

VORLESUNGEN ZUR RELATIVITÄTSTHEORIE

Hans-Jürgen Matschull

Institut für Physik, Universität Mainz

27.10.2002

TEIL I

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

1 Die Raumzeit

Die Relativitätstheorie, und zwar sowohl die spezielle wie auch die allgemeine, beschäftigt sich mit der *Geometrie der Raumzeit*. In diesem Kapitel soll deshalb zunächst das Konzept der Raumzeit eingeführt werden. Die Art und Weise, wie dieser Begriff in der Relativitätstheorie definiert und verwendet wird, kommt im Prinzip der Sichtweise von Kant sehr nahe. Der Raum und die Zeit sind a priori in unserer Vorstellung gegebene Strukturen, mit deren Hilfe wir wahrgenommene Tatsachen ordnen.

Oft wird argumentiert, dass gerade dieses Konzept eines a priori gegebenen Raumes und einer Zeit in der Relativitätstheorie hinterfragt bzw. sogar aufgegeben werden muss. Das ist zunächst richtig, was das Hinterfragen angeht. Bei genauer Hinsehen kommt man jedoch zu dem Schluss, dass von Aufgeben letztlich keine Rede sein kann. Der Raum und die Zeit sind in der Relativitätstheorie genauso a priori gegebene Objekte wie in der klassischen Physik von Newton, Galilei, Kepler und Maxwell, um nur einige Namen zu nennen.

Trotzdem gibt es natürlich einen wesentlichen Unterschied zwischen der klassischen und der relativistischen Physik. Der besteht aber nicht darin, dass Raum und Zeit weniger *absolut* sind. Das sind sie, zumindest in der speziellen Relativitätstheorie, noch immer. Es ist aber deren mathematische bzw. geometrische *Struktur*, die von der klassischen Vorstellung abweicht. Insofern stellt die spezielle Relativitätstheorie zwar viele als fundamental und absolut geltende Konzepte der klassischen Physik in Frage, und falsifiziert sie zum Teil auch. Gleichzeitig ersetzt sie diese Konzepte aber durch *gleich viele* und *ebenso absolute* neue Konzepte.

Erst beim Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie werden aus einigen dieser zunächst absoluten Strukturen variable Strukturen, die dann selbst einer physikalischen Dynamik unterliegen. Der Raum und die Zeit, die zunächst dazu dienen, physikalische Vorgänge zu *beschreiben*, werden also *selbst* zu solchen Vorgängen, die einer Beschreibung bedürfen. Es ist deshalb stets von großer Bedeutung, sich beim Formulieren einer physikalischen Theorie darüber im Klaren zu sein, welche Strukturen in eine solche Theorie als *absolut* eingehen und welche die eigentlichen *dynamischen* Objekte sind, deren Verhalten durch die Theorie beschrieben bzw. erklärt werden soll.

Dies wollen wir im Rahmen dieser Einführung in die Relativitätstheorie im Auge behalten, denn gerade der Übergang von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie ist ein sehr schönes Beispiel dafür, wie neue physikalische Theorien auf bekannten aufgebaut werden können, indem man deren Strukturen zunehmend variabel werden lässt. Doch zunächst beschäftigen wir uns nur mit der Raumzeit und denjenigen Eigenschaften, die im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie als absolut anzusehen sind.

Ereignisse und Weltlinien

Die Elemente der Raumzeit sind *Ereignisse*. Ein Ereignis geschieht zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort. Ein typisches Beispiel sind die in einem Ausweisdokument verzeichneten Geburtsdaten, die eindeutig, jedenfalls im Rahmen einer gewissen Messgenauigkeit, ein bestimm-

tes Ereignis bezeichnen, nämlich die Geburt seines Besitzers. Ein anderes Beispiel wäre das einmalige Klingeln einer Türglocke, oder der Zusammenstoß eines Protons und eines Elektrons in einem Teilchenbeschleuniger. Kein Ereignis in diesem Sinne ist “der Jahreswechsel 1999/2000”, der nicht an einem bestimmten Ort stattfand. Und genauso wenig ist “Hamburg” ein Ereignis, was zwar einen bestimmten Ort, aber keine bestimmte Zeit bezeichnet.

In jedem Fall erfordert die Bezeichnung eines Ereignisses die Angabe der Zeit und des Ortes. Ein Ereignis ist ein *Hier und Jetzt*. Was die mathematische Struktur betrifft, so stellen wir uns die Raumzeit, also die Menge aller Ereignisse, als einen vierdimensionalen *affinen Raum* \mathcal{M} vor. Ein Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ ist eindeutig durch die Angabe seiner *Koordinaten* (t, x, y, z) in Raum und Zeit bestimmt. Da es keinen Sinn macht, Ereignisse zu addieren oder mit reellen Zahlen zu multiplizieren, ist es nicht sinnvoll, die Raumzeit selbst als einen Vektorraum zu betrachten. Wir können jedoch einen dem affinen Raum \mathcal{M} zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} aller *Raumzeit-Vektoren* definieren.

Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ist typischerweise ein Abstandsvektor zweier Ereignisse $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$. Wir schreiben daher $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Allerdings hat das Minus-Zeichen in diesem Fall nicht seine gewöhnliche Bedeutung. Es hat ja wie gesagt keinen Sinn, Ereignisse zu addieren oder mit -1 zu multiplizieren. Wir *definieren* daher den Abstandsvektor $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{V}$ für ein Paar von Ereignissen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$ wie folgt. Zuerst führen wir auf dem Vektorraum \mathcal{V} eine Basis ein. Diese besteht aus vier *Einheitsvektoren* $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Sie sollen anschaulich in Richtung der vier Koordinatenachsen zeigen. Einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ können wir dann in dieser Basis entwickeln,

$$\mathbf{v} = v^t \mathbf{e}_x + v^t \mathbf{e}_x + v^y \mathbf{e}_y + v^z \mathbf{e}_z = v^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (1.1)$$

Es ist üblich, die Indizes kollektiv durch kleine griechische Buchstaben zu bezeichnen. Der Index μ nimmt die Werte t, x, y, z an. Die reellen Zahlen v^μ sind die Komponenten des Vektors \mathbf{v} bezüglich der gegebenen Basis \mathbf{e}_μ . Um ein wenig Schreibearbeit zu sparen, führen wir die *Einsteinsche Summenkonvention* ein. Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und zwar stets über alle Werte, die der betreffende Index annehmen kann.

Summenkonvention: Kommt in einem Term ein Symbol einmal als hochgestellter und einmal als tiefgestellter Index vor, dann ist über alle Werte, die dieser Index annehmen kann, zu summieren.

Der Grund für die Unterscheidung zwischen hoch- und tiefgestellten Indizes wird uns später noch klar werden. Und wir werden auch verstehen, warum wir an dieser Stelle sehr vorsichtig mit diesen im Grunde sehr einfachen Definitionen umgehen. Insbesondere die Unterscheidung zwischen dem affinen Raum \mathcal{M} , der Raumzeit selbst, und dem zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} wird später wichtig sein. Denn schrittweise Verallgemeinerungen dieses Konzeptes werden uns den Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie erleichtern.

Wir werden im folgenden die Koordinaten eines Ereignisses $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ stets mit a^t, a^x, a^y, a^z bezeichnen, oder zusammengefasst mit a^μ , und entsprechend die Koordinaten eines Ereignisses $\mathbf{b} \in \mathcal{M}$ mit b^t, b^x, b^y, b^z , oder einfach b^μ . Dies sind *nicht* die Komponenten irgendwelcher

Vektoren, denn \mathbf{a} und \mathbf{b} sind ja nur Punkte in einem affinen Raum. Einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ erhalten wir, wenn wir den *Abstandsvektor* wie folgt definieren,

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = v^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad \text{mit} \quad v^\mu = a^\mu - b^\mu. \quad (1.2)$$

Die erste Gleichung definiert $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ als abstrakten Vektor, die zweite Gleichung definiert die Komponenten von \mathbf{v} bezüglich der Basis \mathbf{e}_μ . Man beachte, dass hier einfach nur die Differenz von reellen Zahlen gebildet wird, im Gegensatz zu der zunächst nur formalen Schreibweise $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Da diese aber nun einen Sinn hat, werden wir sie von nun an auch verwenden. Wir müssen aber beachten, dass dies die einzige Art und Weise ist, wie wir zwei Ereignisse miteinander verknüpfen können.

Ein anderes wichtiges Konzept ist die *Weltlinie*. Betrachten wir dazu einen einfachen physikalischen Vorgang, die Bewegung eines punktförmigen Teilchens. Die Weltlinie des Teilchens ist die Kurve in der Raumzeit, die alle jene Ereignisse miteinander verbindet, die das Teilchen sozusagen miterlebt. Die Kurve kann als eine Abbildung $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ dargestellt werden, wobei \mathbb{R} auch durch ein endliches Intervall ersetzt werden kann, wenn es sich um eine endlich lange Weltlinie handelt. Wir sagen, dass eine Weltlinie durch eine reelle Zahl *parametrisiert* wird. Als einfaches Beispiel betrachten wir ein Teilchen, welches sich gleichmäßig beschleunigt entlang der x -Achse durch den Raum bewegt. In diesem Fall ist eine mögliche Parametrisierung der Weltlinie wie folgt gegeben

$$\lambda(s) = (s, \frac{g}{2} s^2, 0, 0), \quad (1.3)$$

wobei g die Beschleunigung ist. Wir können auch sagen, dass die Kurve durch vier *Koordinatenfunktionen* $\lambda^\mu(s)$ gegeben ist, also in diesem speziellen Fall

$$\lambda^t(s) = s, \quad \lambda^x(s) = \frac{g}{2} s^2, \quad \lambda^y(s) = 0, \quad \lambda^z(s) = 0. \quad (1.4)$$

Wir können aber auch irgendeine andere Parametrisierung wählen, indem wir s durch eine beliebige monotone Funktion eines anderen Parameters \tilde{s} ersetzen, etwa

$$\lambda(\tilde{s}) = (2\tilde{s}, 2g\tilde{s}^2, 0, 0), \quad (1.5)$$

also

$$\lambda^t(\tilde{s}) = 2\tilde{s}, \quad \lambda^x(\tilde{s}) = 2g\tilde{s}^2, \quad \lambda^y(\tilde{s}) = 0, \quad \lambda^z(\tilde{s}) = 0. \quad (1.6)$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir, wie in der Physik allgemein üblich, beide Funktionen $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ mit dem gleichen Symbol, obwohl es streng genommen natürlich verschiedene Funktionen sind. Wir unterscheiden sie, indem wir das Argument einmal als s und einmal als \tilde{s} schreiben. Das sollte in der Regel nicht zu Problemen führen.

Beide Abbildungen $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ definieren dieselbe Weltlinie. Sie beschreiben dieselbe physikalische Geschichte des Teilchens. Das Bild ist jeweils eine Parabel in der t - x -Ebene, die wir auch durch die *Koordinatengleichungen* $x = gt^2/2$, $y = 0$ und $z = 0$ definieren können. Eine

Weltlinie ist also genau genommen eine *Äquivalenzklasse* von Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, wobei zwei Abbildungen genau dann äquivalent sind, wenn sie durch eine Reparametrisierung auseinander hervorgehen.

Nehmen wir nun an, dass die Abbildung $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ genügend glatt ist. Dann können wir die Ableitung nach dem Parameter s bilden. Ist $\lambda(s)$ ein beliebiges Ereignis auf der Weltlinie, so definiert $d\lambda/ds \in \mathcal{V}$ den *Tangentenvektor* an die Weltlinie am Ereignis $\lambda(s)$. Da die Ableitung als Grenzwert einer Differenz gebildet wird, ist das Resultat stets ein Raumzeit-Vektor. Das sehen wir wie folgt. Wenn $\lambda(s)$ in Koordinaten durch die reellen Funktionen $\lambda^\mu(s)$ gegeben ist, so gilt

$$\frac{d\lambda}{ds} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(s + \epsilon) - \lambda(s)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda^\mu(s + \epsilon) - \lambda^\mu(s)}{\epsilon} \mathbf{e}_\mu = \frac{d\lambda^\mu}{ds} \mathbf{e}_\mu, \quad (1.7)$$

wieder mit der Summenkonvention. Die Ableitungen $d\lambda^\mu/ds$ der Koordinatenfunktionen bilden also die Komponenten eines Raumzeit-Vektors. Er zeigt am jeweiligen Ereignis in Richtung der Weltlinie.

Es liegt nahe, den Vektor $d\lambda/ds$ als die *Geschwindigkeit* des Teilchens beim Passieren des Ereignisses $\lambda(s)$ zu bezeichnen. Allerdings stimmt diese Definition einer Geschwindigkeit nicht ganz mit der üblichen Definition überein. Zum einen hat der Vektor vier Komponenten statt drei. Zum anderen hängt er auch noch von der gewählten Parametrisierung ab. Betrachten wir dazu das einfache Beispiel von oben. Aus (1.3) ergibt sich

$$\frac{d\lambda}{ds} = \mathbf{e}_t + g s \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_t + g t \mathbf{e}_x, \quad (1.8)$$

während die alternative Darstellung (1.5) für dieselbe Weltlinie das folgende Resultat liefert,

$$\frac{d\lambda}{d\tilde{s}} = 2\mathbf{e}_t + 4g\tilde{s} \mathbf{e}_x = 2\mathbf{e}_t + 2gt \mathbf{e}_x. \quad (1.9)$$

Betrachten wir nun jeweils das gleiche Ereignis, also den Tangentialvektor für denselben Wert von x und t , so finden wir, dass die beiden Geschwindigkeiten nicht gleich sind, sondern sich um einen positiven Faktor unterscheiden. Hier ist dieser Faktor überall gleich zwei.

Im allgemeinen Fall lässt er sich leicht aus der Kettenregel ermitteln. Es seien $\lambda(s)$ und $\lambda(\tilde{s})$ zwei Parametrisierungen derselben Weltlinie. Das ist genau dann der Fall, wenn es eine umkehrbare Funktion $\tilde{s}(s)$ gibt, so dass $\lambda(s) = \lambda(\tilde{s}(s))$. Folglich gilt

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\tilde{s}}{ds} \frac{d\lambda}{d\tilde{s}}. \quad (1.10)$$

Wenn wir nun zusätzlich annehmen, dass die Weltlinie bei beiden Parametrisierungen in die gleiche Richtung durchlaufen wird, so gilt $d\tilde{s}/ds > 0$. Die Tangentialvektoren unterscheiden sich also stets um einen positiven Faktor. Da wir die Weltlinie jedoch beliebig parametrisieren können, bleibt dieser Faktor unbestimmt.

Um einer Weltlinie eindeutig eine Geschwindigkeit zuzuordnen, müssen wir so etwas wie einen Einheitsvektor definieren. Dazu müssen wir auf dem Vektorraum \mathcal{V} eine Norm einführen, oder allgemeiner eine Bilinearform $\eta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine solche Bilinearform ist eine zusätzliche Struktur der Raumzeit. Es ist nicht auf Anhieb offensichtlich, wie eine solche Struktur in physikalisch sinnvoller Weise definiert werden kann. Tatsächlich hängt die Lösung dieses Problems von der betrachteten physikalischen Theorie ab, und die spezielle Relativitätstheorie ist, in einem gewissen Sinne, genau die gesuchte Lösung zu diesem Problem.

Längen, Winkel, und Symmetrien

Um das Problem ein wenig zu verdeutlichen, machen wir einen kleinen Ausflug in die Geometrie des dreidimensionalen Raumes. Sei also nun \mathcal{M} der gewöhnliche, dreidimensionale Raum aller Orte $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$. Wir führen die üblichen kartesischen Koordinaten (x, y, z) ein, und definieren einen zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} , welcher durch drei Einheitsvektoren \mathbf{e}_m aufgespannt wird. Kleine lateinische Indizes m, n, \dots nehmen dabei die Werte x, y, z an. Ein Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ hat die Komponentendarstellung $\mathbf{u} = u^m \mathbf{e}_m$.

Natürlich wissen wir bereits, dass es sinnvoll ist, auf dem Vektorraum \mathcal{V} die folgende Bilinearform oder *Metrik* einzuführen,

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad \delta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v^m \delta_{mn} w^n. \quad (1.11)$$

Auch hier gilt wieder die Summenkonvention, und δ_{mn} bezeichnet das Kronecker-Symbol, also $\delta_{mn} = 1$ für $m = n$ und $\delta_{mn} = 0$ für $m \neq n$. Mit Hilfe der Metrik können wir jedem Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ eine *Länge* $|\mathbf{v}| \geq 0$ zuordnen,

$$|\mathbf{v}|^2 = \delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (1.12)$$

Jedem Paar von nicht verschwindenden Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ können wir außerdem einen *Winkel* $0 \leq \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \pi$ zuordnen, wobei

$$\cos \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}. \quad (1.13)$$

Wir können sagen, dass die Metrik δ die *Euklidische Geometrie* des Raumes definiert, die sich im wesentlichen mit Längen und Winkeln beschäftigt. Die Metrik wird deshalb auch als *Euklidische Metrik* bezeichnet.

Aber warum gerade diese eine Bilinearform, und nicht irgend eine andere? Die allgemeinste Bilinearform ist von der Form

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v^m \eta_{mn} w^n, \quad (1.14)$$

wobei η_{mn} eine beliebige 3×3 -Matrix ist. Welche Eigenschaft zeichnet die spezielle Bilinearform (1.11) aus? Tatsächlich ist dies keine mathematische, sondern eine physikalische Eigenschaft.

