal{I}_X, g\} \text{ und}$$

(III) starke Invarianz

$$\mathcal{I}_X * f - f * \mathcal{I}_X = i\hbar \{\mathcal{I}_X, f\}.$$

Aus der dritten Forderung ergeben sich die ersten zwei: Um (I) zu erhalten, wähle man  $f = \mathcal{I}_Y$ . Für (II) berechnet man

$$\begin{aligned} i\hbar \{\mathcal{I}_X, f * g\} &\stackrel{(III)}{=} [\mathcal{I}_X, f * g]_* \\ &= [\mathcal{I}_X, f]_* * g + f * [\mathcal{I}_X, g]_* \\ &\stackrel{(III)}{=} i\hbar \{\mathcal{I}_X, f\} * g + f * i\hbar \{\mathcal{I}_X, g\}. \end{aligned}$$

**Übung 2.2.** Man zeige den folgenden Sachverhalt. Für zeitunabhängige Eichtransformationen  $\chi(x)$  ist

$$\mathcal{I}_\chi = \int (\nabla^i E_i - \rho) \chi.$$

In der Quantenfeldtheorie gelingt die Quantisierung durch Differentialoperatoren im allgemeinen nicht sogleich, da es sich um Funktionalableitungen handeln müßte und  $\mathcal{L}^2(Q)$  nicht definiert ist. Defekte können in der Äquivarianz oder in

<sup>2)</sup>Eine Behandlung dieser Abbildung findet man zum Beispiel in [1].

der Forderungen (I) bis (III) auftreten. Ein Defekt in (I) entspricht bereits einer Deformation der Lie-Algebren-Struktur und das Brechen von (II) macht eine Darstellung der Lie-Algebra auf allen Observablen problematisch.

Die Vorgehensweise bei Quantisierung einer Feldtheorie ist im allgemeinen indirekter, man verschafft sich zuerst die Erwartungswerte

$$\langle Q(A) Q(B) Q(C) \rangle = \int \mathcal{D}\phi ABC e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]},$$

und rekonstruiert daraus die Quantengrößen nach der GNS-Konstruktion<sup>3)</sup>. Notorisch schwierig ist dabei die Behandlung von Fermionen.

Nun ist

$$\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\Psi e^{\int \bar{\Psi}(\mathcal{D}_A + m)\Psi} \sim \int \det(\mathcal{D}_A + m) \mathcal{D}A.$$

Wäre  $\det(\mathcal{D}_A + m)$  ein invarianter Ausdruck unter Eichtransformationen, so könnte man die Integration entlang von Eichorbits abspalten. Der resultierende Vorfaktor würde dann bei allen Erwartungswerten herausfallen. In der Nichtinvarianz von  $\det(\mathcal{D}_A + m)$  zeigt sich folglich das Auftreten von Anomalien. Zur konkreten Überprüfung verwendet man nun den Symbolkalkül. Zu beachten ist, daß  $\det(\mathcal{D}_A + m)$  im allgemeinen keine lokale Größe, d.h. nicht als Polynom in den Feldvariablen und ersten Ableitungen ausdrückbar ist, wohl aber ihre Variation. Dies ist gerade der Ausdruck für die Anomalie.

Einiges über die Struktur möglicher Anomalien läßt sich sofort ohne große Rechnungen aussagen. Zur Illustration betrachten wir Eichanomalien für Theorien der Form

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\mathcal{D} + \tau_+(A)) P_+ \Psi + \bar{\Psi} (i\mathcal{D} + \tau_-(A)) P_- \Psi,$$

( $\tau_{\pm}(A) = T_{\pm}^a \tau^a$  sind die Darstellungen der Symmetriegruppe, etwa  $SU(n)$ , mit den Koordinaten  $T_{\pm}^a$ ) und diskutieren Anomalien von

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_- \quad ; \quad \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a} = \bar{\Psi} (\gamma^{\mu} T_{\pm}^a) P_{\pm} \Psi$$

in  $D = 2n$  Dimensionen. Wie oben erwähnt numeriert hier  $a$  den internen Freiheitsgrad der Theorie. Wir wollen also den Erwartungswert der Divergenz des Vektorstromes,  $D_{\mu} \mathcal{J}^{\mu}$  berechnen. Klassisch verschwindet dieser nach dem Noetherschen Theorem. Auf Quantenniveau betrachten wir die Ableitung des generierenden Funktional mit Quellterm  $c D_{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu}$ :

$$\begin{aligned} \langle D_{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a} \rangle &= \left. \frac{d}{dc} \right|_{c=0} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-[\bar{\Psi}(\mathcal{D}_A + c D_{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a}) P_{\pm} \Psi]} \\ &= \left. \frac{d}{dc} \right|_{c=0} \det((\mathcal{D}_A + c D^{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a}) P_{\pm}) \\ &= \left. \frac{d}{dc} \right|_{c=0} \det \mathcal{D}_A \det((1 + \mathcal{D}_A^{-1} c D^{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a}) P_{\pm}) \\ &= \mathbf{tr} \{ \mathcal{D}_A^{-1} D^{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a} P_{\pm} \}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathcal{D}_A^{-1}$  der Propagator im äußeren Feld. Lokal gilt  $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A = \gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + A_{\mu})$ . Wir entwickeln nun  $\mathcal{D}_A^{-1}$  in  $A$  und erhalten damit Feynman-Graphen der Form von Abbildung 1.

Jeder Vertex trägt dabei mit 2  $\gamma$ -Matrizen bei – eine vom Propagator des freien Feldes und eine vom Eichfeld  $A$ . Insgesamt haben wir also eine gerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen, die Spur zerfällt in 2 Anteile: Spur über Zustände positiver Chiralität und solche negativer. Weiterhin tritt in

$$\mathbf{tr} \mathcal{D}_A^{-1} D_{\mu} \mathcal{J}_{\pm}^{\mu,a} P_{\pm}$$

<sup>3)</sup>Aus einer Observablenalgebra, genauer aus einer  $C^*$ -Algebra, und einem auf ihr gegebenen positiven, linearen Funktional mit Norm 1, einem sogenannten (reinen) Zustand, läßt sich ein Hilbert-Raum konstruieren, auf dem die Algebra als Operatoralgebra dargestellt ist, siehe zum Beispiel [11]



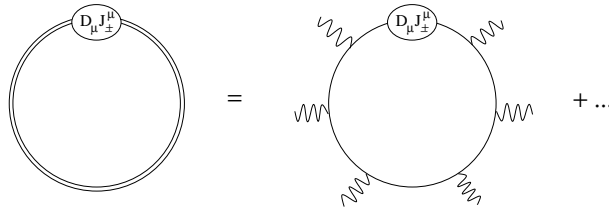


Abbildung 1: Der Erwartungswert von  $D_\mu J_\pm^\mu$  benutzt den Propagator  $\mathbb{D}_A^{-1}$  im äußeren Feld (doppelt gezogene Linie). Dieser wird nach den Feldern entwickelt.

noch der Projektor  $\frac{1 \pm \Gamma}{2}$  auf. Demnach enthält jeder Summand der Entwicklung entweder eine gerade oder eine ungerade Potenz von  $\Gamma$ . Die geraden Potenzen sind aber paritätserhaltend, sie können konsistent regularisiert werden, etwa nach dem Pauli-Villars-Verfahren. Die ungeraden Potenzen ergeben einen Pseudoskalar, also in  $D = 2n$  Dimensionen den  $\varepsilon$ -Tensor. Dieser muß mit den Impulsen  $k_\mu$  und Polarisationen  $A_\mu$  kontrahiert werden. Dazu formt man zuerst antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe,

$$k_\mu A_\nu - A_\mu k_\nu,$$

die den Vertices zugeordnet sind, der übrig bleibende Propagator ergibt sich noch aus der Impulserhaltung. Da der  $\varepsilon$ -Tensor über  $D$  Valenzen verfügt, kann man ihn mit den antisymmetrischen Tensoren von  $n = D/2$  Vertices paaren. Zusammen mit der Divergenz  $D_\mu \mathcal{J}^{\mu,a}$  erhalten wir somit ein  $(n + 1)$ -Eck als Graphen, speziell sind folglich in 4 Dimensionen die Dreieck-Graphen von Interesse. Die Anomalie hat also die Struktur

$$\text{const.} \left( \mathcal{S} \text{tr.} (T_+^{a_1} \dots T_+^{a_{n+1}}) - \mathcal{S} \text{tr.} (T_-^{a_1} \dots T_-^{a_{n+1}}) \right).$$

$T_\pm^{a_i}$  ist wie oben die Matrizendarstellung der Symmetriealgebra. Höhere Terme sind auch möglich, werden aber durch Konsistenzbedingungen bestimmt.

**Übung 2.3.** Wir betrachten das Standardmodell in 4 Dimensionen,  $G = SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Die Ladung der Fermionen ist gegeben durch  $Q = I_3 + Y$ . Für die links-chiralen Fermionen hat man die  $G$ -Darstellung<sup>4)</sup>  $(3, 2)_{\frac{1}{6}} \oplus (1, 2)_{-\frac{1}{2}}$  und für die rechts-chiralen  $(3, 1)_{\frac{2}{3}} \oplus (3, 1)_{-\frac{1}{3}} \oplus (1, 1)_{-1}$ .

Man zeige das Verschwinden der Anomalie (anomaly matching)

$$\mathcal{S} \text{tr.} \{ T_L^{a_1} T_L^{a_2} T_L^{a_3} - T_R^{a_1} T_R^{a_2} T_R^{a_3} \} = 0.$$

Bei Anwesenheit von Gravitation (als Krümmung des Raumes) hat man nicht nur die  $T$  Matrizen der zur  $G$ -Darstellung gehörenden Lie-Algebra  $Lie G$ , sondern man findet auch Terme, in denen einige  $T$  durch Krümmungstensoren ersetzt sind. Weil die Krümmung antisymmetrisch ist und die Spur über eine ungerade Anzahl von antisymmetrischen Matrizen verschwindet, tragen nur gerade Potenzen von  $R$  bei, wie man auch an der eingangs erwähnten Rezeptformel für die Anomalie erkennt (man beachte den Ausdruck für das  $\hat{A}$ -Geschlecht  $1 + \dots \text{tr.} \{ R^2 \} + \dots (\text{tr.} \{ R^2 \})^2 + \dots \text{tr.} \{ R^4 \}$ .) Weiterhin fallen noch Terme der Form  $T R R$  weg, denn die Spur über eine einzelne  $T$ -Matrix verschwindet. (Für Krümmungs- und Eichanteil wird getrennt die Spur berechnet.)

Wann verschwindet nun der Gruppentheoriefaktor? Sei zunächst  $D = 2n$  mit  $n = 2r + 1$  ungerade. Dann wird die Anomalie durch Terme der Form  $\text{tr.} T^{2r+2}$  bestimmt, diese können wegen der Hermitizität der  $T$ -Matrizen nicht verschwinden, also sind rein chirale Theorien ohne Eichanomalien nicht möglich, d.h. Beiträge mit positiver und negativer Chiralität müssen sich kompensieren.

Für  $D = 2n = 4r$  Dimensionen kann man für den Fall, daß wesentlich reelle Darstellungen existieren, folgenden Satz benutzen.

<sup>4)</sup>In der Notation der Darstellungen,  $(a, b)_c$ , bezeichnet  $a$  die Dimension der  $SU(3)$ -Darstellung,  $b$  die Dimension der Darstellung der Isospingruppe  $SU(2)$  und  $c$  die Hyperladung  $Y$ .  $(1, 2)_{\frac{1}{6}}$  steht also für ein  $SU(3)$ -Singulett,  $SU(2)$ -Doublett mit den Ladungen  $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$  und  $-\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = -1$ . Letzteres steht für das (links-chirale) Elektron  $e_L^-$ , ersteres für das Elektron-Neutrino  $\nu_e$ . Man beachte, daß bisher kein rechtshändiges Neutrino beobachtet wurde, weshalb wir dort eine Darstellung  $(1, 1)_{-1}$  vorliegen haben.

**Übung 2.4.** Man beweise den folgenden Sachverhalt:

Sei eine irreduzible, unitäre Darstellung  $T$  gegeben mit

$$T^\dagger = -T, T^* = STS^{-1}.$$

Dann kann  $S$  so gewählt werden, daß entweder  $S = {}^tS$  (reeller Fall) oder  $S = -{}^tS$  (pseudoreeller Fall), auf jeden Fall jedoch  ${}^tT = -STS^{-1}$  gilt.

Für solche Darstellungen gilt dann aufgrund der Zyklizität der Spur

$$\text{tr}.T^{2r+1} = \text{tr}.\{S^{-1}TS \cdots S^{-1}TS\} = (-)^{2r+1} \text{tr}.{}^tT^{2r+1} = (-)^{2r+1} \text{tr}.T^{2r+1} = 0.$$

Also besteht in  $D = 4r$  Dimensionen die Chance, Anomaliefreiheit ohne sorgfältige Abstimmung der Chiralitätsbeiträge zu erlangen. Für  $SO(2n+1)$ ,  $Sp(n)$ ,  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_7$  und  $E_8$  sind die definierenden Darstellungen und die Spinordarstellung (mit  $\bar{\Gamma}$  als  $\Gamma^{2n+1}$ ) eindeutig, alle Darstellungen sind vom pseudoreellen Typ. Diese Gruppen bezeichnet man daher als *safe groups*. Für  $SO(4k)$  haben wir  $\mathcal{C}^2 = -1$  (die Ladungskonjugation, siehe nächstes Kapitel) gegeben, also liegt auch hier der pseudoreelle Fall vor. Es bleiben als gefährdet  $SO(4n+2)$ ,  $E_6$  und  $SU(n)$  für  $n > 2$ . Zum Beispiel ist bekannt, daß chirale Supergravitation mit  $N = 2$  Supersymmetrie in 10 Dimensionen frei von Anomalien ist, [2]. Gleiches gilt für  $N = 1$  Super-Yang-Mills-Theorien mit Eichgruppe  $E_8 \times E_8$  oder  $SO(32)$  und  $N = 1$  Supergravitation, [8]. In beiden Fällen muß man 6-Eck-Graphen betrachten, zu erwarten sind reine Gravitationsanomalien in Anteilen der Form  $R^6$ , reine Eichanomalie in  $T^6$  sowie gemischte Anomalien in  $T^4R^2$  und  $T^2R^4$ . Die Kompensation ist daher äußerst delikate und nicht trivial.

Wir haben gesehen, daß man für das Verschwinden von Eichanomalien in geraden Dimensionen die verschiedene Koppelung von rechts- und links-chiralen Fermionen benötigt. Man muß sich daher fragen, ob sich Eigenvektoren zum Chiralitätsoperator finden lassen. Diese heißen Weyl-Spinoren. Findet man sogenannte Majorana-Spinoren, das heißt lassen sich die Spinoren reell wählen, so ergibt sich im Anomalie-Ausdruck ein zusätzlicher Faktor  $1/2$ . Trägt nun die Anomalie zu den Übergangsamplituden von gewissen Zerfallsprozessen bei, so kann man daher prinzipiell entscheiden, welcher Darstellungstyp für die betrachteten Teilchen zu wählen ist. Im folgenden wollen wir daher etwas ausführlicher untersuchen, für welche Clifford-Algebren man welche Darstellungen finden kann. Eine ähnliche Abhandlung findet man in [7].

### 2.3 Spinoren in geraden Dimensionen

Wir betrachten die Clifford-Algebra zu einem (flachen) Raum, der eine Metrik  $g$  der Signatur  $(n, m)$  trägt. Bei der Konstruktion des Dirac-Operators muß die Strukturgruppe des Spinorbündels die Überlagerung der Strukturgruppe des Tangentialbündels sein, daher sind Metrik und relevante Clifford-Algebra miteinander verknüpft.  $C(n, m)$ , die Clifford-Algebra, entsteht dann durch Faktorisierung der von den  $n + m$  Elementen  $\{\gamma^i\}$  frei erzeugten Algebra nach dem Ideal, das von

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = g^{ij}\mathbb{1}$$

generiert wird.

Weyl- beziehungsweise Majorana-Spinoren sind nun Eigenvektoren zu Chiralität und Ladungskonjugation. Seien

$$\gamma^0, \dots, \gamma^{D-1}$$

die  $\gamma$ -Matrizen (über einer  $D$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit) und

$$\bar{\Gamma} = \alpha \gamma^0 \cdots \gamma^{D-1}$$

die Verallgemeinerung der  $\Gamma$ -Matrix (mit  $\bar{\Gamma}^2 = \mathbb{1}$ ), der Chiralitätsoperator. Die Clifford-Algebren zu geraddimensionalen Räumen lassen sich nun durch das Tensorprodukt mit  $C(2, 0)$ ,  $C(0, 2)$  beziehungsweise  $C(1, 1)$  erzeugen.

**Übung 2.5.** Man konstruiere durch Angabe von Basen die folgenden Isomorphismen

$$\begin{aligned} C(m, n) \otimes C(2, 0) &\cong C(n+2, m) \\ C(m, n) \otimes C(0, 2) &\cong C(n, m+2) \\ C(m, n) \otimes C(1, 1) &\cong C(n+1, m+1). \end{aligned}$$

Es reicht daher aus, wenn man sich zunächst die Verhältnisse für die in der Übung untersuchten drei Fälle klar macht. Die komplexe Konjugation der  $\gamma$ -Matrizen ergibt eine neue Darstellung, jedoch findet man ein  $\mathcal{B}$  mit

$$(\gamma^i)^* = \mathcal{B}\gamma^i\mathcal{B}^{-1},$$

da alle Clifford-Darstellungen äquivalent sind. Weiterhin sei  $\mathcal{C}$  die Ladungskonjugation, definiert über

$$\mathcal{C}\psi := \mathcal{B}\psi^*.$$

Man beachte, daß auf den Spinoren  $\psi^*$  die komplex konjugierte Darstellung,  $(\gamma^i)^*$ , operiert. Die folgende Tabelle stellt die Verhältnisse in Clifford-Algebren über 2-dimensionalen Räumen dar.

	$\gamma^0, \gamma^1$	$\gamma^0\gamma^1$	$\bar{\Gamma}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}^2$	$[\mathcal{C}, \bar{\Gamma}]_{\pm} = 0^5$	$(\mathcal{C}\bar{\Gamma})^2$
$C(2, 0)$	$\sigma^1, \sigma^3$	$-i\sigma^2$	$\sigma^2$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	+	$-\mathbb{1}$
$C(1, 1)$	$\sigma^1, i\sigma^2$	$-\sigma^3$	$-\sigma^3$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	-	$\mathbb{1}$
$C(0, 2)$	$i\sigma^1, i\sigma^3$	$i\sigma^2$	$\sigma^2$	$\sigma^2$	$-\mathbb{1}$	+	$-\mathbb{1}$

Zwar sind  $C(2, 0)$  und  $C(1, 1)$  isomorph, denn beide werden von reellen  $2 \times 2$ -Matrizen erzeugt, aber  $\mathcal{C}$  und  $\bar{\Gamma}$  stimmen nicht überein. Wie man sieht, kann es zu  $C(0, 2)$  keine (reellen) Majorana-Spinoren geben, da  $\mathcal{C}^2 = -1$  gilt und damit Eigenwerte komplex sein müssen. Weiterhin kann es nur dann sowohl Majorana- als auch Weyl-Spinoren geben, wenn  $\mathcal{C}$  und  $\bar{\Gamma}$  kommutieren. Dies ist nur bei  $C(1, 1)$  der Fall.

Mit den obigen Isomorphismen erhält man nun eine *mod 8*-Struktur in der Dimension:

$$C(2, 0)_{A,+} \xrightarrow{\otimes C(0,2)} C(0, 4)_{K,-} \xrightarrow{\otimes C(2,0)} C(6, 0)_{A,-} \xrightarrow{\otimes C(0,2)} C(0, 8)_{K,+} \xrightarrow{\otimes C(2,0)} C(10, 0)_{A,+}, \dots$$

und

$$C(0, 2)_{A,-} \xrightarrow{\otimes C(2,0)} C(4, 0)_{K,-} \xrightarrow{\otimes C(0,2)} C(0, 6)_{A,+} \xrightarrow{\otimes C(2,0)} C(8, 0)_{K,+} \xrightarrow{\otimes C(0,2)} C(0, 10)_{A,-}, \dots$$

Dabei bedeuten die Indices „ $A,+$ “ daß einerseits der Kommutator  $[\mathcal{C}, \bar{\Gamma}]_+ = 0$  verschwindet, andererseits das Quadrat der Ladungskonjugation gleich  $+1$  ist, analog für „ $K,-$ “ usw. Majorana- und Weyl-Spinoren findet man hier daher nur auf Räumen mit der Signatur  $(D, 0)$  und  $(0, D+2)$  mit  $D = 0 \pmod 8$ . Nutzt man noch die verbleibende Isomorphie, so erhält man auf gleiche Weise als günstige Signatur  $(1, D-1)$  mit  $D = 2 \pmod 8$ .