Wir wissen aus Erfahrung, dass der uns umgebende dreidimensionale Raum neben der Eigenschaft, ein affiner Raum zu sein, noch weitere Eigenschaften hat. Es gibt in ihm keine ausgezeichneten Orte und keine besonderen Richtungen. Diese Eigenschaft äußert sich darin, dass alle uns bekannten Naturgesetze gewisse Symmetrien haben. Die Form der Naturgesetze ändert sich nicht, wenn wir das Koordinatensystem drehen oder verschieben.

Betrachten wir also denselben Raum \mathcal{M} , versehen mit zwei verschiedenen, kartesischen Koordinatensystemen (x, y, z) und $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Wir bezeichnen sie mit Σ und $\tilde{\Sigma}$. Die Koordinaten eines Punktes $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ seien a^m bezüglich des Systems Σ , wobei der Index m die Werte x, y, z annimmt, und die Koordinaten desselben Punktes bezüglich des Systems $\tilde{\Sigma}$ seien $a^{\tilde{m}}$, wobei \tilde{m} die Werte $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ annimmt. Es gilt dann die lineare Beziehung

$$a^m = \Delta^m_{\tilde{m}} a^{\tilde{m}} + \xi^m \quad \Leftrightarrow \quad a^{\tilde{m}} = \Delta^{\tilde{m}}_m a^m + \xi^{\tilde{m}}. \quad (1.15)$$

Hier ist $\xi^m \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, der die Verschiebung der Koordinatensysteme definiert, und $\Delta^m_{\tilde{m}} \in \text{SO}(3)$ ist eine orthogonale Drehmatrix. Entsprechend sind $\Delta^{\tilde{m}}_m$ und $\xi^{\tilde{m}}$ die Parameter der inversen Transformation. Es muss also gelten

$$\Delta^{\tilde{m}}_p \Delta^p_{\tilde{n}} = \delta^{\tilde{m}}_{\tilde{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta^m_p \Delta^p_{\tilde{\nu}} = \delta^m_n, \quad (1.16)$$

das heißt die eine Matrix ist die Inverse der anderen, sowie

$$\xi^{\tilde{m}} = -\Delta^{\tilde{m}}_m \xi^m \quad \Leftrightarrow \quad \xi^m = -\Delta^m_{\tilde{m}} \xi^{\tilde{m}}. \quad (1.17)$$

Das wiederum bedeutet, dass sich der Vektor $\lambda^{\tilde{m}}$ für die Rücktransformation aus λ^m ergibt, indem man das Vorzeichen umkehrt und ihn von Σ nach $\tilde{\Sigma}$ transformiert. Für eine orthogonale Matrix gilt außerdem

$$\delta_{mn} \Delta^m_{\tilde{m}} \Delta^{\tilde{n}}_n = \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}. \quad (1.18)$$

Wie man leicht nachprüft, ist dies gerade die übliche Definition. Die Schreibweise mit den eingefügten Kronecker-Symbolen ist so gewählt, dass die Summenkonvention zur Anwendung kommen kann. Was hier steht ist aber nichts anderes als dass die Matrix $\Delta^{\tilde{m}}_m$ gleich der transponierten inversen Matrix ist, also ein Element der Drehgruppe $\text{O}(3)$ ist. Folglich ist die in (1.15) auftretende inverse Matrix einfach die transponierte Matrix. Um aber die Indizes an die richtige Stelle zu befördern, verwenden wir auch hier wieder die Summenkonvention zusammen mit dem Kronecker-Symbol,

$$\Delta^{\tilde{m}}_m = \delta^{\tilde{m}\tilde{n}} \delta_{mn} \Delta^{\tilde{n}}_n. \quad (1.19)$$

Natürlich könnten wir uns hier noch mehr Schreibarbeit ersparen, wenn wir alle Indizes wie üblich einfach nach unten schreiben würden. Wir werden aber später sehen, dass dies auf einer besonderen Eigenschaft des dreidimensionalen Raumes beruht, welche die Raumzeit nicht hat. Wir wollen deshalb den im Moment vielleicht etwas mühsamen Umgang mit oberen und unteren Indizes beibehalten.

Betrachten wir nun einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Wir können ihn nach der Basis \mathbf{e}_m bezüglich des Koordinatensystems Σ entwickeln, oder nach der Basis $\mathbf{e}_{\tilde{m}}$ bezüglich des Koordinatensystems $\tilde{\Sigma}$, also

$$\mathbf{u} = u^m \mathbf{e}_m = u^{\tilde{m}} \mathbf{e}_{\tilde{m}}. \quad (1.20)$$

Welche Beziehung besteht nun zwischen den Basisvektoren \mathbf{e}_m und $\mathbf{e}_{\tilde{m}}$, und folglich zwischen den Komponenten u^m und $u^{\tilde{m}}$? Diese finden wir sehr einfach, indem wir den Vektor \mathbf{u} als Abstandsvektor zweier Punkte definieren, so dass

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad u^m = b^m - a^m, \quad u^{\tilde{m}} = b^{\tilde{m}} - a^{\tilde{m}}. \quad (1.21)$$

Wir wissen, wie a^m und $a^{\tilde{m}}$ zusammenhängen, nämlich wie (1.15), und entsprechendes gilt für b^m und $b^{\tilde{m}}$. Daraus folgt

$$u^{\tilde{m}} = \Delta^{\tilde{m}}_m u^m \quad \Leftrightarrow \quad u^m = \Delta^m_{\tilde{m}} u^{\tilde{m}}. \quad (1.22)$$

Die Komponenten eines Vektors “sehen” also bei einer linearen Koordinatentransformation nur den Anteil der Rotation, und unter diesem verhalten sie sich genau so wie die Koordinaten selbst. Wir können daraus schließlich die Transformation der Basisvektoren ableiten, denn der Vektor \mathbf{u} selbst ist bei der Transformation invariant. Es folgt durch Einsetzen in (1.20), dass die Basisvektoren gerade mit der inversen Drehmatrix transformieren, also

$$\mathbf{e}_{\tilde{m}} = \mathbf{e}_m \Delta^m_{\tilde{m}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_{\tilde{m}} \Delta^{\tilde{m}}_m. \quad (1.23)$$

Für die Basisvektoren \mathbf{e}_m gilt also formal dieselbe Transformation wie für die Komponenten v^m eines Vektors, nur dass die Drehmatrix durch die inverse Matrix ersetzt ist, und dass diese nun gewissermaßen *von rechts* wirkt.

Auch an dieser Stelle sei nochmal angemerkt, dass die inverse Matrix in diesem Fall gleich der transponierten Matrix ist, so dass durch (1.23) in Wirklichkeit genau dasselbe Transformationsgesetz dargestellt wird wie durch (1.22). Aber auch das, so wird sich herausstellen, ist nur eine spezielle Eigenschaft der dreidimensionalen Raumes, den die Raumzeit nicht hat. Es ist daher eine gute Übung, die Schreibweise mit den oberen und unteren Indizes konsequent beizubehalten.

Doch kommen wir nun zurück zur ursprünglichen Frage. In welcher Art und Weise ist die spezielle Bilinearform (1.11) unter allen möglichen Bilinearformen (1.14) ausgezeichnet? Wenn die daraus abgeleiteten Längen von Vektoren und Winkel zwischen ihnen physikalisch sinnvolle Größen darstellen sollen, dann muss die Definition der Bilinearform in allen Koordinatensystemen gleich lauten. Konkret muss also die Matrix η_{mn} in jedem Koordinatensystem dieselben Komponenten haben. Ansonsten wäre ein Koordinatensystem gegenüber dem anderen ausgezeichnet.

Wir könnten zum Beispiel eine der Komponenten der Matrix η_{mn} herausgreifen und fragen, in welchem Koordinatensystem diese Komponente minimal wird. Dieses Koordinatensystem wäre dann “etwas besonderes”. Da wir aber wissen, dass es kein solches besonderes Koordinatensystem gibt, muss die Metrik invariant unter allen möglichen Koordinatentransformationen sein.

Betrachten wir also eine beliebige Bilinearform η , welche in den beiden Koordinatensystemen Σ und $\tilde{\Sigma}$ jeweils durch eine Matrix η_{mn} bzw. $\eta_{\tilde{m}\tilde{n}}$ definiert ist,

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v^m \eta_{mn} w^n = v^{\tilde{m}} \eta_{\tilde{m}\tilde{n}} w^{\tilde{n}}. \quad (1.24)$$

Diese Gleichung gilt für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, wobei deren Komponenten die Beziehung (1.22) erfüllen. Durch die gleiche Rechnung wie eben zur Herleitung der Transformation der Basisvektoren folgt daraus

$$\eta_{\tilde{m}\tilde{n}} = \eta_{mn} \Delta^m_{\tilde{m}} \Delta^n_{\tilde{n}}. \quad (1.25)$$

Die Frage ist also: welches ist die allgemeinste Matrix η_{mn} , die durch die gegebene Transformation in sich über geht? Für $\eta_{mn} = \delta_{mn}$ ist das offenbar der Fall, denn dann ist (1.25) nichts anderes als die Orthogonalitätsrelation (1.18). Umgekehrt ist es nicht schwer zu zeigen, dass δ_{mn} bis auf Multiplikation mit einer Konstante die einzige solche Matrix ist.

Aufgabe 1.1 Man zeige, dass (1.25) genau dann für alle $\Delta^m_{\tilde{m}} \in O(3)$ gilt, wenn $\eta_{mn} = k \delta_{mn}$ ist, mit $k \in \mathbb{R}$.

Wir kommen also zu folgendem Schluss. Aufgrund der Symmetrien des Raumes, insbesondere der Invarianz der Naturgesetze unter Drehungen, ist die einzige physikalisch sinnvolle Bilinearform durch $\eta_{mn} = \delta_{mn}$ gegeben. Physikalisch sinnvoll bedeutet dabei, dass nur diese Bilinearform und keine andere in den Naturgesetzen auftreten kann. Denn sonst wären diese nicht invariant unter Drehungen.

Dies ist eine erste Anwendung des sogenannten *Relativitätsprinzips*, in einer vereinfachten Form. Aus der Tatsache, dass den Naturgesetzen eine gewisse Symmetrie zugrunde liegt, sie also ihre Form bewahren wenn wir auf die Koordinaten gewisse Transformationen anwenden, lassen sich bereits sehr allgemeine Schlüsse über die konkrete Form dieser Naturgesetze ziehen.

Im vorliegenden Fall konnten wir aus der Symmetrie des Raumes ableiten, dass die einzige Funktion eines einzelnen Vektors, welcher eine vom gewählten Koordinatensystem unabhängige Bedeutung zukommt, seine Länge ist. Bei Funktionen von zwei Vektoren hat zusätzlich zu den beiden Längen der Winkel zwischen den Vektoren eine sinnvolle, das heißt von den Koordinaten unabhängige Bedeutung. Über Funktionen von mehr Vektoren können wir an dieser Stelle nicht viel sagen, da wir nur *Bilinearformen* untersucht haben.

Tatsächlich werden wir Überlegungen dieser Art später auf *Multilinearformen* erweitern, und so zum *Tensorkalkül* gelangen. Die Fragestellung ist dabei stets von der gleichen Art. Es geht darum, herauszufinden, welchen mathematischen Objekten in einer gegebenen Situation eine sinnvolle physikalische Bedeutung zukommen kann, die von willkürlich gewählten Koordinaten unabhängig sein muss.

Newtonsche Mechanik

Wir wollen nun diese Überlegungen vom Raum auf die Raumzeit übertragen. Wir erinnern uns an das ursprüngliche Problem. Wir waren auf der Suche nach einer sinnvollen Definition der

Länge eines Raumzeit-Vektors, oder allgemeiner nach einer Bilinearform auf dem Vektorraum \mathcal{V} . Nun haben wir gesehen, dass die Menge aller physikalisch sinnvollen Bilinearformen durch die Symmetrien, die sie haben sollen, stark eingeschränkt sind.

Beginnen wir also damit, uns zu fragen, welche Symmetrien die Raumzeit hat, analog zu den gerade diskutierten Symmetrien des Raumes. Ein Symmetrie ist eine Koordinatentransformation, unter der die Naturgesetze in ihrer Form invariant sind. Betrachten wir als ein einfaches und bekanntes Beispiel die Gesetze der Newtonschen Mechanik. Wir kennen ihre Symmetrien bereits. Sie lassen sich stark verkürzt wie folgt ausdrücken.

Relativitätsprinzip (Newton, Galilei): Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.

Natürlich müssen wir das ein wenig genauer formulieren. Zunächst wollen wir unter dem Begriff *Inertialsystem* im folgenden nichts anderes verstehen als ein Koordinatensystem (t, x, y, z) auf der Raumzeit \mathcal{M} , in dem die Newtonschen Gesetze gelten. Wir wissen natürlich auch, wie die Transformationen zwischen zwei Inertialsystemen in der Newtonschen Mechanik aussehen. Zunächst müssen sie linear sein. Das folgt aus dem zweiten Newtonschen Gesetz, welches besagt, dass sich ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, auf einer geraden Weltlinie durch die Raumzeit bewegt. Da dies in jedem Inertialsystem der Fall sein muss, kommen nur lineare Transformationen in Frage.

Sei also Σ ein Inertialsystem mit Koordinaten (t, x, y, z) , und $\tilde{\Sigma}$ ein anderes Inertialsystem mit Koordinaten $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Dann besteht zwischen den Koordinaten a^μ und $\tilde{a}^{\tilde{\mu}}$ eines Ereignisses $a \in \mathcal{M}$ ein Zusammenhang der Form

$$\tilde{a}^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} a^{\mu} + \lambda^{\tilde{\mu}} \quad \Leftrightarrow \quad a^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \tilde{a}^{\tilde{\mu}} + \lambda^{\mu}. \quad (1.26)$$

Analog zu den räumlichen Indizes nehmen die Indizes μ, ν, \dots ohne Tilde die Werte t, x, y, z an, und die Indizes $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \dots$ mit Tilde nehmen die Werte $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ an. Die Transformation von Σ nach $\tilde{\Sigma}$ wird durch eine 4×4 -Matrix $\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu}$ und einen 4-Vektor $\lambda^{\tilde{\mu}}$ definiert. Umgekehrt sind $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ und λ^{μ} die entsprechenden Parameter der inversen Koordinatentransformation. Analog zu (1.16) gilt

$$\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\tilde{\nu}} = \delta^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^{\mu}_{\tilde{\rho}} \Lambda^{\tilde{\rho}}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (1.27)$$

und analog zu (1.17) gilt

$$\lambda^{\tilde{\mu}} = -\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \lambda^{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{\mu} = -\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \lambda^{\tilde{\mu}}. \quad (1.28)$$

Allerdings ist die verallgemeinerte Drehmatrix $\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu}$ jetzt keine orthogonale Matrix mehr, so dass wir nicht wie in (1.19) durch Transponieren die inverse Matrix bilden können.

Gesucht ist nun statt dessen die allgemeinste lineare Transformation (1.26), unter der die Gesetze der Newtonschen Mechanik invariant sind. Da wir diese Transformationen bereits kennen, wollen wir uns hier nicht lange mit einer Herleitung aufhalten, sondern sie nur in unsere Notation übersetzen. Dazu ist es nützlich, den Vektor λ^{μ} und die Matrix $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ in ihre zeitlichen und

räumlichen Anteile aufzuspalten. Wir deuten dies durch die folgende Vektornotation an,

$$(\lambda^{\mu}) = \begin{pmatrix} \lambda^t \\ \lambda^m \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}) = \begin{pmatrix} \Lambda^t_{\tilde{t}} & \Lambda^t_{\tilde{m}} \\ \Lambda^m_{\tilde{t}} & \Lambda^m_{\tilde{m}} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Etwas salopp sagen wir, dass der Index μ die "Werte" t und m annimmt, und der Index $\tilde{\mu}$ nimmt entsprechend die "Werte" \tilde{t} und \tilde{m} an. Wir sagen auch, dass der 4-Vektor λ^{μ} in seine *Zeitkomponente* λ^t und einen *räumlichen 3-Vektor* λ^m zerfällt. Komponentenweise ausgeschrieben lautet die Transformation (1.26) dann

$$\begin{aligned} a^t &= \Lambda^t_{\tilde{t}} a^{\tilde{t}} + \Lambda^t_{\tilde{m}} a^{\tilde{m}} + \lambda^t, \\ a^m &= \Lambda^m_{\tilde{t}} a^{\tilde{t}} + \Lambda^m_{\tilde{m}} a^{\tilde{m}} + \lambda^m. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Und wie sehen nun die bekannten Symmetrien der Newtonschen Mechanik aus? Sie bestehen aus einer Verschiebung der Zeitkoordinate um eine reelle Konstante τ , einer Verschiebung der Raumkoordinaten um einen 3-Vektor ξ^m , einer gleichförmige Bewegung, definiert durch noch einen 3-Vektor v^m , die Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme, sowie schließlich aus einer Drehung der Raumkoordinaten, gegeben durch eine orthogonale 3×3 -Matrix $\Delta^{\tilde{m}}_m$. Alles zusammen ergibt

$$\begin{aligned} a^t &= a^{\tilde{t}} + \tau, \\ a^m &= \Delta^m_{\tilde{m}} a^{\tilde{m}} + v^m a^{\tilde{t}} + \xi^m. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Dass der 3-Vektor v^m tatsächlich die Geschwindigkeit von $\tilde{\Sigma}$ relativ zu Σ angibt, lässt sich wie folgt sehen. Durch die Koordinatengleichung $\tilde{a}^{\tilde{m}} = 0$ wird in $\tilde{\Sigma}$ die Weltlinie eines im Ursprung ruhenden Beobachters definiert. Dieselbe Weltlinie wird in Σ durch folgende Koordinatengleichung definiert,

$$a^{\tilde{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^m = v^m (a^t - \tau) + \xi^m, \quad (1.32)$$

was offenbar eine Bewegung mit der Geschwindigkeit v^m beschreibt. Aus dem Vergleich von (1.30) mit (1.31) können wir nun die Komponenten der 4×4 -Matrix $\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu}$ und des 4-Vektors $\lambda^{\tilde{\mu}}$ ablesen. Es gilt

$$\lambda^t = \tau, \quad \lambda^m = \xi^m, \quad (1.33)$$

sowie

$$\Lambda^t_{\tilde{t}} = 1, \quad \Lambda^t_{\tilde{m}} = 0, \quad \Lambda^m_{\tilde{t}} = v^m, \quad \Lambda^m_{\tilde{m}} = \Delta^m_{\tilde{m}}, \quad (1.34)$$

wobei τ , ξ^m und v^m beliebig wählbare Parameter sind, und $\Delta^m_{\tilde{m}}$ eine dreidimensionale orthogonale Matrix ist, also

$$\delta_{\tilde{m}\tilde{n}} = \Delta^m_{\tilde{m}} \Delta^n_{\tilde{n}} \delta_{mn}. \quad (1.35)$$

Indem wir das in (1.29) einsetzen, erhalten wir schließlich die folgende Darstellung für den 4-Vektor λ^{μ} und die 4×4 -Matrix $\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu}$,

$$(\lambda^{\mu}) = \begin{pmatrix} \tau \\ \xi^m \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^m & \Delta^m_{\tilde{m}} \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Die Gruppe aller dieser Koordinatentransformation wird *Galilei-Gruppe* genannt. Sie ist die Symmetriegruppe der Newtonschen Mechanik. Ein Element der Galilei-Gruppe ist durch eine reelle Zahl τ , zwei 3-Vektoren λ^m und v^m , sowie eine orthogonale 3×3 -Matrix $\Delta^m_{\tilde{m}}$ gegeben. Insgesamt sind dies 10 freie Parameter.

Um das Inverse eines Gruppenelementes zu finden, müssen wir gemäß (1.27) die Drehmatrix invertieren und gemäß (1.28) den Vektor, der die Verschiebung definiert, von Σ nach $\tilde{\Sigma}$ transformieren und seine Richtung umkehren. Wenn wir die Parameter der inversen Transformation genauso zerlegen, also

$$(\lambda^{\tilde{\mu}}) = \begin{pmatrix} \tilde{\tau} \\ \xi^{\tilde{m}} \end{pmatrix}, \quad (A^{\tilde{\mu}}_{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^{\tilde{m}} & \Delta^{\tilde{m}}_m \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

so erhalten wir

$$\tilde{\tau} = -\tau, \quad \xi^{\tilde{m}} = -\Delta^{\tilde{m}}_m \xi^m, \quad v^{\tilde{m}} = -\Delta^{\tilde{m}}_m v^m, \quad \Delta^{\tilde{m}}_m = \delta^{\tilde{m}\tilde{n}} \delta_{mn} \Delta^n_{\tilde{n}}. \quad (1.38)$$

Aufgabe 1.2 Man zeige, dass durch (1.38) tatsächlich die inverse Galilei-Transformation definiert wird, und mache sich dies anschaulich klar. Wie lautet die Gruppen-Multiplikation, ausgedrückt durch die Parameter τ , ξ^m , v^m , und $\Delta^m_{\tilde{m}}$?

Betrachten wir nun statt der Koordinaten a^μ eines Ereignisses $a \in \mathcal{M}$ einen Raumzeit-Vektor $u \in \mathcal{V}$, so transformieren sich seine Komponenten wie folgt,

$$v^{\tilde{\mu}} = A^{\tilde{\mu}}_{\mu} v^{\mu} \Leftrightarrow v^{\mu} = A^{\mu}_{\tilde{\mu}} v^{\tilde{\mu}}. \quad (1.39)$$

Der Beweis ist völlig analog zu (1.22). Ebenso finden wir die folgende Beziehung zwischen den Basisvektoren e_{μ} und $e_{\tilde{\mu}}$,

$$e_{\tilde{\mu}} = A^{\mu}_{\tilde{\mu}} e_{\mu} \Leftrightarrow e_{\mu} = A^{\tilde{\mu}}_{\mu} e_{\tilde{\mu}}. \quad (1.40)$$

Für die Einheitsvektoren ergibt sich also die sehr einfache Transformation

$$e_{\tilde{t}} = e_t + v^m e_m, \quad e_{\tilde{m}} = \Delta^m_{\tilde{m}} e_m. \quad (1.41)$$

Offenbar ist $e_{\tilde{t}}$ gerade der Tangentialvektor der Weltlinie eines mit der Geschwindigkeit v^m gegenüber Σ bewegten Beobachters. Genau so hatten wir das Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ definiert. Zusätzlich wirkt dann noch eine Drehung auf die räumlichen Einheitsvektoren.

Um die Wirkung einer Galilei-Transformation auf die Koordinaten und Basisvektoren zu veranschaulichen, betrachten wir als vereinfachtes Beispiel eine zweidimensionale Raumzeit. Wir haben dann nur zwei Koordinaten (t, x) , und entsprechend zwei transformierte Koordinaten (\tilde{t}, \tilde{x}) . Es gibt keine räumlichen Drehungen, und wenn wir auch die Verschiebungen ignorieren, so gibt es nur einen einzigen Parameter der Transformation. Es ist die Geschwindigkeit v von $\tilde{\Sigma}$ gegenüber Σ . Die Transformationsmatrix ist gegeben durch

$$(A^{\mu}_{\tilde{\mu}}) = \begin{pmatrix} A^t_{\tilde{t}} & A^x_{\tilde{t}} \\ A^t_{\tilde{x}} & A^x_{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

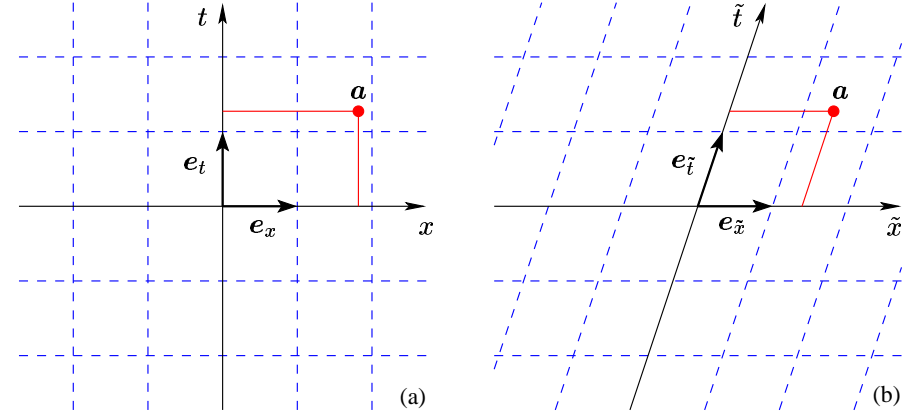


Abbildung 1.1: Dieselbe zweidimensionale Raumzeit, überdeckt mit zwei verschiedenen Koordinatensystemen Σ (a) und $\tilde{\Sigma}$ (b). Das Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ bewegt sich gegenüber Σ mit einer positiven Geschwindigkeit v . Die Zeitachsen unterschieden sich, die Raumachsen sind jedoch gleich. Die beiden Beobachter sind sich also darüber einig, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, jedoch nicht darüber, ob sie am selben Ort stattfinden.

Die beiden Koordinatensysteme (t, x) und (\tilde{t}, \tilde{x}) sind in Abbildung 1.1 dargestellt. Während die t -Achse die Weltlinie eines im Inertialsystem Σ ruhenden Beobachters beschreibt, stellt die \tilde{t} -Achse die Weltlinie eines Beobachters dar, der sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt. Von $\tilde{\Sigma}$ aus gesehen ergibt sich gerade die umgekehrte Situation. Für die Koordinaten eines Ereignisses $a \in \mathcal{M}$ gilt dann

$$a^{\tilde{t}} = a^t, \quad a^{\tilde{m}} = a^m - v a^t \Leftrightarrow a^m = a^{\tilde{m}} + v a^{\tilde{t}}. \quad (1.43)$$

Dies lässt sich auch in der Abbildung sehr leicht ablesen. Die Galilei-Transformation bewirkt eine *Scherung* der Koordinatenlinien. Für die Einheitsvektoren gilt entsprechend

$$e_{\tilde{t}} = e_t + v e_x \Leftrightarrow e_t = e_{\tilde{t}} - v e_{\tilde{x}}, \quad e_{\tilde{x}} = e_x, \quad (1.44)$$

und auch das ist in der Abbildung unmittelbar zu sehen. In einer vierdimensionalen Raumzeit können zusätzlich noch die räumlichen Einheitsvektoren gedreht werden, ansonsten sieht das Bild aber gleich aus.

Kommen wir nun zu der ursprünglichen Frage zurück. Können wir, so wie wir dies gerade für räumliche Vektoren getan haben, auch für Raumzeit-Vektoren eine Bilinearform, und folglich

eine Norm definieren? Machen wir zunächst den Ansatz

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u^\mu \eta_{\mu\nu} w^\nu, \quad (1.45)$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ eine beliebige 4×4 -Matrix ist. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass sie symmetrisch ist. Dies ist zwar nicht nötig, vereinfacht aber die folgenden Überlegungen, ohne dass dabei wichtige Aspekte verloren gehen. In einem anderen Inertialsystem gilt

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u^{\tilde{\mu}} \eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} w^{\tilde{\nu}}. \quad (1.46)$$

Als Kriterium für eine physikalisch sinnvolle Definition gilt auch hier wieder, dass die Komponenten der Matrizen $\eta_{\mu\nu}$ und $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ gleich sein müssen. Denn die Definition der ‘‘Länge’’ eines Raumzeit-Vektors soll ja in allen Inertialsystemen gleich lauten. Die Aufgabe ist also, eine 4×4 -Matrix zu finden, welche invariant ist unter der folgenden Transformation, analog zu (1.25),

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} \eta_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

und zwar für alle Matrizen der Form (1.36). Die Lösung ist nicht sofort offensichtlich, deshalb schreiben wir die Gleichung zunächst in räumlichen und zeitlichen Komponenten auf. Da es sich um eine Matrixgleichung handelt, bekommen wir eine Zeit-Zeit-, zwei Zeit-Raum-, und eine Raum-Raum-Komponente. Die Zeit-Zeit-Komponente lautet

$$\eta_{\tilde{t}\tilde{t}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{t}} \Lambda^{\nu}_{\tilde{t}} \eta_{\mu\nu} = \eta_{tt} + v^m \eta_{mt} + v^n \eta_{tn} + v^m v^n \eta_{mn}. \quad (1.48)$$

Hier haben wir die Summen über μ und ν ebenfalls in ihre räumlichen und zeitlichen Anteile aufgespalten, und anschließend aus (1.34) die Komponenten der Matrix entnommen. Dies muss für alle v^m gelten, und außerdem soll gemäß Voraussetzung $\eta_{tt} = \eta_{\tilde{t}\tilde{t}}$ gelten. Offensichtlich ist bereits das nur möglich, wenn

$$\eta_{tt} = \alpha, \quad \eta_{tn} = 0, \quad \eta_{mt} = 0, \quad \eta_{mn} = 0, \quad (1.49)$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Es ist gar nicht mehr nötig, die räumlichen Anteile der Gleichung (1.47) weiter zu untersuchen. Die Matrix $\eta_{\mu\nu}$ liegt bereits jetzt bis auf eine Konstante fest. Die bis auf Multiplikation mit einer Konstanten einzige Bilinearform, die in allen Inertialsystemen die gleiche Form annimmt, und daher die einzig sinnvolle Weise, einem Raumzeit-Vektor eine Norm zuzuordnen, ist

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u^t w^t \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{u}| = u^t. \quad (1.50)$$

Auf den ersten Blick erscheint dies ein wenig merkwürdig. So ist zum Beispiel die Norm sicher nicht positiv. Wir können uns aber physikalisch sehr leicht klar machen, dass dies tatsächlich die einzig sinnvolle Definition ist.

Betrachten wir dazu einen Raumzeit-Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, der den Abstandsvektor zweier Ereignisse \mathbf{a} und \mathbf{b} darstellt. Es gibt dann tatsächlich nur eine einzige aus diesem Abstandsvektor

abgeleitete Größe, über die sich alle Beobachter in allen Inertialsystemen einig sind. Dies ist der *zeitliche Abstand* der Ereignisse. Über alles andere, zum Beispiel den räumlichen Abstand, herrscht Uneinigkeit. Denn für einen Beobachter mögen die Ereignisse am selben Ort stattfinden, für einen anderen jedoch, der sich gegenüber dem ersten mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, finden sie nicht am selben Ort statt. Und genau dieser zeitliche Abstand wird in (1.50) als Norm definiert. Man kann sich das auch sehr leicht in Abbildung 1.1 klar machen. Die einzige Funktion eines Raumzeit-Vektors, die unter allen Scherungen invariant ist, ist seine Zeitkomponente.

Zeitartig und raumartig

Ja, aber, könnte man jetzt argumentieren, die Newtonsche Mechanik kennt doch sehr wohl so etwas wie einen räumlichen Abstand, und zwar als eine vom Koordinatensystem unabhängige physikalische Größe. Und das ist auch tatsächlich richtig. Allerdings müssen wir dabei eine gewisse Einschränkung machen. Unsere Überlegung ging davon aus, dass wir eine Bilinearform auf dem *gesamten* Vektorraum \mathcal{V} gesucht haben, welche in allen Inertialsystemen die gleiche Form annimmt.

Nun haben wir gesehen, dass es nur eine solche gibt, nämlich (1.50). Diese hat allerdings eine besondere Eigenschaft. Sie ist *entartet*, und daher gibt es einen ausgezeichneten Untervektorraum $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, nämlich den Null-Raum der Bilinearform,

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^t = 0\}. \quad (1.51)$$

Die erste Definition ist von den Koordinaten unabhängig. Das heißt alle Beobachter in allen Inertialsystemen sind sich darüber einig, dass dies ein besonders ausgezeichnete Unterraum ist. Die zweite Definition ist offenbar äquivalent. Sie ist daher ebenfalls invariant unter Galilei-Transformationen, obwohl die Komponente u^t bezüglich eines bestimmten Inertialsystems explizit vorkommt. Es folgt jedoch bereits aus der obigen Darstellung der Galilei-Transformationen, dass $u^t = u^{\tilde{t}}$, so dass auch die zweite Definition offenbar invariant ist.

Was bedeutet das nun physikalisch? Stellen wir uns den Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ wieder als einen Abstandsvektor zweier Ereignisse \mathbf{a} und \mathbf{b} vor, also in Komponenten $u^\mu = b^\mu - a^\mu$. Welche besondere Eigenschaft liegt vor, wenn $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$, also $u^t = b^t - a^t = 0$ gilt? Offenbar sind die Ereignisse \mathbf{a} und \mathbf{b} dann *gleichzeitig*. Da das in allen Inertialsystemen so ist, sich also alle Beobachter darüber einig sind, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden oder nicht, sagen wir, dass es in der Newtonschen Mechanik eine *absolute* Zeit gibt. Auch das lässt sich wieder in Abbildung 1.1 sehen. Zwei Ereignisse sind genau dann gleichzeitig, wenn sie ‘‘auf gleicher Höhe’’ liegen, und diese Eigenschaft wird durch eine Scherung nicht beeinflusst.

Es ist nützlich, die folgende Sprechweise einzuführen. Wir nennen einen Raumzeit-Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ *raumartig*, wenn $u^t = 0$. In Abbildung 1.1 ist ein Vektor raumartig, wenn er waagrecht ist. Ein raumartiger Vektor ist zum Beispiel der Abstandsvektor zweier gleichzeitiger Ereignisse. Der Tangentialvektor an eine Kurve, welche nur aus gleichzeitigen Ereignissen besteht, ist ebenfalls raumartig. Natürlich kann so eine Kurve keine Weltlinie sein.

Der Tangentialvektor einer Weltlinie ist stets *zeitartig*, das heißt es gilt $u^t \neq 0$. Wir unterscheiden auch zwischen *positiv* und *negativ* zeitartigen Vektoren $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, je nachdem ob $u^t > 0$ oder $u^t < 0$. Die jeweiligen Teilmengen nennen wir

$$\mathcal{Z}^+ = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^t > 0\}, \quad \mathcal{Z}^- = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^t < 0\}. \quad (1.52)$$

Man beachte, dass dies keine Untervektorräume sind. Aber auch hier gilt wieder, dass sich alle Beobachter darüber einig sind, ob ein Vektor zeitartig ist oder nicht, und wenn ja ob positiv oder negativ, denn die Definitionen sind invariant unter allen Galilei-Transformationen.