<sup>5)</sup>Ein + soll bedeuten, daß der Antikommutator verschwindet.

### 3 Indextheorem

#### 3.1 Definitionen

Wir betrachten zunächst zwei endlichdimensionale Vektorräume  $V$  und  $W$  der Dimensionen  $m$  und  $n$ . Sei  $D : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Weiter sei  $\ker D$  die Menge der Elemente aus  $V$ , die durch  $D$  auf  $0 \in W$  abgebildet werden, und  $\operatorname{im} D$  das Bild von  $V$  unter  $D$  in  $W$ . Wegen der Linearität der Abbildung gilt

$$\dim V = m = \dim \ker D + \dim \operatorname{im} D, \text{ und } \dim W = n = \dim \operatorname{koker} D + \dim \operatorname{im} D.$$

$\operatorname{koker} D$  ist dabei das Komplement von  $\operatorname{im} D$  in  $W$ . Wie man leicht sieht, ist der Index des Operators  $D$ , definiert durch

$$\operatorname{index} D := \dim \ker D - \dim \operatorname{koker} D,$$

unabhängig von  $D$  selbst, es gilt nämlich nach den obigen Formeln

$$\dim \ker D - \dim \operatorname{koker} D = m - \dim \operatorname{im} D - n + \dim \operatorname{im} D = m - n.$$

Konkret verschwindet also der Index, wenn Ausgangs- und Zielraum übereinstimmen.

Wenden wir uns nun Operatoren auf einem (unendlichdimensionalen) Hilbert-Raum zu. Hier verschwindet der Index nicht ohne weiteres, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen werden.

BEISPIEL. Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum mit Basis  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Sei  $D$  ein linearer Operator, definiert durch

$$D : e_i \mapsto e_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dann ist der Kern von  $D$  leer, während der Kokern von  $e_1$  aufgespannt wird. Der Index von  $D$  ist damit gleich  $-1$ . Sei  $D' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator mit

$$D' : \begin{array}{l} e_i \mapsto e_{i-1} \quad \forall i > 1, i \in \mathbb{N} \\ e_1 \mapsto 0 \end{array}.$$

Hier ist  $\operatorname{koker} D' = \emptyset$  und  $\ker D' = \operatorname{span}\{e_1\}$ . Also ergibt sich  $\operatorname{index} D' = 1$ .

Der Index eines Operators läßt sich nur für spezielle Fälle, die sogenannten Fredholm-Operatoren, sinnvoll definieren.

**Definition 3.1.** Sei  $D : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ein linearer Operator zwischen zwei Hilbert-Räumen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  und  $D^+$  der zu  $D$  adjungierte.  $D$  heißt Fredholm-Operator, wenn gilt

$$\dim \ker D < \infty \text{ und } \dim \operatorname{koker} D = \dim (\operatorname{im} D)^\perp = \dim \ker D^+ < \infty.$$

Für Fredholm-Operatoren kann man nun die Definition des Index übernehmen.

**Definition 3.2.** Sei  $D : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ein Fredholm-Operator zwischen zwei Hilbert-Räumen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  und  $D^+$  der zu  $D$  adjungierte. Der Index von  $D$  ist definiert durch

$$\operatorname{index} D := \dim \ker D - \dim \ker D^+.$$

BEMERKUNG. Für selbstadjungierte Operatoren verschwindet der Index offensichtlich.

Es gilt

**Satz 3.3.** Der Index eines Operators ändert sich nicht bei stetiger Deformation innerhalb der Menge der Fredholm-Operatoren.

BEMERKUNG. Es zeigt sich sogar, daß zwei Fredholm-Operatoren mit gleichem Index immer durch eine stetige Kurve verbunden werden können.

**Definition 3.4.** Ein Differentialoperator auf  $\mathbb{R}^D$  der Ordnung  $m$  mit kompakten Träger ist von der Form

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

wobei  $a_\alpha(x)$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^D$  mit kompaktem Träger und  $\alpha$  ein Multiindex,  $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_i$  ist. Es wurden die Abkürzungen  $\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i}$ ,  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_i$  verwendet. Das Symbol dieses Operators ist dann

$$\sigma_D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Als Hauptsymbol bezeichnet man den Anteil mit dem höchsten Grad in  $\xi$ ,

$$\sigma_{DL} = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Man sagt,  $D$  ist elliptisch, wenn das Hauptsymbol von  $D$  invertierbar ist für  $\xi \neq 0$ .

BEISPIEL. In 2 Dimensionen ist das Symbol des Laplace-Operators

$$\sigma_\Delta = \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

was gleichzeitig auch das Hauptsymbol darstellt. Hier gilt

$$\sigma_{\Delta L} = \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2 = 0.$$

Damit ist  $\sigma_{\Delta L}$  invertierbar und  $\Delta$  elliptisch. Dies bleibt natürlich auch in beliebigen Dimensionen gültig. Der Wellenoperator  $\square$  hat in 2 Dimensionen das (Haupt-)Symbol

$$\sigma_\square = \xi_1^2 - \xi_2^2.$$

Der Kern von  $\sigma_{\square L}$  besteht aus allen Punkten  $\xi_1 = \pm \xi_2$ . Also ist  $\square$  nicht elliptisch.

Der folgende Satz stellt klar, warum elliptische Operatoren im Rahmen dieser Vorlesung interessant sind.

**Satz 3.5.** Elliptische Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten sind Fredholm-Operatoren.

Das Symbol eines Differentialoperators ergibt sich aus der Fourier-Transformation, indem man die Differentiation unter das Integralzeichen zieht,

$$Df = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha \int d\xi \hat{F}(x) = i^m \int d\xi e^{i\xi p} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi).$$

Dieses Konzept kann man nun verallgemeinern, wenn man beliebige reelle Potenzen der  $\xi$  zulässt. Das geeignete Werkzeug sind die Sobolev-Räume:

**Definition 3.6 [Sobolev-Räume].** <sup>6)</sup> Für  $s \in [0, \infty[$  sei

$$H^s := \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_s := \left( \int (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Für  $s \in ]-\infty, 0[$  sei  $H^s$  die vollständige Hülle von  $L_2(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_s$ .  $H^s$  heißt Sobolev-Raum zum Exponenten  $s \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>6)</sup>Zitiert aus [13].

BEMERKUNG. Es gibt noch eine andere, äquivalente Definition der Sobolev-Räume für ganzzahlige  $s$ : Hier ist  $H^s$  (auch mit  $W_2^s$  bezeichnet) die Menge aller  $L_2$ -Funktionen, deren (verallgemeinerte) Ableitungen bis zur Ordnung  $s$  existieren. Man kann zeigen, daß beide Definitionen äquivalent sind. Eine ausführliche Darlegung des Sachverhalts findet man z.B. in [13].

**Satz 3.7.** Für  $s > s'$  gilt  $H^s \subset H^{s'}$ .

**Lemma 3.8.** Sei  $D$  die Dimension des Raumes  $\mathbb{R}^D$ , über dem die Sobolev-Funktionen definiert sind. Ist  $s > \frac{D}{2}$ , so folgt aus  $f \in H^s$  die Stetigkeit von  $f$ , d.h.  $[f]$  hat einen stetigen Repräsentanten.

Ein Pseudodifferentialoperator ( $\Psi$ DO) der Ordnung  $m$  ist also eine Abbildung  $H^s \rightarrow H^{s-m}$ . Insbesondere sind also die gewöhnlichen Ableitungen

$$\partial_i : C^1(\mathbb{R}^D) \cap H^s \ni f \mapsto \partial_i f \in H^{s-1}.$$

Aus dem vorangegangenen Lemma ergibt sich also die Folgerung, daß Funktionen  $f$ , die in  $H^s$  für alle  $s$  liegen, unendlich oft differenzierbar sind,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^D)$ .

Der Nutzen des  $\Psi$ DO-Kalküls liegt in der Anwendung auf (partielle) Differentialgleichungen. Durch Fourier-Transformation einer Differentialgleichung erhält man eine algebraische Gleichung, wobei das Produkt von Funktionen (das sind die *Symbole* der Operatoren) wie im vorherigen Abschnitt erklärt ist,

$$\sigma_{AB} = \sigma_A * \sigma_B(x, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \frac{\partial_\xi^\alpha \sigma_A(x, \xi) \partial_x^\alpha \sigma_B(x, \xi)}{\alpha!}.$$

Sucht man das Inverse zu einem (Pseudo-)Differentialoperator  $D$  der Ordnung  $m$ , so interessiert man sich für die Lösung der Gleichung

$$\sigma_D * a = \mathbb{1}. \quad (2)$$

Dabei ist das Hauptsymbol von  $D$  asymptotisch von der Form  $\xi^m$ , das gesuchte Symbol  $a$  muß also von der Ordnung  $-m$  sein. Ist  $D$  elliptisch, so läßt sich sein führendes Symbol invertieren (wie oben bereits ausgeführt, ist dies geradezu die Definition von Elliptizität, zum Beispiel ist der Laplace-Operator  $\Delta$  elliptisch). Mit dem Ansatz

$$a = a_{-m} + a_{-m-1} + \dots$$

kann man nun die Gleichung 2 Ordnung für Ordnung invertieren; es bleibt am Ende nur eine Symbol der Ordnung  $-\infty$ , der Operator  $\sigma_D * a - \mathbb{1}$  bildet also  $H^s$  auf  $H^{s-t}$  ab für alle  $t$ , das Bild unter  $\sigma_D * a - \mathbb{1}$  ist damit nach den obigen Betrachtungen glatt.