Und nun können wir auch die Lücke schließen. Es ist möglich, auf dem Unterraum $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ aller raumartigen Vektoren eine zweite Bilinearform einzuführen, die ebenfalls invariant unter Galilei-Transformationen ist. Das ist natürlich nur deshalb sinnvoll, weil der Unterraum aller raumartigen Vektoren selbst invariant ist. Und es ist tatsächlich eine zusätzliche Definition, denn die erste Bilinearform ist auf diesem Unterraum identisch Null. Natürlich ist diese zweite Bilinearform gerade wieder die übliche räumliche Form (1.11), mit der wir Längen und Winkel im Raum bestimmen können.

Wir können das Ergebnis wie folgt zusammenfassen. Auf dem Vektorraum \mathcal{V} gibt es genau eine Norm, welche invariant ist unter allen Galilei-Transformationen, nämlich

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{u}| = u^t. \quad (1.53)$$

Sie definiert den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse, wenn $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ der Abstandsvektor der beiden Ereignisse ist. Durch diese invariante Norm können wir zwischen zeitartigen und raumartigen Vektoren unterscheiden. Die raumartigen Vektoren bilden einen Untervektorraum $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, und auf diesem Unterraum gibt es eine zweite Bilinearform, nämlich

$$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u^m \delta_{mn} w^n. \quad (1.54)$$

Wie man leicht nachrechnet, ist diese Bilinearform ebenfalls invariant unter allen Galilei-Transformationen. Sie definiert für *gleichzeitige* Ereignisse den *räumlichen* Abstand sowie Längen und Winkel im Raum. Über diese sind sich dann wieder alle Beobachter in allen Inertialsystemen einig.

Zum Schluss kommen wir noch einmal auf die Weltlinien von oben zurück. Wir haben jetzt eine Norm auf dem Vektorraum \mathcal{V} . Diese können wir verwenden, um einen Einheitsvektor, und folglich einen Geschwindigkeitsvektor für eine Weltlinie zu definieren, welcher unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist. Der Tangentialvektor an eine Weltlinie ist stets zeitartig, denn sonst würde die Weltlinie mehrere gleichzeitige Ereignisse durchlaufen, oder zumindest in einem Punkt eine unendlich schnelle Bewegung darstellen. Wir können also annehmen, dass $|\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}/\mathrm{d}s| = \mathrm{d}\lambda^t/\mathrm{d}s \neq 0$, und zwar für alle $s \in \mathbb{R}$. Der Geschwindigkeitsvektor ist dann definiert durch

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}s} \bigg/ \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}s} \right| \quad \Rightarrow \quad (v^\mu) = \left(\frac{1}{v^m} \right). \quad (1.55)$$

Dieser “normierte” Vektor ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Weltlinie, wie man unter Verwendung von (1.10) leicht nachrechnet. Seine Zeitkomponente ist immer gleich Eins. Die räumlichen Komponenten stellen die gewöhnliche Geschwindigkeit dar, natürlich gemessen relativ zum Inertialsystem Σ in dem der Vektor dargestellt ist. Das sieht man am einfachsten, indem man eine ganz bestimmte Parametrisierung wählt, nämlich eine, bei dem der Kurvenparameter s mit der Zeitkoordinate t auf der Weltlinie übereinstimmt. Es gilt dann $\lambda^t(s) = s$, folglich $|\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}/\mathrm{d}s| = 1$ und

$$v^m = \frac{\mathrm{d}\lambda^m}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\lambda^m}{\mathrm{d}t}. \quad (1.56)$$

Das ist aber die übliche Definition einer Geschwindigkeit. Wir könnten nun hier weiter machen und Beschleunigung, Impuls, Kraft und so weiter definieren und die gesamte Newtonsche Mechanik, auch deren Hamiltonsche Formulierung, in eine Raumzeit-Sprache übersetzen. Der Vorteil einer solchen Formulierung wäre, dass wir es jeder Gleichung sofort ansehen könnten, dass sie invariant unter der Galilei-Gruppe ist, wenn in dieser Gleichung nur solche Größen vorkommen, von denen wir dies schon wissen, also etwa die oben definierten Bilinearformen. Wir wollen dies aber nicht tun, denn es soll ja gerade gezeigt werden, dass diese Vorstellung von der Raumzeit falsch ist.

2 Zur Elektrodynamik bewegter Körper

Dass die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefasst zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke zum Beispiel an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, dass der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind.

Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefassten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Soweit Albert in seiner wahrscheinlich bekanntesten Arbeit aus dem Jahre 1905¹. Sie trägt den unscheinbaren Titel dieses Kapitels, geht aber inhaltlich weit über dieses sehr spezielle Thema hinaus. Es ist die grundlegende und zugleich mehr oder weniger endgültige Formulierung der

¹A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17** (1905) S. 891.

Speziellen Relativitätstheorie. Es ist eine der sehr wenigen wissenschaftlichen Arbeiten, von der man sagen kann, dass sie einerseits eine völlig revolutionäre Idee vorstellt, die sich dann auch noch als überaus erfolgreich erweist, die andererseits aber durch ihre Klarheit und Einfachheit für jeden verständlich ist, der gewisse Grundkenntnisse in Physik besitzt. Die Lektüre sei also jedem empfohlen.

Wir wollen in diesem Kapitel die Schlussfolgerungen Einsteins nachvollziehen und in eine modernere, geometrische Sprache übersetzen. An einigen Stellen ist es dabei nützlich, ein paar Vereinfachungen zu machen. Wie aus den einleitenden Worten Einsteins bereits deutlich wird, ist die Grundidee die Betrachtung von Symmetrien der Naturgesetze. Die Überlegungen sind also genau von der Art wie wir sie im letzten Kapitel auf die Newtonsche Mechanik angewandt haben, jetzt allerdings bezogen auf die Maxwellsche Elektrodynamik.

Eine Wellengleichung

Um nicht unnötig viel Ballast mit uns herum zu tragen, wollen wir an dieser Stelle bereits eine kleine Vereinfachung machen. Wir betrachten eine vereinfachte Version der Elektrodynamik. Das elektrische und magnetische Vektorfeld ersetzen wir durch ein einzelnes skalares, also reellwertiges Feld, das wir ϕ nennen. Wir lassen auch keine Quellen, also keine Ladungen zu. Tatsächlich ist es zunächst nur eine einzige Eigenschaft der Elektrodynamik, welche hier von Bedeutung ist, und diese lässt sich auch mit Hilfe eines solchen vereinfachten Modells realisieren. Worauf es ankommt ist, dass das Feld einer *Wellengleichung* genügt, dass es also Lösungen der Bewegungsgleichungen gibt, die sich in der Raumzeit ausbreitende Wellen beschreiben.

Es sei also \mathcal{M} wieder die Raumzeit, und es sei Σ ein Inertialsystem mit Koordinaten (t, x, y, z) . Zunächst betrachten wir nur dieses eine Inertialsystem. Wir interessieren uns nicht dafür, ob es noch andere gibt. Das Feld ist dann als eine hinreichend glatte Abbildung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Die Ableitungen von ϕ nach den Koordinaten schreiben wir als $\partial_\mu \phi$, wobei $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$ und so weiter. Wie im letzten Kapitel können wir ∂_μ auch wieder aufspalten in den zeitlichen Anteil ∂_t und die räumlichen Anteile ∂_m , wenn wir diese unterscheiden wollen.

Die Bewegungsgleichung für das Feld ϕ soll die folgende Wellengleichung sein,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Delta \phi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t \phi = \delta^{mn} \partial_m \partial_n \phi. \quad (2.1)$$

Das Kronecker-Symbol haben wir wieder eingeführt, um die Summenkonvention anzuwenden. Tatsächlich kennen wir diese Wellengleichung aus der Elektrodynamik. Sie gilt zum Beispiel für das elektrische Potential im materiefreien Raum, wenn wir eine passende Eichung wählen. Wir können uns also an dieser Stelle vorstellen, dass ϕ das elektrische Potential ist, auch wenn wir später sehen werden, dass diese Vorstellung nicht ganz korrekt ist.

Wichtig ist hier eigentlich nur, dass in der Wellengleichung eine *Naturkonstante* vorkommt, nämlich die *Lichtgeschwindigkeit* c . Natürlich wissen wir, dass die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung eine Überlagerung von ebenen Wellen ist, und dass sich diese gerade mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Genau das gilt auch für die richtige Elektrodynamik, wir müssen

dann nur unser Feld ϕ als elektrisches Potential interpretieren und zusätzlich noch eine ähnliche Gleichung für das Vektorpotential aufstellen.

Doch erinnern wir uns nun an unsere Überlegungen aus dem letzten Kapitel. Dort hatten wir Newtons Mechanik als Beispiel gewählt und daraus die Symmetrien der Raumzeit abgeleitet. Wir fanden die Galilei-Gruppe als die maximale Gruppe, unter der die Gesetze der Mechanik invariant sind. Aber natürlich ist die Mechanik nicht die ganze Physik. Nach dem Relativitätsprinzip sollten *alle* Naturgesetze in *allen* Inertialsystemen gleich lauten. Die Frage ist also, gilt das auch für die Elektrodynamik, also für die obige Wellengleichung?

Wie man leicht nachprüft, ist das nicht der Fall. Wenn wir von einem Inertialsystem zu einem anderen übergehen, so ändert sich die Form der Gleichung (2.1). Betrachten wir das ein wenig genauer. Wir führen ein zweites Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ ein, so dass

$$a^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\mu} a^{\mu} + \lambda^{\tilde{\mu}}, \quad (2.2)$$

wobei $\Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\mu}$ und $\lambda^{\tilde{\mu}}$ die bereits früher eingeführten Parameter einer Galilei-Transformation sind. Für die Ableitungen folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial a^{\mu}} = \frac{\partial a^{\tilde{\mu}}}{\partial a^{\mu}} \frac{\partial}{\partial a^{\tilde{\mu}}} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mu} = \Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\mu} \partial_{\tilde{\mu}}. \quad (2.3)$$

Für die Zeit- und Raum-Komponenten dieser Matrix hatten wir gefunden

$$(\Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^{\tilde{m}} & \Delta^{\tilde{m}}{}_{\tilde{m}} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Als Parameter traten dabei die orthogonale räumliche Drehmatrix $\Delta^{\tilde{m}}{}_{\tilde{m}}$ und die Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme $v^{\tilde{m}}$ auf. Es folgt dann aus (2.3), dass

$$\partial_m = \Delta^{\tilde{m}}{}_{\tilde{m}} \partial_{\tilde{m}}, \quad \partial_t = \partial_{\tilde{t}} + v^{\tilde{m}} \partial_{\tilde{m}}. \quad (2.5)$$

Setzen wir das in (2.1) ein, so finden wir, dass das Feld ϕ im Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ einer etwas anderen Wellengleichung genügt, nämlich

$$\frac{1}{c^2} (\partial_{\tilde{t}} \partial_{\tilde{t}} \phi + 2v^{\tilde{m}} \partial_{\tilde{t}} \partial_{\tilde{m}} \phi) = \left(\delta^{\tilde{m}\tilde{n}} - \frac{v^{\tilde{m}} v^{\tilde{n}}}{c^2} \right) \partial_{\tilde{m}} \partial_{\tilde{n}} \phi. \quad (2.6)$$

Die Wellengleichung und damit die Maxwellsche Elektrodynamik ist offenbar nicht invariant unter Galilei-Transformationen. Die Gleichung im Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ beschreibt auch die Ausbreitung von Wellen, aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist jetzt abhängig von der Richtung. Im ursprünglichen Inertialsystem Σ ist dagegen die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen gleich c .

Es war wohl ein Fehler, dass wir im letzten Kapitel nur die Newtonsche Mechanik betrachtet haben. Hätten wir von Anfang an die ganze Physik einbezogen, hätten wir nicht die Galilei-Gruppe als Symmetriegruppe der Raumzeit gefunden, sondern nur diejenige Untergruppe, die

auch die Maxwell-Gleichungen invariant lässt. Wie man leicht nachprüft, besteht diese Untergruppe genau aus solchen Galilei-Transformationen mit $v^{\tilde{m}} = 0$, also nur den Zeit- und Raum-Translationen und den räumlichen Drehungen, aber nicht den gleichförmigen Bewegungen.

Was bedeutet das nun? Offenbar gibt es doch ein ausgezeichnetes Inertialsystem. Das Relativitätsprinzip ist also falsch. Zwar ist es mit rein mechanischen Mitteln nicht möglich, dieses ausgezeichnete Inertialsystem zu finden, wohl aber mit elektromagnetischen Mitteln. Das ausgezeichnete Inertialsystem ist dadurch definiert, dass sich das Licht in ihm in alle Richtungen gleich schnell ausbreitet. Natürlich war diese Eigenschaft der Elektrodynamik schon lange bekannt, und man postulierte, dass es ein *Medium* geben müsse, in dem sich elektromagnetische Wellen ausbreiten, so wie sich Schall in Gasen und Flüssigkeiten ausbreitet. Man nannte dieses Medium den *Äther*.

Damit hatte man eine Erklärung, warum es ein ausgezeichnetes Inertialsystem gibt. Es ist einfach dasjenige Inertialsystem, das relativ zum Äther in Ruhe ist. Was für Schall in Luft gilt, gilt entsprechend für Licht im Äther. Nur dann ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen in alle Richtungen gleich, wenn das gewählte Bezugssystem relativ zum Medium in Ruhe ist. Das einzige, was noch fehlte, war der *experimentelle* Nachweis des Äthers.

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Wie ist ein solcher experimenteller Nachweis möglich? Offenbar müssen wir zeigen, dass sich in einem allgemeinen Inertialsystem ein Lichtsignal in verschiedene Richtungen verschieden schnell ausbreitet. Das ist zunächst gar nicht so einfach, denn wie wir aus (2.6) entnehmen, tritt ein merklicher Effekt nur dann auf, wenn die Geschwindigkeit v des Inertialsystems relativ zum ruhenden System, also relativ zum Äther, mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar ist.

Sicher sind solche Geschwindigkeiten im Labor nicht erreichbar, schon gar nicht vor 100 Jahren, als zum ersten Mal solche Experimente in Angriff genommen wurden. Wenn wir aber annehmen, dass der Äther tatsächlich ein absolut ruhendes Inertialsystem definiert, also nicht wie eine Flüssigkeit wirbelnd durch das Weltall fließt, so sind genügend große Geschwindigkeiten durchaus verfügbar. Schließlich bewegt sich die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne mit einer Geschwindigkeit von etwa $v \approx 10^{-4}c$. Wenn wir also annehmen, dass das Sonnensystem relativ zum Äther ruht, so müsste es möglich sein, auf der Erde eine richtungsabhängige Abweichung der Lichtgeschwindigkeit um 10^{-4} zu messen. Wäre das Sonnensystem nicht in Ruhe, würde sich der Effekt nur noch verstärken.

Genau dies wurde am Ende des 19. Jahrhunderts versucht. Das wohl bekannteste Experiment ist das von Michelson und Morley². Da es zu dieser Zeit noch nicht möglich war, die Lichtgeschwindigkeit direkt zu messen, musste man auf einen Trick zurück greifen. Michelson und Morley benutzten ein *Interferometer*, wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Es war fest im Labor installiert und bestand aus zwei etwa gleich langen Armen. Ein Lichtstrahl fiel auf einen halbdurchlässigen

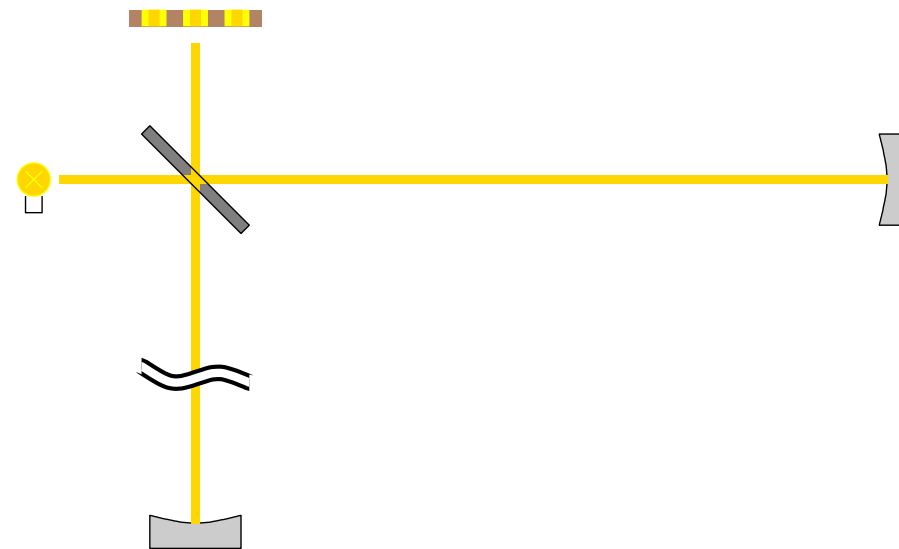


Abbildung 2.1: Das Interferometer von Michelson und Morley besteht aus zwei etwa gleich langen Armen. Das Licht wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel über die beiden Arme geleitet, am Ende reflektiert und durch den Spiegel wieder vereint. Am Ausgang wird ein charakteristisches Interferenzmuster sichtbar. Verändert sich die Laufzeit des Lichtes in einem Arm, zum Beispiel durch eine Veränderung der Lichtgeschwindigkeit, so verschiebt sich das Interferenzmuster.

Spiegel, teilte sich, durchlief die beiden Arme, wurde am Ende der Arme reflektiert, und vereinte sich wieder am halbdurchlässigen Spiegel.

Durch die Überlagerung der beiden Strahlen sieht man am Ausgang ein Interferenzmuster. Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Längen ℓ der beiden Arme seien exakt gleich, und das Licht stamme aus einer monochromatischen Quelle, hat also eine feste Frequenz ν . Gemäß unserer Herleitung von oben nehmen wir jedoch an, dass die Lichtgeschwindigkeit in den beiden senkrecht zueinander stehenden Armen verschieden ist und außerdem von der Laufrichtung abhängt. Betrachten wir zum Beispiel den Idealfall, in dem sich der Versuchsaufbau relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit v in Richtung des ersten Armes bewegt. Die Lichtgeschwindigkeit im ersten Arm ist dann auf dem Hin- bzw. Rückweg

$$c_{1+} = c + v, \quad c_{1-} = c - v. \quad (2.7)$$

²Eine kurze Übersicht über die zur Jahrhundertwende durchgeführten Experimente und deren Deutung durch Lorentz, Poincaré und Einstein sowie viele weitere Literaturhinweise findet man im ersten Kapitel von R. Sexl und H. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer Verlag (1976).

Im zweiten Arm läuft das Licht senkrecht zur Bewegungsrichtung des Äthers, so dass für die Lichtgeschwindigkeit auf dem Hin- und Rückweg gilt

$$c_{2+} = c_{2-} = \sqrt{c^2 - v^2}. \quad (2.8)$$

Daraus können wir die Laufzeiten bestimmen. Jeweils für den Hin- und Rückweg zusammen ergibt sich

$$t_1 = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v} = \frac{2\ell}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}, \quad t_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\ell}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.9)$$

Da v/c sehr klein ist, können wir dieses Ergebnis entwickeln und erhalten für die Laufzeitdifferenz

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{\ell}{c} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.10)$$

Um die daraus resultierende Größenordnung der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ der beiden Lichtwellen zu erhalten, multiplizieren wir das Ergebnis mit der Frequenz ν und setzen $\lambda = c/\nu$ für die rechnerische Wellenlänge im Ruhesystem des Äthers,

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \nu \Delta t \approx \nu \frac{\ell}{c} \frac{v^2}{c^2} = \frac{\ell}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.11)$$

Nun stellen wir zunächst fest, dass bei realistischen Größenordnungen, also $v/c = 10^{-4}$, sowie $\ell \approx 1\text{m}$ und $\lambda \approx 500\text{nm}$ mit $\Delta\phi/2\pi \approx 1/50$ tatsächlich ein messbarer Effekt auftritt, obwohl das Verhältnis v/c quadratisch eingeht. Es gab sogar zur damaligen Zeit einen gewissen Streit darüber, ob es denn prinzipiell überhaupt möglich wäre einen Effekt erster Ordnung im Verhältnis v/c nachzuweisen. Wir wollen aber auf diesen Disput hier nicht näher eingehen.

Das Interferometer von Michelson und Morley sollte also in der Lage sein, die Fahrt der Erde durch den Äther nachzuweisen. Allerdings muss man sich zunächst noch darüber Gedanken machen, wie man den Effekt denn nun praktisch misst. Die Laufzeitdifferenz der beiden Lichtwellen ist sicher nicht direkt messbar. Genausowenig ist die Phasenverschiebung direkt messbar, denn dazu müssen die Arme ja wirklich bis auf den Bruchteil einer Wellenlänge genau gleich lang sein. Man kann aber folgenden Trick benutzen. Vertauscht man die beiden Arme, so ändert sich das Vorzeichen der Phasenverschiebung. Wenn man also am Ausgang ein bestimmtes Interferenzmuster sieht, so wird sich dieses verschieben, wenn man den Apparat dreht.

Das wäre aber wiederum sehr unpraktisch, denn ein Drehen der Arme mitsamt aller Spiegel und der Lichtquelle würde zu Erschütterungen führen. Es wäre also nicht gewährleistet, dass die Längen der Arme wirklich gleich bleiben. Also benutzt man einen zweiten Trick. Der Versuchsaufbau dreht sich auch ohne weiteres Zutun innerhalb von 24 Stunden einmal um sich selbst. Wenn man sich ein ganzes Jahr Zeit nimmt, kann man sogar den Fall ausschließen, dass die Erde in diesem Moment gerade zufällig relativ zum Äther ruht. Man muss also nur beachten, dass die Richtungen der Arme so gewählt sind, dass diese sich auf ihrer täglichen Reise auch wirklich einmal senkrecht und einmal parallel zur Bewegungsrichtung der Erde im Sonnensystem ausrichten.

Ein weiterer Eingriff in den Versuchsaufbau ist dann gar nicht mehr nötig. Man braucht nur noch einen Tag lang das Interferenzmuster zu beobachten um festzustellen, ob sich die Erde tatsächlich wie angenommen durch den Äther bewegt. Erstaunlicherweise war das Ergebnis jedoch negativ. Es konnte keine Relativbewegung von Äther und Erde nachgewiesen werden. Auch alle anderen Versuche, eine solche Bewegung nachzuweisen, verliefen negativ. Es war also ein experimenteller Befund, dass das Licht sich in alle Richtungen und in allen Inertialsystemen gleich schnell ausbreitet. Oder zumindest in den Bezugssystemen, die ein Labor auf der Erde im Laufe der Tage und Jahre "durchläuft".

Genau genommen muss man sich an dieser Stelle noch damit auseinandersetzen, was genau aus diesen Experimenten folgt und was nicht. So folgt zum Beispiel nicht unmittelbar, dass die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen gleich ist. Man kann nur schließen, dass die Laufzeit auf jedem *geschlossenen* Weg nur von dessen Länge abhängt und nicht von der Lage im Raum oder von der Relativbewegung zum Äther. Auch im Interferometer wird immer nur die mittlere Lichtgeschwindigkeit auf dem Hin- und Rückweg gemessen. Aber wir wollen uns hier nicht mit diesen Details aufhalten, obwohl sie oft sehr interessant sind und man daraus viel über die wirkliche Aussagekraft von experimentellen Fakten lernen kann.

Was auch immer aus den Experimenten folgt, das Resultat ist offenbar im Widerspruch zu unserer Herleitung vom Anfang. Dort hatten wir folgenden Schluss gezogen. Wenn Lichtwellen den Maxwell'schen Gleichungen genügen, oder zumindest unserer vereinfachten Version, und wenn sie sich in einem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit c in alle Richtungen ausbreiten, dann breitet sie sich in einem anderen Inertialsystem mit einer anderen Geschwindigkeit aus, die zudem auch noch von der Richtung abhängt. Irgendeine Annahme, die wir gemacht haben, muss also falsch sein.

Das Relativitätsprinzip

Wir wollen versuchen, den Widerspruch aufzulösen, dabei aber von unseren Annahmen so wenige wie möglich aufzugeben. Es liegt nahe, das *Relativitätsprinzip* nicht aufzugeben, denn die Experimente haben es ja gerade in eindrucksvoller Weise bestätigt. Es ist nicht nur mit mechanischen Mitteln unmöglich, ein ausgezeichnetes Inertialsystem zu finden, sondern offenbar auch mit elektromagnetischen. Was die experimentellen Daten angeht, so wiegen in diesem Fall die letzteren sogar wesentlich schwerer, denn mit Hilfe elektromagnetischer Wellen sind sehr viel genauere Messungen möglich als mit mechanischen Apparaten, insbesondere wenn dabei große Geschwindigkeiten eine Rolle spielen. Postulieren wir also erneut:

Relativitätsprinzip (Poincaré, Einstein): Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.

Der Wortlaut ist der gleiche wie vorher. Aber nun soll dieses Prinzip für die ganze Physik gelten, also auch für die Elektrodynamik. Es schließt damit das Prinzip mit ein, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist. Es ist in eine abgeschwächten, aber praktisch gleichwertigen Form als erstes von Poincaré formuliert worden. Allerdings hat erst Einstein die gewaltige Tragweite dieses Postulates erkannt, insbesondere seine Auswirkungen auf das Verständnis

von Raum und Zeit. Poincaré dagegen postulierte nur, dass es prinzipiell unmöglich sei, eine Bewegung relativ zum Äther zu *messen*, ohne jedoch dessen Existenz aus der Elektrodynamik zu eliminieren.

Wir wollen außerdem annehmen, dass es immer noch die gleiche Art von Transformationen sind, die Inertialsysteme in Inertialsystem überführen, also Verschiebungen in Raum und Zeit, räumliche Drehungen und gleichförmige Bewegungen. Denn auch dagegen sprechen keinerlei Experimentelle Fakten. Was aber können wir dann noch ändern, um den Widerspruch aufzulösen? Es bleibt eigentlich nur noch eins. Wir können die Art und Weise ändern, *wie* diese Transformationen auf die Raum- und Zeitkoordinaten wirken. Die Tatsache, dass die Messergebnisse für elektromagnetische Wellen sehr viel genauer sind als die für mechanische Prozesse, legt den Schluss nahe, dass vielleicht die Newtonschen Gleichungen und damit die Galilei-Transformationen einer Korrektur bedürfen.

Da Verschiebungen und räumliche Drehungen keiner Korrektur bedürfen, denn diese sind ja Symmetrien sowohl der Mechanik also auch der Elektrodynamik, ziehen wir uns der Einfachheit halber wieder auf unsere in Abbildung 1.1 dargestellte, zweidimensionale Raumzeit zurück. Sei also Σ ein Inertialsystem mit Koordinaten (t, x) , und $\tilde{\Sigma}$ ein zweites Inertialsystem, mit Koordinaten (\tilde{t}, \tilde{x}) . Aus dem Relativitätsprinzip können wir bereits folgende sehr starke Einschränkung an die Transformation der Koordinaten machen. Zunächst muss die Transformation immer noch linear sein. Denn Licht breitet sich geradlinig aus, und das muss folglich in jedem Inertialsystem gelten.

Ferner nehmen wir an, $\tilde{\Sigma}$ bewege sich gegenüber Σ mit einer Geschwindigkeit v in Richtung der x -Achse. Wenn also die Weltlinie eines in $\tilde{\Sigma}$ ruhenden Beobachters durch die Koordinatengleichung $\tilde{x} = 0$ gegeben ist, so ist dieselbe Weltlinie in Σ durch die Koordinatengleichung $x - vt = 0$ gegeben. Wegen der Linearität folgt daraus

$$\tilde{x} = \gamma(v) (x - vt), \quad (2.12)$$

wobei der Faktor $\gamma(v)$ in irgendeiner Weise vom Parameter v der Transformation abhängen kann. Wir ignorieren dabei wieder die Verschiebungen, das heißt wir nehmen an, dass der willkürlich wählbare Ursprung der beiden Koordinatensystems dasselbe Ereignis ist. Ansonsten müssten wir zu (2.12) noch eine Konstante addieren, aber an der folgenden Herleitung würde sich nichts ändern.

Nun benutzen wir das Relativitätsprinzip sozusagen auf einer höheren Ebene. Da die beiden Inertialsysteme Σ und $\tilde{\Sigma}$ gleichberechtigt sind, darf es keine Möglichkeit geben, sie objektiv zu unterscheiden. Folglich muss sich Σ gegenüber $\tilde{\Sigma}$ mit der gleichen Geschwindigkeit v bewegen, nur in die andere Richtung. Es muss also gelten

$$x = \gamma(v) (\tilde{x} + v\tilde{t}). \quad (2.13)$$

Würde sich diese Beziehung formal von (2.12) unterscheiden, wäre die Beziehung zwischen den beiden Inertialsystemen nicht symmetrisch. Es wäre zum Beispiel das Inertialsystem ausgezeichnet, dass sich gegenüber dem anderen mit der höheren Geschwindigkeit bewegt. Auch muss gel-

ten $\gamma(v) = \gamma(-v)$, denn sonst könnten wir dasjenige mit dem höheren "Gamma-Faktor" objektiv vom anderen unterscheiden. Daher können wir in (2.13) statt $\gamma(-v)$ auch $\gamma(v)$ schreiben.

Nun haben wir aber bereits zwei lineare Gleichungen, und damit liegt die Transformation zwischen Σ und $\tilde{\Sigma}$ fest. Aufgelöst nach \tilde{t} und \tilde{x} ergibt sich

$$t = \gamma(v) \tilde{t} + \frac{\gamma^2(v) - 1}{v \gamma(v)} \tilde{x}, \quad x = \gamma(v) \tilde{x} + v \gamma(v) \tilde{t}. \quad (2.14)$$

Man beachte, dass wir bis jetzt noch nicht von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Gebrauch gemacht haben, und dass wir jetzt noch die Funktion $\gamma(v)$ bestimmen müssen. Bevor wir das tun, betrachten wir als Beispiel $\gamma(v) = 1$. In diesem Fall finden wir die Galilei-Transformationen wieder, nämlich

$$t = \tilde{t} \quad x = \tilde{x} + v\tilde{t}. \quad (2.15)$$

Aber diese erfüllen ja, wie wir wissen, nicht die Bedingung, dass die Lichtgeschwindigkeit konstant ist. Offenbar müssen wir eine andere Funktion $\gamma(v)$ einsetzen.

Betrachten wir dazu einen Lichtstrahl, der durch den gemeinsamen Koordinatenursprung der beiden Inertialsysteme nach rechts läuft. Seine Weltlinie wird in Σ durch die Koordinatengleichung $x = ct$ beschrieben. Nach dem Relativitätsprinzip wird dieselbe Weltlinie in $\tilde{\Sigma}$ durch die Koordinatengleichung $\tilde{x} = c\tilde{t}$ beschrieben. Indem wir die Gleichungen (2.12) und (2.13) verwenden, erhalten wir daraus die folgenden Beziehungen, die für jedes Ereignis auf dem Lichtstrahl gelten müssen,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \gamma(v) (x - vt) = \gamma(v) (c - v) t = \gamma(v) (1 - v/c) x, \\ x &= \gamma(v) (\tilde{x} + v\tilde{t}) = \gamma(v) (c + v) \tilde{t} = \gamma(v) (1 + v/c) \tilde{x}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Daraus folgt, indem wir die beiden Gleichungen ineinander einsetzen,

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.17)$$

Diese Funktion der Geschwindigkeit v wird üblicherweise *relativistischer Gamma-Faktor* genannt. Er wird uns noch sehr oft begegnen. Man beachte, dass $\gamma(0) = 1$, $\gamma(v) > 1$ für $0 < v < c$, und $\gamma(v) \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow c$.

Damit kennen wir die allgemeinste mögliche Transformation zwischen zwei Inertialsystemen. Wenn wir die Verschiebungen wieder zulassen, lautet sie

$$a^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} a^{\mu} + \lambda^{\tilde{\mu}} \Leftrightarrow a^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} a^{\tilde{\mu}} + \lambda^{\mu}. \quad (2.18)$$

wobei λ^{μ} ein beliebiger Vektor ist, und die Matrix $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ durch einen einzigen Parameter v gegeben ist, nämlich

$$(\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}) = \begin{pmatrix} 1 & v/c^2 \\ \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Diese Matrix unterscheidet sich offenbar von der entsprechenden Matrix (1.42) für eine Galilei-Transformation. Wir finden diese aber wieder, und zwar im Limes $c \rightarrow \infty$. Die Galilei-Transformation ergibt sich also im Limes einer unendlich großen Lichtgeschwindigkeit, oder umgekehrt im Limes kleiner Relativgeschwindigkeiten v . Das ist natürlich was wir erwarten müssen, denn für langsam bewegte Objekte gilt ja bekanntlich die Newtonsche Mechanik.

Andererseits gibt es nun eine Einschränkung an den Parameter v der Transformation. Offenbar muss $-c < v < c$ gelten, sonst ist die Transformation nicht definiert. Das hat folgenden einfachen Grund. Wenn sich $\tilde{\Sigma}$ gegenüber Σ mit der Geschwindigkeit v bewegt, aber in Σ die gleiche Lichtgeschwindigkeit gemessen werden soll, dann ist das natürlich nur dann möglich, wenn der Beobachter in $\tilde{\Sigma}$ das Licht nicht schon eingeholt oder überholt hat. Im Limes $c \rightarrow \infty$ fällt diese Einschränkung weg, so dass Galilei-Transformationen für beliebig große Relativgeschwindigkeiten definiert sind.

Die Lorentz-Transformation

Fassen wir noch einmal zusammen, was wir gerade hergeleitet haben. Wir waren vom Relativitätsprinzip ausgegangen, und haben daraus die allgemeinste mögliche, damit verträgliche lineare Transformation zwischen zwei Inertialsystemen abgeleitet. Wir fanden, dass diese durch eine Verschiebung in Raum und Zeit, sowie eine verallgemeinerte Drehmatrix (2.19) gegeben ist. Diese verallgemeinerte Drehung wird *Lorentz-Transformation* genannt. Wir wollen uns diese nun graphisch veranschaulichen.

In Abbildung 2.2 sehen wir noch einmal unsere zweidimensionale Raumzeit. Auf der linken Seite sind die Koordinatenlinien in Σ eingezeichnet, also die t -Achse und die x -Achse und die Linien konstanter Koordinaten. Die Einheiten sind dabei so gewählt, dass die Lichtgeschwindigkeit c gerade der Winkelhalbierenden entspricht. Eine Einheit von einer Sekunde auf der Zeitachse entspricht also einer Lichtsekunde, rund 300000km, auf der Raumachse. Es sind außerdem zwei Lichtstrahlen eingezeichnet, die nach links und rechts durch den Koordinatenursprung laufen. Sie werden in Σ durch die Koordinatengleichungen $x = ct$ und $x = -ct$ beschrieben.