Für alle elliptischen Operatoren  $D$  existieren damit  $D'$ ,  $D''$ , so daß  $DD' = \mathbb{1} + S$ ,  $D''D = \mathbb{1} + T$  für Glättungsoperatoren  $S, T : H^s \rightarrow C^\infty$  gilt. Eine Funktion  $f$  aus dem Kern von  $D$  ist damit insbesondere glatt, der Kern  $\ker D$  von  $D$  ist der Eigenraum von  $T$  zum Eigenwert  $-1$ . Ist der Glättungsoperator  $T$  in der Spurklasse und also kompakt, so ist sein Spektrum diskret und, abgesehen von 0, auch nur von endlicher Vielfachheit.

## 3.2 Das Indextheorem

Wenden wir uns nun der Verallgemeinerung des Kalküls auf beliebige Mannigfaltigkeiten zu. Hauptgegenstand dieser Vorlesung sollen (speziell-)relativistische Fermionen im äußeren (Yang-Mills-)Feld sein. Der Dirac-Operator  $\mathcal{D}_A$  ist dann eine Abbildung

$$\mathcal{D}_A : \Gamma(\Delta(\mathcal{M}) \otimes V(\mathcal{M})) \rightarrow \Gamma(\Delta(\mathcal{M}) \otimes V(\mathcal{M}))$$

mit Index 0, was aus der Selbstadjungiertheit folgt. Bei Einschränkung auf eine Chiralitätssorte erhält man jedoch eine Abbildung zwischen verschiedenen Vektorbündeln,

$$\mathcal{D}_A : \Gamma(\Delta_+(\mathcal{M}) \otimes V(\mathcal{M})) \rightarrow \Gamma(\Delta_-(\mathcal{M}) \otimes V(\mathcal{M})).$$

Allgemein sind also eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  euklidischer Signatur sowie komplexe Vektorbündel  $E, F \rightarrow \mathcal{M}$  vorgelegt. Ist ein Operator Abbildung zwischen zwei Bündeln, so ist das Symbol eine Abbildung zwischen den mit der natürlichen Projektion des Tangentialbündels  $T\mathcal{M}$  zurückgezogenen Bündeln. Verfügt die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  über keinen Rand, so ergibt sich der Index von  $D$  aus

$$\begin{aligned} \text{index } D &= (-)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\text{ch}E - \text{ch}F}{e(T\mathcal{M})} \text{td}(T\mathcal{M} \otimes \mathbb{C})[\mathcal{M}]. \\ &=: \alpha[\mathcal{M}] \end{aligned} \quad (3)$$

Für berandete  $\mathcal{M}$ ,  $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$ , ergeben sich zusätzliche Summanden :

$$\text{index } D = \alpha[\mathcal{M}] + \beta[\partial\mathcal{M}] + \xi[\partial\mathcal{M}], \quad (4)$$

wobei  $\beta$  eine lokale  $d-1$ -Form auf dem Rand  $\partial\mathcal{M}$  bezeichnet und  $\xi$  ein nichtlokaler Ausdruck ist, der vom Spektrum des auf den Rand eingeschränkten Operators abhängt. Konkret hat  $\xi$  die Gestalt

$$\xi[\partial\mathcal{M}] = \frac{1}{2} (\eta[\partial\mathcal{M}] + h). \quad (5)$$

$h$  zählt hier die Nullmoden von  $D|_{\partial\mathcal{M}}$ , während man die  $d-1$ -Form  $\eta$  aus dem restlichen Spektrum gewinnt,

$$\eta[\partial\mathcal{M}] = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{\lambda \in \text{Spec } D} \text{sign}(\lambda) |\lambda|^{-s}. \quad (6)$$

Dies kann man mit Hilfe der Wärmeleitungsmethode, englisch *heat kernel method*, motivieren.

### 3.3 Die Wärmeleitungsmethode

Zu einem gegebenen elliptischen Differentialoperator  $\Delta$  zweiter Ordnung über einer kompakten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  betrachtet man den Operator  $e^{-t\Delta}$ .  $\Delta$  habe dabei ein positives, skalares Hauptsymbol  $L_2(x, \xi)$ .  $e^{-t\Delta}$  definiert man über das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u, \quad u(0) = f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}). \quad (7)$$

Durch formale Manipulation überzeugt man sich nämlich, daß

$$u(x, t) = e^{-t\Delta} f(x)$$

eine Lösung darstellt. Wir haben damit aber noch nicht geprüft, ob  $e^{-t\Delta}$  als Operator definiert ist. Eine Rechtfertigung erfährt der Formalismus im Rahmen des Symbolkalküls von Pseudodifferentialoperatoren, siehe zum Beispiel Hörmanders Standardwerk [9] oder, für die hier skizzierte Methode, Taylors Buch [15], speziell die Abschnitte 7.13 und 8.3. Man sucht zunächst Lösungen von (7) der Form

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} a(t, x, \xi) e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (8)$$

wobei  $\hat{f}$  die Fourier-Transformierte von  $f$  bezeichnet. Für  $a(t, x, \xi)$  wählt man nun als Ansatz die asymptotische Reihenentwicklung<sup>7)</sup>

$$a(t, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} a_j(t, x, \xi). \quad (9)$$

<sup>7)</sup> hat dabei die folgende Bedeutung. Teilt man die glatten Funktionen  $f(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^d \times \mathbb{R}^d)$  bezüglich ihres Abfallverhaltens der  $\xi$ -Variable in Klassen  $S^m$  ein,

$$S^m = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^d \times \mathbb{R}^d) \mid |D_x^\beta D_\xi^\alpha f(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + \|\xi\|^2)^{(m-|\alpha|)/2}\},$$

Die eingangs betrachtete partielle Differentialgleichung (7) liefert nun für die Funktionen  $a_j$  die sogenannten Transportgleichungen, lineare Differentialgleichungen in  $t$  mit Parametern  $x$  und  $\xi$ :

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} = -L_2(x, \xi)a_0(t, x, \xi) \quad (10)$$

und für  $j \geq 1$

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} = -L_2(x, \xi)a_j(t, x, \xi) - \sum_{l=1}^2 B_{2-l}(x, \xi, D_x)a_{j-l}(t, x, \xi). \quad (11)$$

Dabei sind die Funktion  $L_2(x, \xi)$  und die Differentialoperatoren  $B_j(x, \xi, D_x)$  mit der Leibniz-Regel durch Anwendung von  $L$  auf  $a(t, x, \xi)e^{ix\xi}$  erklärt:

$$L(a(t, x, \xi)e^{ix\xi}) = e^{ix\xi} \left[ L_2(x, \xi)a(t, x, \xi) + \sum_{l=1}^2 B_{2-l}(x, \xi, D_x)a(t, x, \xi) \right].$$

$L_2$ , das führende Symbol, entsteht demnach aus  $L(e^{ix\xi})a(t, x, \xi)$ .

Wir finden also die  $a_j$  durch rekursive Integration. Rückblickend auf (8) setzen wir noch  $a_0(0, x, \xi) = 1$ ,  $a_j(0, x, \xi) = 0$  für  $j \geq 1$  als Anfangsbedingungen. Damit ist

$$u(0, x) = \int e^{ix\xi} \hat{f}(x) d\xi = \hat{f}(x) = f(x).$$

Für die so gewonnenen  $a_j$ ,

$$\begin{aligned} a_0(t, x, \xi) &= e^{-tL_2(x, \xi)} \\ a_j(t, x, \xi) &= - \int_0^t e^{(s-t)L_2(x, \xi)} \sum_{l=1}^2 B_{2-l}(x, \xi, D_x)a_{j-l}(t, x, \xi) ds \end{aligned} \quad (12)$$

findet man nun tatsächlich

$$a_j(t, x, \xi) \in S^{-j},$$

so daß der Reihenansatz (9) gerechtfertigt wird.

Wenden wir uns nun wieder dem gesuchten Operator  $e^{-t\Delta}$  zu. Die Gleichung (8) ist noch nicht dessen Integraldarstellung, denn unter dem Integral steht die Fourier-Transformierte von  $f$ . Setzt man für diese den bekannten Ausdruck

$$\hat{f}(\xi) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} f(y) dy$$

(die 1 in  $1 + \|\xi\|^2$  verhindert, daß  $f$  im Ursprung verschwinden muß;  $|\alpha|$  ist die Summe der Komponenten des Multiindexes  $\alpha$ ) so erhält man eine Gradierung auf der Algebra der glatten Funktionen über  $\mathcal{M}^d \times \mathbb{R}^d$ . Asymptotische Entwicklung

$$f(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} f_{m-j}(x, \xi)$$

heißt nun, daß die Differenz von  $f$  und der Summe der  $f_{m-j}$  bis zu einem endlichen Grad im nächsttieferen Grad liegt.

$$f(x, \xi) - \sum_{j=0}^N f_{m_j}(x, \xi) \in S^{m-N} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Man verschiebt damit Konvergenzfragen, indem man die verschiedenen Grade  $S^n$  voneinander trennt und also nicht addieren muß. *Innerhalb* einen Grades muß man jedoch sehr wohl Konvergenz untersuchen, sofern man eine unendliche Summe gleichgradiger Funktionen vor sich hat. Ausführliches findet man unter dem Stichwort *formale Potenzreihen* in [12], nur ist hier der Index der Grade kontinuierlich.



ein, so ergibt sich der Integrkern des Operators  $(f, t) \mapsto u(t, \cdot)$ , als  $\mathcal{Q} = \sum_{j \geq 0} \mathcal{Q}_j$  mit

$$\mathcal{Q}_j(t, x, y) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} a_j(t, x, \xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi. \quad (13)$$

$\mathcal{Q}_j(t, x, y)$  ist hierbei im distributiven Sinne<sup>8)</sup> zu verstehen. Es ergibt sich nun, daß der Integrkern des Operators  $e^{-t\Delta}$ ,  $\mathcal{H}(t, x, y) (= \langle y | e^{t\Delta} | y \rangle$  in der Bra-Ket-Schreibweise), tatsächlich die asymptotische Reihenentwicklung

$$\mathcal{H}(t, x, y) \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{Q}_j(t, x, y)$$

besitzt und man in den  $\mathcal{Q}_j(t, x, y)$  noch ein polynomiales Verhalten in  $t$  abspalten kann, wie wir unten sehen werden. Die Spur von  $e^{t\Delta}$  ist nun das Integral von  $\mathcal{H}(t, x, y)$  entlang der Diagonale  $x = y$ . Folglich erhält man aus der asymptotischen Entwicklung

$$\text{tr. } e^{-t\Delta} \sim t^{-d/2} (\mu_{-d/2} + \mu_{-d/2+1}t + \mu_{-d/2+2}t^2 + \dots) \quad (14)$$

Die Koeffizienten erhält man dabei aus den  $\mathcal{Q}_j(t, x, y)$  und also aus dem Symbol des Operators  $\Delta$ . Sie lassen sich explizit berechnen, allerdings nur unter großem Aufwand.

Doch zurück zum Dirac-Operator, der ja Gegenstand unserer Betrachtung ist. Durch Einschränkung auf Weyl-Spinoren erhalten wir einen Operator

$$D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$$

sowie den dazu adjungierten

$$D^+ : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E).$$

Demnach hat man zwei elliptische Differentialoperatoren mit skalarem, positivem Hauptsymbol,

$$\Delta_E := D^+ D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \text{ und } \Delta_F := D D^+ : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$$

zur Hand. Es gilt

**Lemma 3.9.**  $\Delta_E$  und  $\Delta_F$  haben gleiches Spektrum, sogar bis auf Nullmoden gleiche Multiplizitäten.

Ist nämlich  $\psi_\lambda \in \Gamma(E)$  Eigenvektor zu  $\Delta_E$ ,

$$\Delta_E \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda,$$

so gilt

$$\lambda D \psi_\lambda = D \Delta_E \psi_\lambda = D D^+ D \psi_\lambda = \Delta_F D \psi_\lambda.$$

Im Fall, daß  $D \psi_\lambda \neq 0$  und also  $\psi_\lambda$  keine Nullmode darstellt, ist demnach  $D \psi_\lambda$  Eigenvektor von  $\Delta_F$  zum selben Eigenwert. Wir erhalten damit für die Integrkerne  $h_{E,F}(t)$  von  $e^{-t\Delta_{E,F}}$ :

$$\begin{aligned} \text{tr. } h_E(t) - \text{tr. } h_F(t) &= \sum_{\lambda_E} e^{-\lambda_E t} - \sum_{\lambda_F} e^{-\lambda_F t} \\ &= \text{Anzahl der Nullmoden von } \Delta_E - \text{Anzahl der Nullmoden von } \Delta_F \end{aligned} \quad (15)$$

---

<sup>8)</sup>Der Ausdruck

$$\mathcal{Q}_j(t, x, D) f(x) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_j(t, x, y) f(y) dy$$

soll nicht nur für  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$  existieren, sondern auch stetiger Operator auf  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  sein.  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  hat aber einen Konvergenzbegriff, der aus einem System von Halbnormen, den minimalen Schranken aller Ableitungen sowie aller Produkte von Ableitungen mit Polynomen beliebiger Potenz, herrührt. Eine Folge  $\{f_n\}$  in  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  ist deshalb genau dann Cauchy-Folge, wenn alle diese Halbnormen im Limes verschwinden. Es reicht deshalb, die Konvergenz von  $\mathcal{Q}_j(t, x, F) f_n(x)$  zu zeigen, wenn irgendeine dieser Halbnormen für  $\{f_n\}$  beliebig klein wird. Man wählt sich dazu eine angenehme Kombination von Ableitungen von  $f_n$  und Potenzen  $y^\alpha$  in Abhängigkeit von der konkreten Gestalt von  $\mathcal{Q}_j(t, x, y)$ .

Der letzte Ausdruck ist aber wegen

$$0 = \langle D^+ D\psi, \psi \rangle = \langle D\psi, D\psi \rangle \leftrightarrow D\psi = 0$$

gleich dem Index des Operators  $D$ . Da der Index eines Operators (eine ganze Zahl) sich bei stetiger Deformation nicht ändert, kann auf der linken Seite von (15) nur der in  $t$  konstante Summand der asymptotischen Reihenentwicklung beitragen,

$$\text{index } D = \int_{\mathcal{M}} (\mu_E^0 - \mu_F^0) dx \quad (16)$$

Bei Variation der Metrik (und damit des Levi-Civita-Zusammenhangs) oder eines eventuell vorhandenen Hintergrundfeldes (Yang-Mills-Zusammenhangs) kann sich demzufolge die Differenz  $\mu_E^0 - \mu_F^0$  nur um eine exakte Form  $d\alpha$  ändern. Nun wollen wir die Verbindung des bisher Gesagten mit axialen Anomalien darstellen.

### 3.4 $\zeta$ -Funktions-Regularisierung

Wir betrachten Eichfeldtheorien mit einer Lagrange-Dichte

$$\bar{\psi}(\mathcal{D} + A)\psi.$$

$A := \gamma^\mu A_\mu$  stellt dabei den Quellterm für den axialen Strom  $j_\mu^5 = \bar{\psi}\Gamma^\mu\bar{\Gamma}\psi$  dar. Für obige Lagrange-Dichte ergibt sich das erzeugende Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int_{\mathcal{M}} \bar{\psi}(x)(\mathcal{D} + A^*)\psi(x)} \\ &= \det(\mathcal{D} + A), \end{aligned} \quad (17)$$

wobei die letzte (formale) Gleichheit aus den Integrationsregeln für Grassmann-Variablen gewonnen werden kann. Es gilt demnach

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = -\ln \det(\mathcal{D} + A) = -\sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathcal{D} + A)} \ln \lambda.$$

Dies ist ein divergenter Ausdruck, dem mit Hilfe der  $\zeta$ -Funktions-Regularisierung Sinn verliehen werden kann. Sei dazu  $\Delta$  ein elliptischer Operator auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand. Die  $\zeta$ -Funktion des Operators  $\Delta$  ist dann

$$\zeta_\Delta(s) := \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s}, \quad (18)$$

wobei  $n$  das Spektrum von  $\Delta$  numeriert. Diese Summe konvergiert nur für genügend großen Realteil von  $s$ , kann aber in die komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden. Man berechnet formal

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} \zeta_\Delta(0) &= -\sum_n \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{\lambda_n^s} \right|_{s=0} \\ &= -\sum_n \left. \frac{d}{ds} e^{-s \ln \lambda_n} \right|_{s=0} \\ &= \sum_n \ln \lambda_n = \ln \det \Delta. \end{aligned} \quad (19)$$

Die resultierende Gleichung,

$$\ln \det \Delta := -\left. \frac{d}{ds} \zeta_\Delta(s) \right|_{s=0} \quad (20)$$

fassen wir nun als Definition (über analytische Fortsetzung) der regularisierten Determinante auf. Für nicht selbstadjungierte, elliptische Operatoren  $D$  betrachtet man

$$\Delta = DD^*$$

und definiert

$$|\det D| := e^{-\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \zeta_{\Delta}(0)},$$

motiviert durch die im endlichdimensionalen gültige Beziehung

$$\det \Delta = \det DD^* = \det D \det D^* = |\det D|^2.$$

Der Zusammenhang zur Wärmeleitungskern-Methode ist nun folgendermaßen. Mit der Darstellung der  $\Gamma$ -Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t}$$

findet man für die Laplace-Transformierte von  $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^s}$  die Funktion  $F(t) = \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$ . In der Tat ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-\lambda t} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s) \lambda^s} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t} \\ &= \frac{1}{\lambda^s}. \end{aligned}$$

Also erhält man für die  $\zeta$ -Funktion zu  $\Delta$

$$\begin{aligned} \zeta_{\Delta}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \sum_n e^{-\lambda_n t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \int_{\mathcal{M}} d\mu(x) h(t, x, x). \end{aligned}$$

Man beachte, daß die so definierte (regularisierte) Determinante kein lokaler Ausdruck, das heißt kein Polynom in den Feldern ist. Wir sind aber nur an Variationen der Felder interessiert, diese bewirken eine Deformation des Spektrums von  $\Delta$ ,

$$\lambda_n \mapsto \lambda_n + \delta\lambda_n,$$

und damit

$$\zeta_{\Delta+\delta\Delta}(s) = \sum_n \frac{1}{(\lambda_n + \delta\lambda_n)^s} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s} - s \sum_n \frac{1}{\lambda_n^{s+1}} \delta\lambda_n + \dots$$

Wir erhalten demnach die infinitesimale Variation der Determinante

$$\delta \det \Delta = -\delta \left. \frac{d}{ds} \zeta_{\Delta}(s) \right|_{s=0} = \frac{d}{ds} s \sum_n \frac{1}{\lambda_n^{s+1}} \delta\lambda_n \Big|_{s=0} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^{s+1}} \delta\lambda_n \Big|_{s=0}.$$

In einigen Fällen ist die konkrete Gestalt der  $\delta\lambda_n$  bekannt:

BEISPIEL. *Dilatation*. Sei  $\delta\alpha$  die Änderung des Skalenparameters, dann ist

$$\delta\lambda_n = \delta\alpha \lambda_n$$

und damit

$$\delta_{Dil} \mathcal{S}_{eff} \sim \delta\alpha \lim_{s \rightarrow 0} \sum_n \lambda_n^{-s} = \delta\alpha \zeta(0) = \int_{\mathcal{M}} \mu_0(x) dx \delta\alpha.$$

Chirale Anomalie. Der chirale Strom ist

$$\begin{aligned}
 \langle j^i(x) \rangle &= \frac{\delta}{\delta C} \ln \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\bar{\psi}(\mathcal{D} + C^i \Gamma^i \bar{\Gamma})\psi} \Big|_{C=0} \\
 &= \frac{\delta}{\delta C} \ln \det(\mathcal{D} + C^i \Gamma^i \bar{\Gamma}) \Big|_{C=0} \\
 &= \frac{\delta}{\delta C} \ln \det\left(1 + \frac{1}{\mathcal{D}} C^i \Gamma^i \bar{\Gamma}\right) \Big|_{C=0} \\
 &= \text{tr.} \frac{1}{\mathcal{D}} C^i \Gamma^i \bar{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla_i j^i(x) \rangle &= \text{tr.} \frac{1}{\mathcal{D}} \nabla_i C^i \Gamma^i \bar{\Gamma} \\
 &= \text{tr.} \bar{\Gamma} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \text{tr.} \bar{\Gamma} e^{-t\mathcal{D}^2} \\
 &= \int_{\mathcal{M}} \mu_0(x) \bar{\Gamma} dx \\
 &= \text{index } \mathcal{D}.
 \end{aligned}$$