Auf der rechten Seite sehen wir die Koordinatenlinien in $\tilde{\Sigma}$, wie sie sich aus (2.19) für eine positive Geschwindigkeit v ergeben. Im Unterschied zu Abbildung 1.1 ist jetzt nicht nur die \tilde{t} -Achse gegenüber der t -Achse geneigt, sondern auch die \tilde{x} -Achse gegenüber der x -Achse. Das hat zur Folge, dass der gleiche Lichtstrahl, der entlang der Winkelhalbierenden in Σ verläuft, auch in $\tilde{\Sigma}$ entlang der Winkelhalbierenden der beiden Achsen verläuft. Also bewegt sich der Lichtstrahl in beiden Inertialsystemen mit derselben Geschwindigkeit c .

Um die Eigenschaften dieser Transformation besser darstellen zu können, empfiehlt es sich, die universelle Naturkonstante c aus allen Formeln zu eliminieren. Dies ist ein gängiger Trick in der theoretischen Physik, der auch in vielen anderen Bereichen seine Anwendung findet, und zwar immer dann wenn Naturkonstanten auftreten, die mit Einheiten behaftet sind. Wenn es eine fundamentale Geschwindigkeit gibt, dann können wir diese verwenden, um Längen- und Zeiteinheiten ineinander umzurechnen. Wir kennen das aus der Astronomie, wo Entfernungen üblicherweise

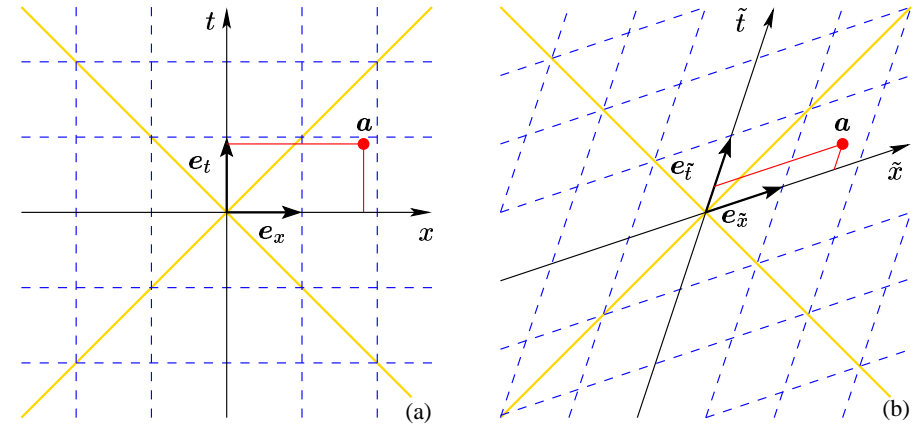


Abbildung 2.2: Graphische Darstellung einer Lorentz-Transformation in einer zweidimensionalen Raumzeit. Die t - und x -Achse sind so gewählt, dass der Zeit Δt genau eine Länge $\Delta x = c \Delta t$ entspricht. Ein Lichtstrahl bewegt sich also entlang der Winkelhalbierenden im Inertialsystem Σ . Die \tilde{t} - und \tilde{x} -Achse des Inertialsystems $\tilde{\Sigma}$ sind gegenüber der t - und x -Achse um den gleichen Winkel, jedoch in unterschiedliche Richtungen geneigt, so dass derselbe Lichtstrahl auch im Inertialsystem Σ auf der Winkelhalbierenden verläuft.

in *Lichtjahren* gemessen werden. Für irdische Verhältnisse wären *Lichtsekunden* vielleicht angemessener, oder *Lichtnanosekunden*, aber die Idee ist natürlich dieselbe.

Wir können aber noch weiter gehen und einfach eine neue Längeneinheit definieren, die wir *Sekunde* nennen. Das ist die Strecke, die das Licht in einer Sekunde (als Zeiteinheit) zurücklegt. Wir messen also einfach Zeiten und Längen in derselben Einheit. Wir können uns das auch ganz praktisch vorstellen. Um eine Länge zu messen, senden wir einen Lichtstrahl hin und zurück, messen die vergangene Zeit, teilen diese durch zwei, und statt dann noch weiter zu rechnen, sagen wir einfach, das Ergebnis sei die Länge. Welchen Wert hat dann die Lichtgeschwindigkeit c ? Nun, in einer Sekunde (Zeit) legt das Licht genau eine Sekunde (Weg) zurück, also ist die Geschwindigkeit (Weg/Zeit) $c = 1$.

Wenn wir uns einmal auf dieses Verfahren zur Messung von Längen geeinigt haben, können wir in allen Formeln $c = 1$ setzen. Das Relativitätsprinzip sagt uns, dass es ein sicheres Verfahren ist, denn die Lichtgeschwindigkeit hängt ja nicht vom Bewegungszustand oder von der Richtung im Raum ab. Jede andere Geschwindigkeit v , zum Beispiel die eines vorbeifahrenden Zuges, messen wir ebenso. Der Zahlenwert von v gibt den Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit an. Man sagt auch, die Geschwindigkeit sei eine *dimensionslose* Größe, also eine Zahl ohne Einheit. Das

ist zunächst etwas gewöhnungsbedürftig. Es gibt aber ein ähnliches und besser bekanntes Beispiel aus der Geometrie.

Üblicherweise misst man einen Winkel erst einmal in einer bestimmten Einheit “Grad”. Dann aber stellt man fest, dass es so etwas gibt wie einen ausgezeichneten, universellen Winkel, nämlich einen Vollkreis mit 360 Grad. Diese “Naturkonstante” ist vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit. Ihre Existenz bedeutet, dass es völlig unnötig war, die Einheit “Grad” zu erfinden. Wir können Winkel einfach in Bruchteilen des Vollkreises messen, also in *natürlichen* Einheiten. Hier hat sich zwar noch ein oft nützlicher Faktor 2π eingeschlichen, aber aber den können wir in diesem Zusammenhang vernachlässigen. Die Situation ist völlig analog. Die Existenz einer universellen Geschwindigkeit besagt, dass es eigentlich unnötig war, das “Meter” einzuführen, nachdem man schon die “Sekunde” definiert hatte.

Aufgabe 2.1 *Wie groß ist die Erdbeschleunigung g , wenn $c = 1$ ist?*

Was ist der Vorteil dieser neuen Längenskala? Zunächst können wir Raumzeit-Koordinaten und 4-Vektoren ein wenig besser handhaben. Ihre Komponenten haben keine unterschiedlichen Einheiten mehr. Während bisher die Zeitkomponente u^t eines Raumzeit-Vektors \mathbf{u} in Sekunden, die Raumkomponenten u^m aber in Metern gemessen wurden, haben nun alle Komponenten dieselbe Einheit, nämlich Sekunden. Damit vereinfacht sich auch die Darstellung der Lorentz-Transformation, das heißt der Matrix (2.19). Ihre Komponenten sind jetzt alle dimensionslos, und es gilt

$$(A^\mu_{\tilde{\mu}}) = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.20)$$

Ausgeschrieben in Koordinaten lautet also die Transformation von Σ nach $\tilde{\Sigma}$

$$\tilde{t} = \gamma(v) (t - vx), \quad \tilde{x} = \gamma(v) (x - vt), \quad (2.21)$$

oder umgekehrt

$$t = \gamma(v) (\tilde{t} + v\tilde{x}), \quad x = \gamma(v) (\tilde{x} + v\tilde{t}). \quad (2.22)$$

Aus dieser symmetrischen Darstellung erkennen wir, dass sich die Koordinatenachsen tatsächlich genau so verhalten wie in Abbildung 2.2 dargestellt. Noch deutlicher wird das, wenn wir das Verhalten von Raumzeit-Vektoren betrachten. Wir erinnern uns, dass die Komponenten eines Raumzeit-Vektors $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ wie folgt transformieren,

$$u^{\tilde{\mu}} = A^{\tilde{\mu}}_{\mu} u^{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad u^{\mu} = A^{\mu}_{\tilde{\mu}} u^{\tilde{\mu}}, \quad (2.23)$$

und dass sich daraus die folgende Transformation der Basisvektoren ergibt,

$$\mathbf{e}_{\tilde{\mu}} = A^{\mu}_{\tilde{\mu}} \mathbf{e}_{\mu}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_{\mu} = A^{\tilde{\mu}}_{\mu} \mathbf{e}_{\tilde{\mu}}, \quad (2.24)$$

wobei $A^{\tilde{\mu}}_{\mu}$ die zu $A^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ inverse Matrix ist, also

$$A^{\tilde{\nu}}_{\rho} A^{\rho}_{\tilde{\mu}} = \delta^{\tilde{\nu}}_{\tilde{\mu}}, \quad A^{\mu}_{\tilde{\rho}} A^{\tilde{\rho}}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (2.25)$$

Die zu (2.20) inverse Matrix ist

$$(A^{\tilde{\mu}}_{\mu}) = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Damit erhalten wir schließlich die folgende Transformation der in Abbildung 2.2 dargestellten Basisvektoren

$$\mathbf{e}_{\tilde{t}} = \gamma(v) (\mathbf{e}_t + v \mathbf{e}_x), \quad \mathbf{e}_{\tilde{x}} = \gamma(v) (\mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_t), \quad (2.27)$$

und daraus lesen wir ab, dass die beiden Achsen tatsächlich um den gleichen Winkel geneigt werden, und zwar so dass die Winkelhalbierende auch nach der Transformation wieder die Winkelhalbierende ist.

Aufgabe 2.2 *Es sei Σ_2 ein Inertialsystem, welches sich relativ zu Σ_1 mit der Geschwindigkeit v_{21} bewegt. Ferner sei Σ_3 ein Inertialsystem, das sich relativ zu Σ_2 mit der Geschwindigkeit v_{32} bewegt. Mit welcher Geschwindigkeit v_{13} bewegt sich Σ_1 relativ zu Σ_3 ? Man setze in das Ergebnis die Lichtgeschwindigkeit c an der richtigen Stelle wieder ein und diskutiere den Grenzfall $c \rightarrow \infty$.*

Zeitmessung

Wir wollen nun aus dem Ergebnis einige physikalische Schlussfolgerungen ziehen. Was bedeutet es, dass sich die Koordinaten unter einer Lorentz-Transformation gerade so und nicht anders verhalten? Betrachten wir zunächst eine Zeitmessung. Eine Uhr soll in einem Inertialsystem Σ ruhen. Ihre Weltlinie ist definiert durch $x = 0$, und die auf der Uhr angezeigte Zeit T soll gleich der Zeitkoordinate t sein. Genau so soll natürlich eine Uhr funktionieren. Zusätzlich betrachten wir eine zweite Uhr, die in einem anderen Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ ruht, sich also relativ zur ersten Uhr gleichförmig mit einer Geschwindigkeit v bewegt. Die von dieser Uhr angezeigte Zeit nennen wir \tilde{T} .

Natürlich können wir das ganze Geschehen auch im Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ beschreiben. Dann ruht die zweite Uhr. Ihre Weltlinie wird durch die Koordinatengleichung $\tilde{x} = 0$ beschrieben, und die von ihr angezeigte Zeit \tilde{T} ist die Zeitkoordinate \tilde{t} in diesem Inertialsystem. Diese Situation ist in Abbildung 2.3 dargestellt, wobei einmal die Gitterlinien von Σ , einmal die von $\tilde{\Sigma}$ eingezeichnet sind. Die Uhren passieren einander im Ursprung beider Koordinatensysteme, und an diesem Ereignis werden sie beide auf Null gestellt, das heißt an dieser Stelle in der Raumzeit gilt $T = 0$ und $\tilde{T} = 0$.

Aus der Sicht eines Beobachters im Inertialsystem Σ ergibt sich folgende Situation. Zu einer späteren Zeit $t > 0$ liest er beide Uhren ab. Die in Σ ruhende Uhr befindet sich am Ort $x = 0$ und zeigt die Zeit $T = t$ an. Die in $\tilde{\Sigma}$ ruhende Uhr befindet sich am Ort $x = vt$. Die angezeigte Zeit ist

$$\tilde{T} = \tilde{t} = \gamma(v) (t - vx) = \gamma(v) (1 - v^2) t = \frac{T}{\gamma(v)}. \quad (2.28)$$

Offenbar geht die bewegte Uhr zu langsam. Die von ihr angezeigte Zeitspanne, die seit dem Zusammentreffen der beiden Uhren vergangen ist, ist kleiner als die von der ersten Uhr angezeigte

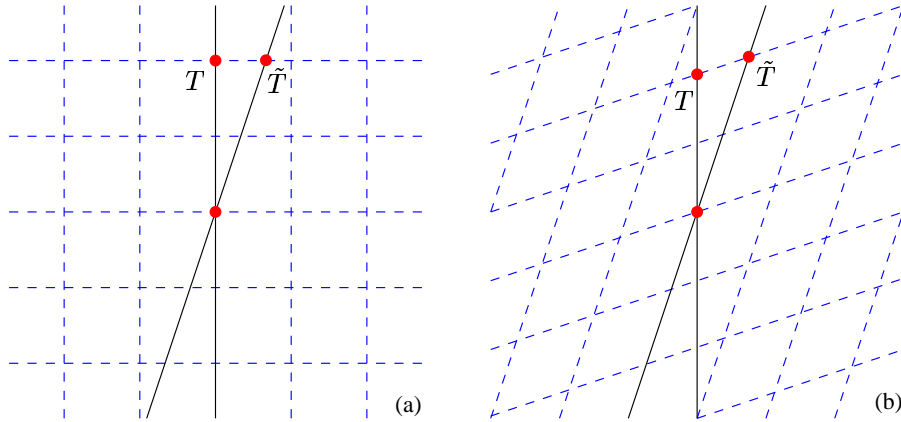


Abbildung 2.3: Die Weltlinien von zwei Uhren, von denen eine im Inertialsystem Σ ruht und die Zeit $T = t$ anzeigt, die andere im Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ ruht und die Zeit $\tilde{T} = \tilde{t}$ anzeigt. Werden beide Uhren gleichzeitig in Σ abgelesen (a), so gilt $T > \tilde{T}$, die bewegte Uhr geht also langsamer. Umgekehrt gilt $\tilde{T} > T$, wenn beide Uhren gleichzeitig in $\tilde{\Sigma}$ abgelesen werden (b). Der scheinbare Widerspruch beruht darauf, dass sich zwei gegeneinander bewegte Beobachter nicht darüber einig sind, was *gleichzeitig* bedeutet.

Zeitspanne. Für einen in Σ ruhenden Beobachter sieht es so aus, als verginge die Zeit im bewegten Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ langsamer. Dieses Phänomen wird *Zeitdilatation*, also *Zeitstreckung* genannt.

Zeitdilatation: Bewegte Uhren gehen langsamer als ruhende.

Und wie sieht die Situation aus der Sicht eines in $\tilde{\Sigma}$ ruhenden Beobachters aus? Wegen des Relativitätsprinzips sollte auch der zu dem Schluss kommen, dass die bewegte Uhr langsamer geht als die ruhende. Und tatsächlich können wir unsere Rechnung wiederholen, indem wir einfach Σ und $\tilde{\Sigma}$ vertauschen.

Zu einem Zeitpunkt $\tilde{t} > 0$ liest der in $\tilde{\Sigma}$ ruhende Beobachter beide Uhren ab. Die von der relativ zu ihm ruhenden Uhr angezeigte Zeit ist $\tilde{T} = \tilde{t}$. Die relativ zu ihm bewegte Uhr befindet sich am Ort $\tilde{x} = -v\tilde{t}$, denn sie bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $-v$ in Richtung der \tilde{x} -Achse. Die von der bewegten Uhr angezeigte Zeit ist natürlich immer noch die Koordinate t im Inertialsystem Σ , also

$$T = t = \gamma(v)(\tilde{t} + v\tilde{x}) = \gamma(v)(1 - v^2)\tilde{t} = \frac{\tilde{T}}{\gamma(v)}. \quad (2.29)$$

Auch jetzt geht also wieder die bewegte Uhr langsamer als die ruhende. Aber ist das nicht ein Widerspruch? Welche Uhr geht denn nun langsamer? Die in Σ ruhende, oder die in $\tilde{\Sigma}$ ruhende? Offenbar hängt auch die Antwort auf diese scheinbar objektive Frage vom Bezugssystem ab. Es geht immer die Uhr langsamer, die sich bewegt.

Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch sehen wir in Abbildung 2.3. Dort sind jeweils die Ereignisse markiert, bei denen die Zeiten T und \tilde{T} abgelesen werden. Im ersten Fall, wenn die Ablesung durch einen in Σ ruhenden Beobachter erfolgt, geschieht die Ablesung *gleichzeitig*, also auf einer Koordinatenlinie konstanter Zeit t . Das hatten wir in (2.28) verwendet. Dort hatten wir angenommen, dass im Moment des Ablesens die Zeitkoordinate t für beide Uhren gleich ist. Das ist der in Abbildung 2.3(a) dargestellte Fall.

Das gleiche gilt bei einer Ablesung der Uhren durch einen Beobachter, der in $\tilde{\Sigma}$ ruht. Allerdings bedeutet *gleichzeitig* jetzt, dass die Zeitkoordinate \tilde{t} im Moment des Ablesens für beide Uhren gleich ist. Und wie wir deutlich in Abbildung 2.3(b) sehen, bedeutet *gleichzeitig* in $\tilde{\Sigma}$ nicht dasselbe wie *gleichzeitig* in Σ . Und das löst den scheinbaren Widerspruch auf. Weder die eine noch die andere Uhr geht objektiv langsamer. Um diese Frage überhaupt sinnvoll stellen zu können, müssen wir zunächst genau definieren, was wir darunter verstehen wollen, dass eine Uhr langsamer geht als eine andere.