## 4 $G$ -Vektorbündel und charakteristische Klassen

Im folgenden sei eine Lie-Gruppe  $G$  die Strukturgruppe eines Prinzipalbündels  $P$  über einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Zu diesem Bündel<sup>9)</sup> existiert ein assoziiertes Vektorbündel  $E$ , auf dem  $G$  mit einer bestimmten Darstellung operiert. Man schreibt

$$E = (P \times V) / G =: P \times_{\rho} V,$$

wobei  $V$  ein Vektorraum und  $\rho : G \rightarrow \text{End}(V)$  die Darstellung von  $G$  ist. Umgekehrt kann man zu jedem assoziierten Vektorbündel das zugehörige Hauptfaserbündel rekonstruieren. Hat man eine (stetige, glatte) Abbildung  $f$  einer Mannigfaltigkeit  $N$  in die Mannigfaltigkeit  $M$  gegeben, so induziert  $f$  ein Vektorbündel  $f^*E$  über  $N$ , *pullback* des Vektorbündels  $E$  unter  $f$  genannt, indem man an jede Stelle  $n$  in  $N$  die Faser von  $E$  über dem Punkt  $f(n)$  in  $M$  angeheftet wird. Dies faßt man in einem kommutativen Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xleftarrow{f^*} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Es gilt der folgende

**Satz 4.1.** Sind zwei Abbildungen  $f : N \rightarrow M$  und  $g : N' \rightarrow M$  homotop, d.h. stetig ineinander deformierbar,  $f \sim g$ , so sind die zurückgezogenen Bündel  $f^*E$  und  $g^*E$  isomorph,  $f^*E \cong g^*E$ .

BEMERKUNG. Induktion und Assoziation von Bündeln kommutieren.

**Definition und Satz 4.2.** Es gibt zu jeder Lie-Gruppe  $G$  ein  $G$ -Prinzipalbündel  $\xi_G$  mit Totalraum  $P_G$ , Basisraum  $B_G$  und Projektion  $\pi_G$  mit folgenden Eigenschaften

- $P_G$  ist kontrahierbar.
- Jedes  $G$ -Prinzipalbündel  $\xi$  über einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist von der Form  $\xi = f^*\xi_G$  für eine Abbildung  $f : M \rightarrow B_G$ .
- $f^*E \cong g^*E \Leftrightarrow f \sim g$ .

Ein solches  $G$ -Bündel heißt universelles Bündel.

Anstatt eines allgemeinen Beweises<sup>10)</sup> soll an dieser Stelle gleich eine explizite Konstruktion für das universelle Bündel der Tangentialbündel über  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten angegeben werden. Dazu braucht man den Satz, daß sich jede Mannigfaltigkeit  $M$  in einen (genügend hochdimensionalen) flachen Raum  $\mathbb{R}^k$ ,  $k > \dim M$ , einbetten läßt.

BEISPIEL. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , eingebettet in  $\mathbb{R}^k$ . Dann ist der Tangentialraum  $T_m M$  an  $M$  in einem bestimmten Punkt  $M$  ein  $n$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{R}^k$ . Auf den Fasern des Tangentialbündels (d.h. in jedem Tangentialraum) wirkt die Gruppe  $O(n)$  (wenn eine Metrik vorliegt). Wir werden also das universelle  $O(n)$ -Bündel konstruieren.

Sei  $G(k, n)$ , die Menge aller  $n$ -dimensionalen Unter-(Vektor-)Räume des  $\mathbb{R}^k$ , der Basisraum. Über jedem Punkt  $p$  in  $G(k, n)$  sei die Faser ebendieser Punkt  $p$ , aufgefaßt als  $n$ -dimensionaler Vektorraum. Man erhält auf diese Weise ein Vektorbündel  $E(k, n)$  mit typischer Faser  $\mathbb{R}^n$ . Dieses Bündel heißt Tautologisches Bündel,  $G(k, n)$  Graßmann-Mannigfaltigkeit.

Sei nun eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M^l$  gegeben, die sich in  $\mathbb{R}^k$  einbetten läßt. Man erhält diese Mannigfaltigkeit mit ihrer Tangentialstruktur als pullback folgender Abbildung  $f$ :

$$f : M \ni m \mapsto T_m M \in G(k, n).$$

<sup>9)</sup>Zur Einführung in die Geometrie der Yang-Mills-Theorien sei [5] empfohlen. Das Standardwerk ist natürlich Kobayashi&Nomizu, [10].

<sup>10)</sup>Einen solchen findet man zum Beispiel in [4].

Die universellen Bündel sind sehr hilfreich bei der Klassifizierung aller Bündel mit einer Strukturgruppe. Um das zu verstehen, benötigen wir den Begriff der charakteristischen Klasse.

**Definition 4.3.** Gegeben sei ein Prinzipalbündel  $\xi$  mit Strukturgruppe  $G$ , Totalraum  $P_\xi$  und Basisraum  $B_\xi$ . Eine charakteristische Klasse ist eine Abbildung

$$\chi: \xi \mapsto \chi(\xi) \in H^*(B_\xi)$$

mit der Eigenschaft

$$\chi(f^*\xi) = f^*\chi(\xi)$$

für jede Abbildung  $f: B_\xi \rightarrow B'_\xi$ .  $H^*(B_\xi)$  ist in dieser Vorlesung eine bestimmte de Rham'sche Kohomologiegruppe, im allgemeinen sind aber auch andere Kohomologien zugelassen.

**BEMERKUNG.** Da sich jedes Bündel  $\xi$  als pullback des zugehörigen universellen Bündels  $\xi_G$  unter einer Abbildung  $f$  schreiben läßt,  $\xi = f^*\xi_G$ , werden alle charakteristischen Klassen  $\chi$  von den charakteristischen Klassen des universellen Bündels induziert,

$$\chi(\xi) = f^*\chi(\xi_G).$$

**Definition 4.4 [Chern-Klasse für komplexe Vektorbündel].** Sei  $E: V_E \xrightarrow{\pi_E} B_E$  ein komplexes Vektorbündel. Die Chern-Klasse von  $E$  ist definiert als

$$c(E) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E), \quad c_i(E) \in H^{2i}(B_E),$$

mit folgenden Eigenschaften:

c.i)  $c_0(E) = 1$ ,  $c_i(E) = 0$  für  $i > \text{rg } E$ .

c.ii) Für das komplexe Graßmann-Bündel  $E(1,2) \rightarrow G(1,2)$  gilt  $c_1 = *(1) = \text{Volumenform auf } S^2$ ,  $c_i = 0$  für alle höheren Terme.

c.iii)  $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$ .

Für komplexe Geradenbündel gilt der folgende

**Satz 4.5.** Seien  $E_1, E_2$  zwei komplexe Geradenbündel. Dann gilt

$$c_1(E_1 \otimes E_2) = c_1(E_1) + c_1(E_2).$$

**Folgerung 4.6.** Triviale Geradenbündel haben verschwindende erste Chern-Klasse.

Bezeichnet  $E^*$  das zu  $E$  duale Geradenbündel (d.h. ist  $E^* \otimes E$  trivial), so gilt

$$c_1(E) = -c_1(E^*).$$

Führt man nun noch für ein Geradenbündel  $E_i$  die Abkürzung

$$y_i := c_1(E_i)$$

ein, so ergibt sich die Chern-Klasse der direkten Summe  $\bigoplus_i E_i$  zu

$$c\left(\bigoplus_i E_i\right) = \prod_i (1 + y_i).$$

Man kann zeigen, daß die erste Chern-Klasse die komplexen Geradenbündel vollständig klassifiziert. Für allgemeine komplexe Vektorbündel lassen sich aus den  $y_i$  weitere Klassen zusammensetzen. Dazu benötigen wir jedoch folgende Aussage.

**Satz 4.7 [Spaltungsprinzip].** Von jedem komplexen Vektorbündel  $E$  läßt sich ein anderes Bündel induzieren, so daß

$$f^*E = \bigoplus_i E_i$$

für komplexe Geradenbündel  $E_i$  und außerdem die Abbildung  $f^*$  auf den Kohomologien injektiv ist. Nun definieren wir andere charakteristische Klassen auf spaltbaren Bündeln.

Todd-Klasse:

$$td(\bigoplus_i E_i) := \prod_i \frac{y_i}{1 - e^{-y_i}}.$$

Chern-Charakter:

$$ch(\bigoplus_i E_i) := \sum_i e^{y_i}.$$

Für das (komplexifizierte) Tangentialbündel  $TM \otimes \mathbb{C}$   $D$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten:

Die  $i$ -te Pontrjagin- Klasse:

$$p_i(TM \otimes \mathbb{C}) := (-1)^i c_{2i}(TM \otimes \mathbb{C}) := \prod_{j=1}^{D/2} (1 + x_j^2).$$

Die Euler-Zahl des Tangentialbündels:

$$e(TM) := \prod_{i=1}^{D/2} x_i.$$

$$ch(TM \otimes \mathbb{C}) := \sum_i (e^{x_i} + e^{-x_i})$$

Für den Vektorraum aller (un)geraden Formen über  $M$ ,  $\bigwedge^\pm$  erhält man

$$ch(\bigwedge^+ M - \bigwedge^- M) = \prod_i (e^{x_i} - e^{-x_i})$$

Weiterhin definiert man noch die Hirzebruchsche  $L$ -Klasse,

$$L(M) := \prod_i \frac{x_i}{\tanh x_i} = 1 + \frac{1}{2} p_1 + \dots,$$

und das A-Dach-Geschlecht:

$$\hat{A}(M) := \prod_i \frac{x_i}{\sinh x_i} = 1 - \frac{1}{24} p_1 + \dots$$

**BEMERKUNG.** Die Vektorbündel bilden eine Halbgruppe bezüglich der Operation  $\oplus$  (sogar eine Gruppe in der  $K$ -Theorie, wo man den Begriff des virtuellen Bündels einführt). Mit dem Tensorprodukt wird dies ein Ring,  $ch$  ist dann ein Ringhomomorphismus, denn es gilt

$$ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F) \text{ und } ch(E \otimes F) = ch(E) \wedge ch(F).$$

Sei nun ein komplexes Vektorbündel  $E$  über  $M$  gegeben. Wählt man einen Zusammenhang  $A$  in  $E$ , so läßt sich aus diesem die Krümmung  $F$  berechnen.  $F$  ist eine 2-Form über  $M$  mit Werten in  $\mathfrak{G}$ , der Lie-Algebra der Strukturgruppe  $G$ . Sei  $\rho : \mathfrak{G} \rightarrow \text{End}(E)$  die Darstellung der Lie-Algebra auf  $E$ . Dann ist  $P(X) := \text{tr} \rho(X)^N$ ,  $X \in \mathfrak{G}$ , eine Polynomfunktion  $P : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C}$ , die unter der adjungierten Wirkung von  $G$  auf  $\mathfrak{G}$  invariant ist (wegen der Zyklizität der Spur). Es gilt

**Satz 4.8.**  $\chi_P(E) := P(F)$  ist eine charakteristische Klasse, unabhängig vom gewählten Zusammenhang  $A$ .

BEWEIS. 1)  $\text{tr} \cdot F^N$  ist geschlossen, denn

$$d \text{tr} \cdot F^N = N \text{tr} \cdot (d_A F) F^{N-1} = 0.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt wegen der  $Ad$ -Invarianz der Spur, die die  $ad$ -Invarianz impliziert und deshalb die Ersetzung von  $d$  durch  $d_A = d + [A, \cdot]$  erlaubt, während die zweite Identität aus der Bianchi-Identität  $d_A F = 0$  folgt.

2) Ändert man die gewählte Zusammenhangs-1-Form  $A$  um  $\delta A$ , so ändert sich  $F$  um

$$\delta F = d\delta A + [A \wedge \delta A].$$

Damit verändert sich  $P(F)$  um

$$\delta \text{tr} \cdot F^N = N \text{tr} \cdot (\delta F) F^{N-1} = N \text{tr} \cdot (d_A \delta A) F^{N-1} = N d \text{tr} \cdot (\delta A) F^{N-1}.$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich wieder aus Bianchi-Identität für  $F$  und  $ad$ -Invarianz der Spur mit der obigen Argumentation. Es zeigt sich also, daß  $P(F)$  und  $P(F + \delta F)$  in derselben de Rham'schen Kohomologiekategorie liegen.

3) Es bleibt noch zu zeigen, daß diese charakteristische Klasse invariant unter dem pullback von Vektorbündeln ist,

$$\chi_P(f^*E) = f^* \chi_P(E).$$

Das ist aber klar, man nimmt auf dem zurückgezogenen Bündel  $f^*E$  einfach den zurückgezogenen Zusammenhang und beobachtet, daß sich dessen Krümmung durch Zurückziehen der ursprünglichen Krümmung ergibt. Dies gilt aber auch für Polynome von  $F$ .  $\square$

**Satz 4.9.** Die  $r$ -te Chernsche Klasse ist gleich dem Koeffizienten vor  $t^r$  in der Entwicklung von  $\det(1 + \frac{it}{2\pi} F)$ ,

$$\sum_r t^r c_r(E) = \det(1 + \frac{it}{2\pi} F).$$

BEWEIS. Mit Beweis des vorhergehenden Satzes haben wir schon die Natürlichkeit der Konstruktion (d.i. die Unabhängigkeit vom gewählten Zusammenhang) gezeigt. Es bleiben noch

- 1) die Rechenregeln (Whitneysche Summenregel) und
- 2) die Normierung auf dem Tautologischen Bündel als Übung.  $\square$

BEISPIEL. Wir betrachten die Grassmann-Algebra der Formen über einer Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ ,  $\Lambda \mathcal{M} = \bigoplus_{k=1}^n \Lambda^k \mathcal{M}$ . Auf Schnitten in  $\Lambda \mathcal{M}$ ,  $\Gamma^\infty(\Lambda \mathcal{M}) =: \Omega(\mathcal{M})$ , operiert die äußere Ableitung

$$\Omega^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \dots \quad (21)$$

über

$$d : \Omega(\mathcal{M}) \ni \alpha \mapsto dq^i \wedge \nabla_{\partial_i} \alpha \in \Omega^{k+1}(\mathcal{M}).$$

Weiterhin hat man den Hodge-Stern gegeben:

$$* : \Omega^k(\mathcal{M}) \ni \alpha \mapsto i_{\alpha^i} v_g \in \Omega^{n-k}(\mathcal{M}).$$



Dabei ist  $v_g$  die kanonische Volumenform auf  $\mathcal{M}$  und  $\alpha^\sharp$  das mittels der Metrik  $g$  aus  $\alpha$  gewonnene antisymmetrische  $k$ -Vektorfeld. In lokalen Normalkoordinaten  $\{q^i\}_{(i=1,\dots,n)}$  ergibt sich für  $\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k}$

$$*\alpha = \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \alpha^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_{n-k}}.$$

**Lemma 4.10.**  $(\alpha, \beta) := \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge *\beta$  ist eine symmetrische, nichtentartete Bilinearform auf  $\Omega(\mathcal{M})$ , mit anderen Worten ein Skalarprodukt.

Zum Beweis der zweiten Eigenschaft verwendet man

$$\alpha \wedge *\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k} v_g.$$

Man bemerke, daß  $(\alpha, \beta) = 0$ , falls die Grade von  $\alpha$  und  $\beta$  nicht übereinstimmen.

Bezüglich  $(\cdot, \cdot)$  kann man nun den zu  $d$  adjungierten Operator  $\delta$  definieren. Man findet

$$\delta : \Omega^k(\mathcal{M}) \ni \alpha \mapsto i_{\partial_i} \nabla_{\partial_i} \alpha \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M}).$$

Es gilt wieder  $\delta^2 = 0$ <sup>11)</sup> Wir haben nun einen Operator  $D := d + \delta$  zur Hand, der

$$D : \Omega(\mathcal{M}) \ni \alpha \mapsto (dq^i \wedge + i_{\partial_i}) \nabla_{\partial_i} \alpha \in \Omega(\mathcal{M})$$

erfüllt. Dies ist der Dirac-Operator mit Koeffizienten im Spinorbündel  $\mathcal{W}$ , denn  $\Lambda \mathcal{M} \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}$  mit der Clifford-Multiplikation

$$dq^i \cdot dq^j = dq^i \wedge dq^j + i_{\partial_i} dq^j.$$

Sein Quadrat definiert den Hodge-Laplace-Operator und ist wegen  $d^2 = 0 = \delta^2$  gleich

$$\Delta = \delta d + d \delta.$$

Auf Funktionen ergibt sich der Standard-Laplace-Operator auf  $\mathcal{M}$ .

**Lemma 4.11.** *Es gilt*

$$\Delta \omega = 0 \leftrightarrow (\Delta \omega, \omega) = 0 \leftrightarrow d\omega = 0 \text{ und } \delta\omega = 0.$$

Zum Beweis benutze man

$$(\Delta \omega, \omega) = ((\delta d + d \delta)\omega, \omega) = (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega) \geq 0.$$

Solche Formen heißen *harmonisch*.

**Theorem 4.12.** *Jede de Rham'sche Kohomologiekategorie auf einer kompakten, orientierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  besitzt genau einen harmonischen Repräsentanten.*

Man sieht sofort, daß harmonische Formen geschlossen sind. Den vollständigen Beweis findet man zum Beispiel in [16], Kapitel 6. Aus der Definition von  $D$  sieht man, daß  $D$  geradgradige Formen auf solche von ungeradem Grad abbildet und umgekehrt. Wir spalten also  $\Omega(\mathcal{M})$  in diese beiden Anteile auf,

$$\Omega^+(\mathcal{M}) := \bigoplus_{0 \leq k \leq n/2} \Omega^{2k}(\mathcal{M}), \quad \Omega^-(\mathcal{M}) := \bigoplus_{0 \leq k \leq n/2-1} \Omega^{2k+1}(\mathcal{M}),$$

und schränken  $D$  auf die Elemente vom geraden Grad ein. Der so eingeschränkte Operator sei wieder mit  $D$  bezeichnet. Für den adjungierten gilt demnach

$$D^* = (\delta + d) : \Omega^-(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^+(\mathcal{M}).$$

<sup>11)</sup> Auf geraddimensionalen Mannigfaltigkeiten gilt  $\delta = *d*$ , allgemein  $\delta = (-)^{d(k-1)} *d*$  auf  $k$ -Formen.

Da für eine  $k$ -Form  $\alpha$   $d\alpha$  und  $\delta\alpha$  unterschiedlichen Grad besitzen, besteht der Kern von  $D$  aus genau allen geraden, harmonischen Formen, analog der Kern von  $D^*$  aus genau allen ungeraden harmonischen. Mit Theorem 4.12 finden wir folglich, daß

$$\begin{aligned} \dim \ker D &= \text{Anzahl der geradzahlig, harmonischen Formen auf } \mathcal{M} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} \dim H^{2k}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Analoges gilt wieder für  $D^*$  und also

$$\begin{aligned} \text{Index } D &= \dim \ker D - \dim \ker D^* \\ &= \dim \ker D - \dim \ker D^* \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(\mathcal{M}) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile enthält die sogenannten Betty-Zahlen, das ist der Rang der jeweiligen Kohomologiegruppe. Eine direkte Anwendung des Indextheorems ergibt andererseits die Euler-Charakteristik, so daß im Ergebnis diese gleich der vorzeichenbehafteten Summe der Betty-Zahlen ist.

## 5 Familien-Indextheorem, Determinantenbündel und Eichanomalien

In diesem Abschnitt wollen wir die topologische Bedeutung von Eichanomalien in der Quantenfeldtheorie beschreiben.