Um das Problem mit der Gleichzeitigkeit, das wir gleich noch ein wenig näher untersuchen werden, zu umgehen, können wir die Uhren auch wieder zusammenbringen, und damit das Ablesen sozusagen objektivieren. Dazu betrachten wir die Situation in Abbildung 2.4(a). Dargestellt sind dort die Weltlinien von zwei, sagen wir Zwillingen, von denen sich eine stets in Ruhe, zum Beispiel auf der Erde befindet, die andere jedoch auf eine Weltraumreise geht. Beide haben natürlich eine Uhr dabei. Nach einer kurzen Beschleunigungsphase entfernt sich eine Schwester mit der Geschwindigkeit v von der Erde, dann kehrt sie um und kehrt mit der gleichen Geschwindigkeit v zurück.

Wenn sie ihre Schwester wieder sieht, stellt sie fest, dass die Weltraumreise offenbar ein Jungbrunnen war. Tatsächlich ist für die reisende Schwester eine kürzere Zeit vergangen als für die zu Hause gebliebene. Bezeichnen wir die auf der Erde vergangene Zeit mit T , und die für die reisende Schwester vergangene Zeit mit \tilde{T} , so gilt auch hier wieder die Beziehung

$$\tilde{T} = \frac{T}{\gamma(v)}. \quad (2.30)$$

Das sieht man sehr leicht, indem man den Vorgang in zwei Teile zerlegt, und die vergangenen Zeiten addiert. Der erste Teilvorgang, während sich die beiden voneinander entfernen, entspricht genau dem Vorgang in Abbildung 2.3(a). Für den zweiten Teil, den Rückflug, gilt das gleiche, nur mit umgekehrter Flugrichtung.

Also ist die auf der Weltraumreise vergangene Zeit tatsächlich kürzer. Dieses Phänomen wird, wegen der scheinbaren Symmetrie der Situation, als *Zwillingsparadoxon* bezeichnet. Die scheinbare Symmetrie kann man so ausdrücken, dass sich die beiden zuerst voneinander entfernen, und dann wieder einander nähern, und zwar jeweils mit einer konstanten Geschwindigkeit v . Dann

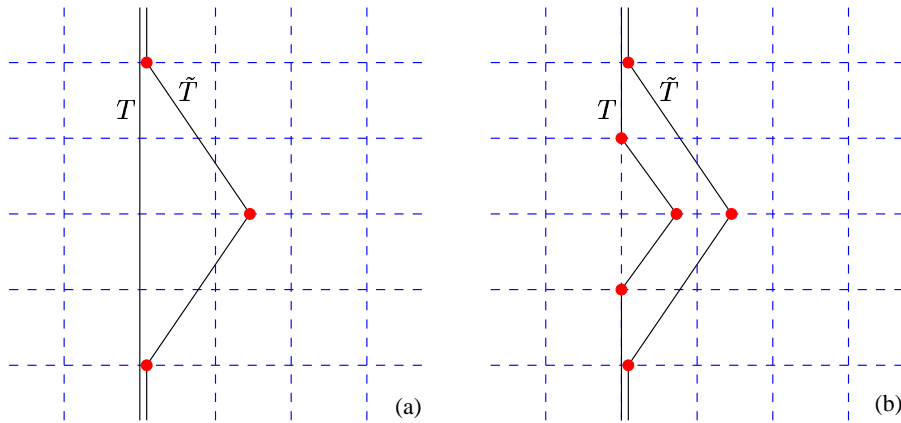


Abbildung 2.4: Eine Weltraumreisende in (a) entfernt sich zunächst von ihrer ruhenden Zwillingsschwester mit der Geschwindigkeit v und kehrt anschließend zurück. Die für die reisende Schwester vergangene Zeit \tilde{T} ist um einen Faktor $1/\gamma(v)$ kürzer als die für die ruhende Schwester vergangene Zeit T . Der Einfluss der Beschleunigungsphasen kann eliminiert werden, indem auch die zunächst ruhende Schwester in (b) eine kleine Reise unternimmt. Dann gilt immer noch $\tilde{T} < T$.

ist es natürlich paradox, dass für eine Schwester eine längere Zeit vergangen sein soll als für die andere. Es liegt aber in Wirklichkeit keine Symmetrie vor, denn die eine Schwester erfährt eine Beschleunigung, die andere nicht. Die Symmetrie wird dadurch gebrochen, dass die reisende Schwester unterwegs das Inertialsystem wechselt.

Aufgabe 2.3 *James Lovell ist der einzige Mensch, der es zweimal bis zum Mond und zurück geschafft hat, ohne jemals dort zu landen. Wieviel Zeit hat er gegenüber seinem imaginären Zwilling Jimmy Lovell dadurch gewonnen?*

Aufgabe 2.4 *Man könnte auch argumentieren, dass es gar nicht eine wirkliche Zeitdilatation ist, die sich auf den Gang der Uhren, und folglich auch auf den Alterungsprozess der Weltraumfahrer auswirkt, sondern dass der Effekt durch die Beschleunigung hervorgerufen oder vielleicht sogar kompensiert wird. Man schlieÙe dies aus, indem man den in Abbildung 2.4(b) dargestellten Vorgang diskutiere, bei dem beide Schwestern die gleichen Beschleunigungen erfahren.*

Gleichzeitigkeit

Kehren wir nun noch einmal zum Problem der Gleichzeitigkeit zurück. Um es ein wenig deutlicher zu machen, stellen wir uns folgende, leicht veränderte Situation vor. Statt einer einzigen in Σ ruhenden Uhr betrachten wir zwei solche Uhren, die sich an verschiedenen Orten befinden, aber relativ zueinander und zu Σ ruhen. Sagen wir, sie befinden sich an den Orten $x = x_1$ und $x = x_2$, und die von ihnen angezeigten Zeiten seien T_1 und T_2 . Die dritte Uhr, also die, die sich relativ zu den ersten beiden bewegt und die Zeit \tilde{T} anzeigt, passiert die beiden anderen Uhren nacheinander. Beim Passieren der ersten Uhr können wir die angezeigten Zeiten T_1 und \tilde{T} vergleichen. Beim Passieren der zweiten Uhr können wir die angezeigten Zeiten T_2 und \tilde{T} vergleichen.

Aber wie können wir jetzt feststellen, ob die eine oder andere Uhr langsamer geht? Offenbar müssen wir die ersten beiden, zueinander ruhenden Uhren, vor dem Experiment *synchronisieren*. Sonst können wir mit dem Ergebnis nichts anfangen. Denn wir wissen ja nichts über die Beziehung zwischen T_1 und T_2 . Die Frage ist also, wie können wir sicher stellen, dass zwei relativ zueinander ruhende Uhren auch tatsächlich *dieselbe* Zeit anzeigen? Tatsächlich müssen wir nur wieder auf das Relativitätsprinzip zurückgreifen, und auf die Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit eine universelle Konstante ist.

Zunächst sollten wir feststellen, ob zwei gegebene Uhren tatsächlich zueinander in Ruhe sind. Das können wir wie folgt tun. Wir senden in regelmäßigen Abständen ein Lichtsignal von einer Uhr zur anderen, welches dort reflektiert und zurückgesandt wird. Wenn sich die Gesamtlaufzeit für das Lichtsignal, gemessen mit der ersten Uhr, nicht ändert, dann befindet sich die zweite Uhr relativ zur ersten in Ruhe. Aber das heißt natürlich noch lange nicht, dass die beiden Uhren die gleiche Zeit anzeigen, also synchron sind. Das stellen wir wie folgt sicher. Wenn die erste Uhr die Zeit T_1 zeigt, senden wir ein Lichtsignal zur zweiten Uhr. Wenn es dort ankommt, zeigt die zweite Uhr die Zeit T'_2 an.

Umgekehrt senden wir zur Zeit T_2 von der zweiten Uhr ein Lichtsignal zur ersten Uhr, welches dort zur Zeit T'_1 ankommt. Unter "zur Zeit" verstehen wir dabei dasjenige Ereignis, an dem die jeweilige Uhr diese Zeit anzeigt. Die Situation ist in Abbildung 2.5(a) dargestellt. Wir sagen, die Uhren seien synchron, wenn

$$T'_1 - T_2 = T'_2 - T_1. \quad (2.31)$$

Das heißt, die gemessenen Laufzeiten der Lichtsignale sind gleich. Man macht sich leicht klar, dass diese Synchronisation unabhängig davon ist, wann genau die beiden Signale ausgetauscht werden, vorausgesetzt natürlich, dass die Uhren relativ zueinander ruhen. Im Prinzip können wir mit dieser Methode beliebig viele Uhren miteinander synchronisieren.

Aufgabe 2.5 *Man zeige, dass durch diese Methode der Synchronisation von zueinander ruhenden Uhren eine Äquivalenzrelation definiert wird. Wenn auf diese Weise zwei Uhren jeweils mit einer dritten Uhr synchronisiert wurden, dann sind auch die ersten beiden Uhren synchron.*

Wir können uns sogar eine Art Netz aus synchronen Uhren vorstellen, das den ganzen Raum ausfüllt. An jede Uhr heften wir zusätzlich einen Aufkleber, auf den wir die x -Koordinate dieser Uhr schreiben (und auch die y - und z -Koordinate, wenn wir das Ganze im dreidimensionalen

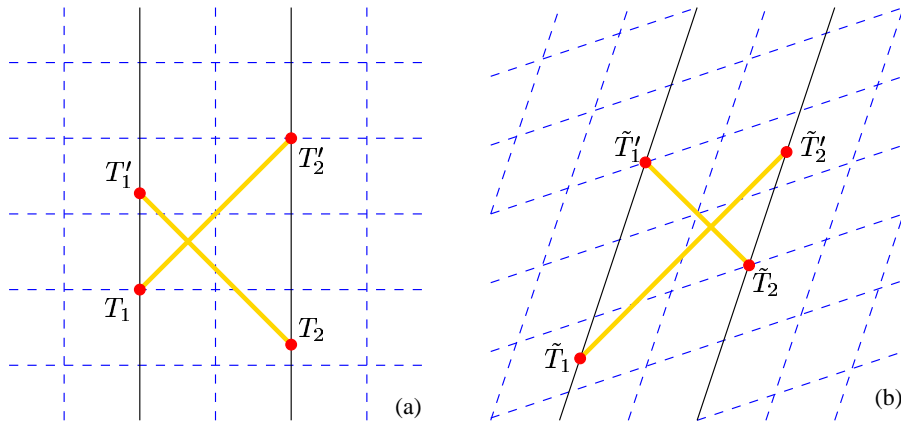


Abbildung 2.5: Um zwei relativ zueinander ruhende Uhren zu synchronisieren, wird jeweils ein Lichtsignal nach links und rechts geschickt. Die Uhren sind synchron, wenn die gemessenen Laufzeiten der Signale übereinstimmen. Zwei Ereignisse werden dann als gleichzeitig bezeichnet, wenn die jeweils in der Nähe befindliche Uhr die gleiche Zeit anzeigt. Diese Definition der Gleichzeitigkeit hängt aber vom Bezugssystem ab.

Raum durchführen). Das Inertialsystem Σ ist dann ganz praktisch als eine Art Gitter in der Raumzeit realisiert. Wo und wann immer wir uns in der Raumzeit befinden, wir können überall und jederzeit unsere Koordinaten an der nächstgelegenen Uhr und dem Aufkleber daran ablesen. Die in den Abbildungen dargestellten Gitterlinien können wir uns also ganz praktisch als eine Schar von markierten Uhren vorstellen.

Und mit dieser Vorstellung verstehen wir nun auch, warum die Definition von Gleichzeitigkeit abhängig vom Bezugssystem ist. Betrachten wir dazu wieder zwei relativ zueinander ruhende Uhren, diesmal sollen sie aber in einem anderem Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ ruhen. Die Situation ist in Abbildung 2.5(b) dargestellt. Wenn wir dieselbe Methode zur Synchronisation der Uhren anwenden, erhalten wir die folgende Bedingung für die dargestellten Sende- und Empfangszeiten,

$$\tilde{T}'_1 - \tilde{T}'_2 = \tilde{T}_2 - \tilde{T}_1. \quad (2.32)$$

Die gemessenen Laufzeiten sind also wieder gleich. Wir sehen aber deutlich in der Abbildung, dass für einen Beobachter in Σ die Laufzeiten nicht gleich sind. Der nach rechts laufende Lichtstrahl ist deutlich länger unterwegs als der nach links laufende. Ein Beobachter in Σ wird also behaupten, die Uhren seien gar nicht synchron, während ein in $\tilde{\Sigma}$ ruhender Beobachter felsenfest davon überzeugt ist, denn er kann sich keine bessere Testmethode vorstellen.

Ob zwei relativ zueinander ruhende Uhren die gleiche Zeit anzeigen oder nicht, hängt also vom Bezugssystem ab. Wir sagen, dass zwei Uhren *synchron* sind, wenn sie beide in irgendeinem Inertialsystem ruhen, also relativ zueinander ruhen, und wenn sie in *diesem* Inertialsystem die gleiche Zeit anzeigen. Wenn sich zwei Uhren gegeneinander bewegen, ist es nicht möglich, sie zu synchronisieren. Zwar können wir immer noch Lichtsignale hin und her schicken, aber die Bedingung (2.31) wäre nicht mehr konsistent, denn es würde nun vom genauen Zeitpunkt des Sende- und Empfangs-Ereignisses abhängen, ob die Gleichung erfüllt ist oder nicht. Wir kommen also zu folgendem Schluss:

Relativität der Gleichzeitigkeit: Ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden oder nicht, hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Uhren lassen sich nur dann synchronisieren, wenn sie relativ zueinander ruhen.

Längenmessung

Mit Hilfe von Uhren und Lichtsignalen können wir auch Abstände messen. Wir hatten das bereits erwähnt, als wir die *Sekunde* als Längeneinheit definierten. Die Idee ist, den Abstand zweier Punkte im Raum zu messen, indem wir einen Lichtstrahl hin und zurück schicken, und die gemessene Laufzeit durch zwei teilen. Auch hier müssen wir nun ein wenig sorgfältiger vorgehen. Es ist nicht mehr unmittelbar klar, was zwei Punkte im *Raum* sind. Der Raum ist, so jedenfalls hatten wir ihn in Kapitel 1 definiert, die Menge aller gleichzeitig stattfindenden Ereignisse. Offenbar hängt es nun auch vom Bezugssystem ab, was unter *Raum* zu verstehen ist.

Diese Relativität des Raumes wirkt sich auf die Messung von Längen aus. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel. Es soll der Abstand zweier zueinander ruhender Körper ermittelt werden. Der Einfachheit nehmen wir an, dass sich die Körper in Inertialsystem Σ an den Orten $x = -d$ und $x = d$ befinden. Genauer gesagt, diese Koordinatengleichungen definieren die Weltlinien der beiden Objekte. Wie kann nun ein Beobachter, der mit einer Uhr ausgestattet ist, den Abstand der Objekte messen? Wir wollen zunächst keine Annahme über die Relativbewegung von Beobachter und Objekten machen. Wir können aber annehmen, dass sich der Beobachter gerade irgendwo zwischen den beiden Objekten befindet.

Eine Messung könnte dann wie folgt aussehen. Der Beobachter schickt zwei Lichtstrahlen los, die von den Objekten reflektiert werden und zum Beobachter zurückkehren. Er kann also die Laufzeiten messen, addieren, und durch zwei teilen. Das sollte den gesuchten Abstand ergeben. So einfach ist es aber nicht. Es muss irgendwie sicher gestellt werden, dass die Reflexionen der Lichtsignale an den beiden Objekten gleichzeitig stattfinden. Denn sonst misst der Beobachter ja den Abstand zu einem Objekt früher, den zum anderen Objekt später. Wenn eine relative Bewegung vorliegt, führt das zu einem falschen Ergebnis. Wenn man in einem fahrenden Zug sitzt, kann man nicht jetzt die Entfernung zu einem Bahnhof, später die zu einem anderen Bahnhof messen, und dann die Ergebnisse addieren und sagen, das sei die Entfernung zwischen den Bahnhöfen.