Wie wir wissen, ist es in der Theorie der schwachen Wechselwirkung wichtig, den Raum der Fermionen mit positiver Chiralität von dem mit negativer Chiralität zu unterscheiden. Der Dirac-Operator

$$\mathcal{D}_A : \Gamma(S^+ \otimes V) \rightarrow \Gamma(S^- \otimes V)$$

vermittelt zwischen diesen beiden Räumen, d.h. zwischen verschiedenen Vektorbündeln<sup>12)</sup>. Berechnet man die effektive Wirkung zur Lagrange-Dichte  $\mathcal{L} = \bar{\psi} \mathcal{D}_A \psi$ , so erhält man formal den Ausdruck  $\det \mathcal{D}_A$ . Dieser ist aber nicht wohldefiniert, denn  $\mathcal{D}_A$  ist eine Abbildung zwischen *verschiedenen* Vektorräumen, und die Determinante solcher Operatoren ist mehrdeutig. Die Determinante von

$$\mathcal{D}_A \mathcal{D}_A^* : \Gamma(S^+ \otimes V) \rightarrow \Gamma(S^+ \otimes V)$$

ist dagegen definiert, woraus man erkennt, daß die Mehrdeutigkeit der Determinante nur die Phase betrifft. Eine mögliche Definition von  $\det \mathcal{D}_A$  ist die folgende: Man wähle einen Operator  $P : \Gamma(S^- \otimes V) \rightarrow \Gamma(S^+ \otimes V)$  und definiere

$$\det_P \mathcal{D}_A := \det(P \mathcal{D}_A).$$

Tatsächlich entspricht die Regularisierung von  $\det \mathcal{D}_A$  einem derartigen Verfahren. Obwohl der Ausdruck  $\det_P \mathcal{D}_A$  natürlich von  $P$  abhängt, sind Variationen bezüglich des Eichpotentials unabhängig von  $P$ .

Die regularisierte Größe  $\det \mathcal{D}_A$  ist nun, im Gegensatz zu den Erwartungen aus formalen Betrachtungen, im allgemeinen nicht eichinvariant. Die Variation unter einer infinitesimalen Eichtransformation  $\xi$ ,

$$\delta_\xi \ln \det \mathcal{D}_A = \int d^n x \xi(x) \alpha(A) = \langle \xi, \alpha(A) \rangle, \quad (22)$$

ist die stetige Eichanomalie der Eichtheorie mit chiralen Fermionen. In einer konsistenten Theorie sollte sie herausfallen. Ein physikalisches Beispiel ist die Eichanomalie, die für den Zerfall des  $\pi^0$ -Mesons verantwortlich ist, und deren Verschwinden durch die fermionischen Beiträge im Standardmodell. Die Anomalie  $\alpha(A)$  ist eine  $n$ -Form auf der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , während die integrierte Anomalie  $\alpha[A]$  als geschlossene 1-Form auf der Eichgruppe  $\mathcal{G}$  interpretiert wird; die Wess-Zumino-Konsistenzbedingung

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] \ln \det \mathcal{D}_A = \delta_{[\xi, \eta]} \ln \det \mathcal{D}_A$$

ist gerade die Geschlossenheit von  $\alpha$  auf  $\mathcal{G}$ ,  $\delta \alpha = 0$ .

Geometrisch ist  $\det \mathcal{D}_A$  keine global, d.h. überall auf der Menge  $\mathcal{A}$  der Eichpotentiale definierte Funktion, sondern ein Schnitt im Determinantenbündel (einem komplexen Geradenbündel)

$$DET \mathcal{D} := \mathcal{A} \times_{\mathcal{G}} \mathbb{C}$$

über dem Raum  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  von (Eich-)Äquivalenzklassen von Zusammenhängen aus  $\mathcal{A}$ ; die Eichvariation der Übergangsfunktionen dieses Bündels ist gerade die Eichanomalie.

Im folgenden wollen wir kurz die topologischen Eigenschaften des Determinantenbündels und seine Verbindung zur Eichanomalie diskutieren. Sei  $\mathcal{H}S^+$  bzw.  $\mathcal{H}S^-$  das Hilbert-Bündel über  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  von Schnitten in  $S^+ \otimes V$  bzw.  $S^- \otimes V$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} DET \mathcal{D} &= \text{Hom}(\Lambda^{\max} \mathcal{H}S^+, \Lambda^{\max} \mathcal{H}S^-) \\ &= \text{Hom}(\Lambda^{\max} \ker \mathcal{D}, \Lambda^{\max} \mathcal{D}^*), \end{aligned}$$

denn bis auf die Nullmoden fallen alle Beiträge heraus. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\text{ch}_1(DET \mathcal{D}) = c_1(DET \mathcal{D}) = \text{ch}_1(IND \mathcal{D}),$$

<sup>12)</sup> $V$  ist hier ein assoziiertes Vektorbündel, das die relevante Darstellung der Eichsymmetrie trägt.

wobei das sogenannte Indexbündel

$$IND\mathcal{D} := \ker \mathcal{D} - \ker \mathcal{D}^*$$

als virtuelles Geradenbündel wohldefiniert ist:  $\ker \mathcal{D}$  und  $\ker \mathcal{D}^*$  sind Familien von endlichdimensionalen Vektorräumen, parametrisiert durch Elemente aus  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Obige Differenz ist nun ein virtuelles Bündel, weil der Index deformationsinvariant, d.h. in  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  lokal konstant ist. Um den Chern-Charakter  $\text{ch}_1(IND\mathcal{D})$  zu berechnen, kann man sich auf eine 2-Sphäre  $Y \subset \mathcal{A}/\mathcal{G}$  einschränken. Das Familien-Indextheorem ergibt dann

$$\text{ch}_1(IND\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{M}} \hat{A}(\mathcal{M}) \text{ch}V \in H^*(Y). \quad (23)$$

Der Integrand ist eine geschlossene Form über  $\mathcal{M} \times Y$ , dessen Raum-Zeit-Anteil vom Grad  $n$  separiert und über  $\mathcal{M}$  integriert wird. Man erhält auf diese Weise eine geschlossene Form auf  $Y$ . Die exakte Sequenz<sup>13)</sup>

$$0 = H^1(\mathcal{A}) \rightarrow H^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\bar{d}} H^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \rightarrow H^2(\mathcal{A}) = 0$$

liefert einen Isomorphismus

$$\bar{d}: \alpha \mapsto \text{ch}_1(IND\mathcal{D}) = \text{ch}_1(DET\mathcal{D}),$$

wobei  $\alpha$ , als 1-Form über  $\mathcal{G}$  betrachtet, die Anomalie darstellt.

Die Dichte in Gleichung (22) ist eine  $(n+1)$ -Form über  $\mathcal{M} \times Y$  mit Grad  $n$  in  $\mathcal{M}$ - und Grad 1 in  $\mathcal{G}$ -Richtung. Einen lokalen Ausdruck erhält man mit der Technik der Absteigegleichungen. Zerlegen wir den Grad der Dichte  $\omega$  aus Formel (23) zuerst in  $\mathcal{M}$ - und  $Y$ -Anteile:

$$\omega = \hat{A} \text{ch}(V)|_{n+2} = \omega_{n+2,0} + \omega_{n+1,1} + \dots$$

Bezeichnet man die äußeren Ableitungen auf  $\mathcal{M}$  bzw.  $Y \subset \mathcal{A}/\mathcal{G}$  mit  $d$  bzw.  $\delta$  und benutzt

$$(d + \delta)^2 = d^2 = \delta^2 = 0,$$

so findet man wegen der  $d$ -Geschlossenheit von  $\omega_{n+2,0}$ ,

$$d\omega_{n+2,0} = 0,$$

lokal ein Potential

$$\omega_{n+2,0} =: d\omega_{n+1,0}.$$

Da  $\omega$  aber auch  $\delta$ -geschlossen ist, gilt

$$\delta\omega_{n+2,0} = 0$$

und damit

$$0 = \delta\omega_{n+2,0} = \delta d\omega_{n+1,0} = -d\delta\omega_{n+1,0} = 0.$$

Wieder findet man lokal ein Potential, eine  $(n, 1)$ -Form

$$\delta\omega_{n+1,0} =: d\omega_{n,1}.$$

$\omega_{n,1}$  ist die gesuchte Anomaliendichte  $\alpha$ . Die Konsistenzbedingung folgt aus

$$d\delta\omega_{n,1} = -\delta d\omega_{n,1} = \delta^2\omega_{n+1,0} = 0.$$

Integriert man  $\omega_{n,1}$  über  $\mathcal{M}$ , so erhält man eine geschlossene Form auf  $\mathcal{G}$ .

<sup>13)</sup> Induziert von  $1 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Es gilt  $H^*(\mathcal{A}) = 0$ , da  $\mathcal{A}$  kontrahierbar ist.

## Literatur

- [1] RALPH ABRAHAM and JERROLD E. MARSDEN. *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings, Reading, MA., 1978.
- [2] LUIS ALVAREZ-GAUMÉ and EDWARD WITTEN. Gravitational anomalies. *Nucl. Phys. B*, **234**:269–330, 1984.
- [3] REINHOLD A. BERGLMANN. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [4] JEAN-LUC BRYLINSKI. *Loop Spaces, Characteristic Classes, and Geometric Quantization.*, volume 107 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- [5] M. DANIEL and C. M. VIALLET. The geometrical setting of gauge theories of the yang-mills type. *Rev. Mod. Phys.*, **52**(1):175–197, 1980.
- [6] JOSÉ A. DE AZCÁRRAGA and JOSÉ M. IZQUIERDO. *Lie groups, lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1998.
- [7] PETER G. FREUND. *Introduction to Supersymmetry*. Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [8] MICHAEL B. GREEN and JOHN H. SCHWARZ. Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory. *Phys. Lett.*, **149B**(1–3):117–122, 1984.
- [9] LARS HÖRMANDER. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators.*, volume I, III. Springer, Berlin, 1990.
- [10] SHOSHICHI KOBAYASHI and KATSUMI NOMIZU. *Foundations of Differential Geometry.*, volume 1. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- [11] GIOVANNI LANDI. An introduction to noncommutative spaces and their geometry. [hep-th/971078](#), 1997.
- [12] SERGE LANG. *Algebra*. Addison-Wesley, New York, 1984.
- [13] REINHOLD MEISE und D. VOGT. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Vieweg & Sohn Verlagsges. mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.
- [14] HARTMANN RÖMER. Field theoretical applications of the index theorem. In J.DEBRUS and A. C. HIRSHFELD (eds.): *Geometry and Theoretical Physics.*, pages 224–242, Berlin, 1991. Springer.
- [15] MICHAEL E. TAYLOR. *Partial Differential Equations II.*, volume 116 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, 1996.
- [16] FRANK W. WARNER. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott-Foresman, Glenview, IL, 1971.