Um sicher zu stellen, dass die Reflexionen gleichzeitig erfolgen, nehmen wir an, dass das Aussenden und Empfangen der Lichtsignale jeweils zum gleichen Zeitpunkt erfolgt. Das geht

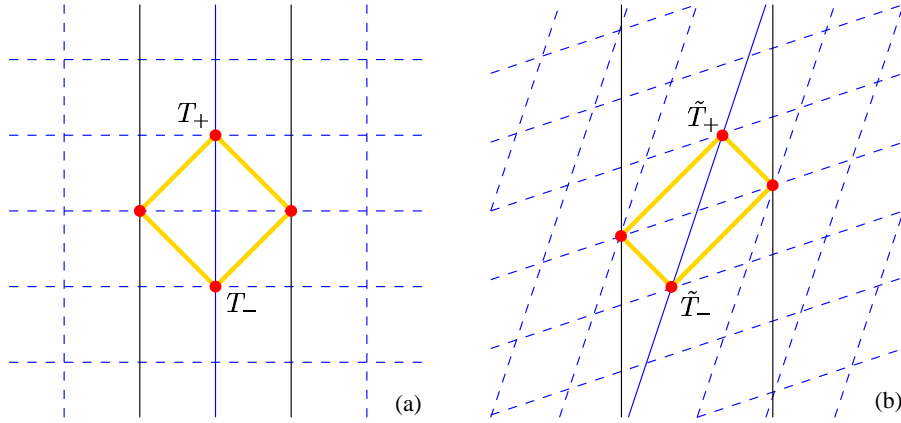


Abbildung 2.6: Der Abstand zwischen zwei relativ zueinander ruhenden Objekten wird gemessen, indem ein Beobachter Lichtsignale zu beiden Objekten hin und zurück schickt, und dann die Laufzeit misst. Das Ergebnis hängt von der Relativbewegung zwischen Beobachter und Objekten ab.

natürlich nur, wenn sich der Beobachter bei der Messung zufällig genau in der Mitte zwischen den beiden Objekten befindet. Aber der Einfachheit halben nehmen wir an, wir hätten dieses Glück. Ansonsten müssten wir nur ein wenig mehr rechnen. Der Beobachter sieht also folgende Situation. Wenn seine Uhr T_- anzeigt, sendet er je ein Lichtsignal nach links und rechts. Wenn seine Uhr T_+ anzeigt, kommen beide Signale zurück. Daraus schließen wir, dass erstens die Reflexionen gleichzeitig stattfanden, und zweitens der räumliche Abstand zwischen den Reflexionsereignissen, also der Abstand der Objekte, gleich $T_+ - T_-$ ist.

Man beachte, dass für diese Schlussfolgerung nur die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verwendet wurde, und dass der Schluss für jeden Beobachter gilt, unabhängig davon, ob er sich relativ zu den Objekten bewegt oder nicht. Betrachten wir aber zunächst den Fall, dass der Beobachter relativ zu den Objekten ruht. Diese Situation ist in Abbildung 2.6(a) dargestellt. Dort sind die beiden Weltlinien der Objekte eingezeichnet, also die Geraden $x = -d$ und $x = d$ im Inertialsystem Σ . Genau in der Mitte dazwischen befindet sich die Weltlinie des Beobachters bei $x = 0$. Das Quadrat in der Mitte besteht aus den zwei Lichtsignalen, die der Beobachter zu den Objekten schickt, und den zwei reflektierten Lichtstrahlen. Aus der Geometrie ergibt sich unmittelbar, dass $T_+ - T_- = 2d$. Also ist der Abstand der Objekte tatsächlich $L = 2d$.

Nun betrachten wir dieselbe Situation aus der Sicht eines Beobachters, der relativ zu einem anderen Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ ruht. Wie in Abbildung 2.6(b) zu sehen, wird seine Weltlinie durch

die Koordinatengleichung $\tilde{x} = 0$ beschrieben. Er sendet zwei Lichtsignale aus, wenn seine Uhr \tilde{T}_- zeigt. Bezeichnen wir dieses Ereignis mit \mathbf{a}_- . Seine Koordinaten in $\tilde{\Sigma}$ sind $\tilde{t}_- = \tilde{T}_-$ und $\tilde{x}_- = 0$. Die Lichtsignale werden an den Objekten reflektiert, und erreichen den Beobachter wieder zu einer späteren Zeit, wenn seine Uhr die Zeit \tilde{T}_+ zeigt. Dieses Ereignis bezeichnen wir mit \mathbf{a}_+ . Seine Koordinaten in $\tilde{\Sigma}$ sind $\tilde{t}_+ = \tilde{T}_+$ und $\tilde{x}_+ = 0$.

Wir wollen nun die Koordinaten der beiden Ereignisse in Σ berechnen. Dazu benutzen wir die Formeln (2.22). Es ergibt sich für \mathbf{a}_-

$$t_- = \gamma(v)(\tilde{t}_- + v\tilde{x}_-) = \gamma(v)\tilde{T}_-, \quad x_- = \gamma(v)(\tilde{x}_- + v\tilde{t}_-) = v\gamma(v)\tilde{T}_-, \quad (2.33)$$

und entsprechend für \mathbf{a}_+

$$t_+ = \gamma(v)(\tilde{t}_+ + v\tilde{x}_+) = \gamma(v)\tilde{T}_+, \quad x_+ = \gamma(v)(\tilde{x}_+ + v\tilde{t}_+) = v\gamma(v)\tilde{T}_+. \quad (2.34)$$

Aus der Geometrie des Rechtecks in Abbildung 2.6(b) ergibt sich nun, wie man leicht sieht, dass $t_+ - t_- = 2d$. Der zeitliche Abstand zwischen Senden und Empfangen ist für einen Beobachter, der relativ zu den Objekten ruht, stets gleich $2d$, auch wenn Senden und Empfangen nicht am gleichen Ort stattfinden. Somit gilt für den in $\tilde{\Sigma}$ gemessenen Abstand der Objekte

$$\tilde{L} = \tilde{T}_+ - \tilde{T}_- = \frac{T_+ - T_-}{\gamma(v)} = \frac{L}{\gamma(v)} \quad (2.35)$$

Für einen relativ zu den Objekten bewegten Beobachter scheint der Abstand verkürzt. Das gleiche gilt natürlich auch, wenn es sich um ein einziges Objekt handelt, und dessen Länge gemessen wird. Das Phänomen wird als *Längenkontraktion* bezeichnet.

Längenkontraktion: Die Länge eines Gegenstandes erscheint für einen bewegten Beobachter kürzer als für einen ruhenden Beobachter.

Aufgabe 2.6 Zwei identische Raketen befinden sich bei abgeschalteten Triebwerken relativ zu einander in Ruhe im freien Weltraum. Ihre Uhren sind synchronisiert. Die eine Rakete befindet sich in der Entfernung L "oberhalb" der anderen, wobei "oberhalb" in Richtung der Spitze bedeutet. Die Spitze der anderen Rakete zeigt in die gleiche Richtung. Beide Bordcomputer sind genau gleich programmiert, und zwar so, dass sie zu einer bestimmten Zeit auf der Borduhr für eine genau vorgegebene Zeitspanne ihre Triebwerke einschalten, so dass beide Raketen die gleiche Beschleunigung erfahren. Warum sind die Raketen nach dem Abschalten der Triebwerke wieder zueinander in Ruhe? Sind ihre Uhren dann noch synchron? In welchem Abstand voneinander befinden sich die Raketen danach?

Kausalität

Alle diese Überlegungen basieren zwar auf dem Relativitätsprinzip. Aber vielleicht gibt es doch noch eine Methode, Gleichzeitigkeit so zu definieren, dass verschiedene Beobachter sich am Ende doch darüber einig sind. Wir hatten bisher Lichtsignale verwendet, um Gleichzeitigkeit zu

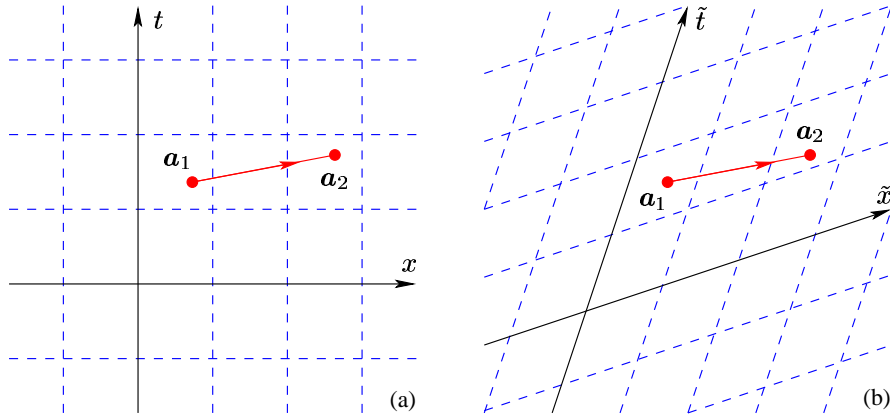


Abbildung 2.7: Die Annahme, ein Signal breite sich in einem Inertialsystem Σ mit einer Geschwindigkeit $w > 1$ aus (a), führt zu einem Widerspruch zum Kausalitätsprinzip. In einem anderen Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ würde das Signal rückwärts in der Zeit laufen (b).

definieren und Uhren zu synchronisieren. Aber vielleicht können wir ja andere Signale verwenden, zum Beispiel solche die schneller sind als das Licht, und mit deren Hilfe können wir dann Gleichzeitigkeit objektiv definieren, also unabhängig vom Bezugssystem.

Es kann aber keine Signale geben, die sich schneller als das Licht ausbreiten. Jedenfalls dann nicht, wenn wir zusätzlich zum Relativitätsprinzip noch ein weiteres Postulat aufstellen, nämlich das *Kausalitätsprinzip*. Es besagt folgendes. Wenn ein Ereignis b die Wirkung und ein anderes Ereignis a dessen Ursache ist, dann liegt a zeitlich vor b , und zwar, jetzt wieder gemäß dem Relativitätsprinzip, in jedem Inertialsystem. In diesem Fall gilt also in jedem Inertialsystem $a^t < b^t$.

Kausalitätsprinzip: Die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Wenn also irgendwelche zwei Ereignisse, zum Beispiel das Aussenden und Empfangen eines Signals, kausal miteinander verknüpft sind, so müssen sich alle Beobachter, unabhängig von ihrem Bewegungszustand, darüber einig sein, dass die Ursache vor der Wirkung stattgefunden hat. Nehmen wir nun an, ein Signal breite sich, relativ zu einem Inertialsystem Σ , mit einer Geschwindigkeit $w > 1$ aus, also schneller als das Licht. Es werde am Ereignis a_1 mit Koordinaten (t_1, x_1) ausgesandt, und am Ereignis a_2 mit Koordinaten (t_2, x_2) empfangen, wobei

$$t_2 > t_1, \quad w = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > 1. \quad (2.36)$$

Ein solches Signal ist in Abbildung 2.7(a) dargestellt. Betrachten wir dasselbe Signal nun in einem anderen Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$, wie in Abbildung 2.7(b) dargestellt. Das Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ soll sich relativ zu Σ mit einer Geschwindigkeit $0 < v < 1$ bewegen. Die transformierten Koordinaten ergeben sich aus (2.19) zu

$$\tilde{t}_k = \gamma(v) (t_k - v x_k), \quad \tilde{x}_k = \gamma(v) (x_k - v t_k), \quad k = 1, 2. \quad (2.37)$$

Berechnen wir daraus die Signalgeschwindigkeit \tilde{w} relativ zu $\tilde{\Sigma}$,

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}{\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1} = \frac{w - v}{1 - v w}. \quad (2.38)$$

Da $w > 1$ sein soll, bekommen wir offenbar Schwierigkeiten, wenn wir $v = 1/w < 1$ setzen. Die Signalgeschwindigkeit \tilde{w} wird dann unendlich. Und für $v > 1/w$ wird sie sogar negativ, das heißt das Signal läuft rückwärts in der Zeit. Tatsächlich gilt

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \gamma(v) (t_2 - t_1) - v \gamma(v) (x_2 - x_1) = \gamma(v) (1 - w v) (t_2 - t_1). \quad (2.39)$$

Die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse kehrt sich also um, wenn wir zu einem Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ übergehen, das sich relativ zu Σ mit einer Geschwindigkeit $v > 1/w$ bewegt. Dieser Fall ist in Abbildung 2.7(b) dargestellt.

Das darf aber nach dem Kausalitätsprinzip nicht sein. Folglich kann sich kein Signal schneller als das Licht ausbreiten. Für $w \leq 1$ ergibt sich kein Widerspruch, da für die Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme stets $v < 1$ gilt, also ist in diesem Fall auch stets $w v < 1$. Der entscheidende Faktor in (2.39) ist positiv. Wir können also das Kausalitätsprinzip verschärfen.

Kausalitätsprinzip: Kein Signal kann sich schneller als das Licht ausbreiten.

Für massive Objekte gilt sogar noch eine stärkere Einschränkung. Was genau *massiv* in diesem Zusammenhang bedeutet, werden wir etwas später genauer definieren. Als Definition kann im Moment genügen, dass für ein massives Objekt stets ein *Ruhesystem* existiert, das heißt ein Inertialsystem, bezüglich dessen sich dieses Objekt in Ruhe befindet. Wenn das Objekt beschleunigt ist, dann gibt es zumindest für jedes Ereignis auf seiner Weltlinie ein solches *momentanes* Ruhesystem. Nehmen wir also an, $\tilde{\Sigma}$ sei das momentane Ruhesystem eines relativ zu Σ bewegten massiven Objektes. Dann sind natürlich sowohl Σ als auch $\tilde{\Sigma}$ Inertialsysteme, und folglich ist ihre Relativgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Also ist auch die momentane Geschwindigkeit des Objektes, gemessen in Σ , kleiner als Eins.

Grenzeschwindigkeit: Kein massives Objekt kann auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden.

Insbesondere folgt daraus, dass Licht etwas besonderes ist, also jedenfalls kein massives Objekt. Es gibt kein Ruhesystem für einen Lichtstrahl.

Es soll im wesentlichen diese Überlegung gewesen sein, die Einstein zum Nachdenken über Raum und Zeit veranlasst hat. Er stellte sich die Frage, ob es wohl möglich sei, gewissermassen auf einem Lichtstrahl zu reiten. In unserer Sprache ist das gleichbedeutend mit der Frage, ob es ein Ruhesystem für einen Lichtstrahl gibt. Nach allem, was wir bis hierher gelernt haben, steht das im Widerspruch zu allerlei experimentellen Befunden und dem daraus abgeleiteten Relativitätsprinzip. Was wir allerdings noch nicht verstehen, ist, woran es denn konkret liegt, dass wir ein massives Objekt nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen können. Das soll heißen, welcher Mechanismus uns gewissermassen daran hindert, das Objekt immer weiter zu beschleunigen. Darauf werden wir in Kapitel 5 näher eingehen.

Die Metrik

Wir wollen nun versuchen, das, was wir bis jetzt zur Zeit- und Längenmessung sowie zur Kausalität gesagt haben, ein wenig formaler zu fassen, und in eine einheitliche mathematische Struktur zu integrieren. Betrachten wir dazu noch einmal die in Abbildung 2.3 dargestellte Zeitmessung mit mehreren Uhren. Wir können uns eine Uhr als ein Art Stoppuhr vorstellen. Sie wird an einem Ereignis, sagen wir \mathbf{a}_1 , gestartet, und an einem anderen Ereignis \mathbf{a}_2 gestoppt. Natürlich müssen beide Ereignisse auf der Weltlinie der Uhr liegen, und wir wollen weiterhin annehmen, dass die Uhr gleichförmig bewegt ist, ihre Weltlinie also eine Gerade ist.

Tatsächlich genügt es für die folgende Überlegung, nur den Abschnitt der Weltlinie zwischen den beiden Ereignissen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 zu betrachten, so wie in Abbildung 2.8(a) dargestellt. Nehmen wir an, wir kennen zunächst nur die Koordinaten (t_1, x_1) von \mathbf{a}_1 , und (t_2, x_2) von \mathbf{a}_2 in irgendeinem Inertialsystem Σ . Eigentlich müsste das genügen, um zu berechnen, welche Zeit eine Uhr misst, die sich gleichförmig von \mathbf{a}_1 nach \mathbf{a}_2 bewegt. Denn aus den Koordinaten können wir die Geschwindigkeit v berechnen, mit der sich die Uhr relativ zu Σ bewegt,

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.40)$$

Außerdem kennen wir die Zeitdifferenz zwischen den Ereignissen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 in Σ . Diese ist nämlich $t_2 - t_1$. Jetzt müssen wir nur noch die Formel (2.28) verwenden, um daraus die Zeit zu berechnen, die die bewegte Uhr anzeigt. Nennen wir diese gemessene Zeitspanne nun einfach T . Dann gilt

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\gamma(v)} = \sqrt{1 - v^2} (t_2 - t_1) = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2}. \quad (2.41)$$

Offenbar können wir mit dieser Formel die von einer bewegten Uhr angezeigte Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen direkt berechnen, ohne vorher in ein anderes Inertialsystem wechseln zu müssen. Wir sehen auch, dass für den Spezialfall einer in Σ ruhenden Uhr das richtige Ergebnis heraus kommt, nämlich $T = t_2 - t_1$.

Aber wir können daraus noch mehr ableiten. Die von der Uhr angezeigte Zeitspanne T ist unabhängig davon, in welchem Inertialsystem wir die Berechnung (2.41) durchführen. Nur die

Ereignisse \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 selbst spielen eine Rolle, nicht jedoch ihre Koordinaten bezüglich eines beliebig wählbaren Inertialsystems. Sei also $\tilde{\Sigma}$ ein anderes Inertialsystem, und $(\tilde{t}_1, \tilde{x}_1)$ seien die Koordinaten von \mathbf{a}_1 , und $(\tilde{t}_2, \tilde{x}_2)$ die von \mathbf{a}_2 . Dann muss ebenso gelten

$$T = \sqrt{(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)^2 - (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)^2}. \quad (2.42)$$

Oder, allgemeiner ausgedrückt, für je zwei beliebige Inertialsysteme Σ und $\tilde{\Sigma}$ und je zwei Ereignisse \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 sollte gelten

$$(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = (\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)^2 - (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)^2. \quad (2.43)$$

Wenn die beiden Inertialsysteme nur gegeneinander verschoben sind, ist das sicher richtig, denn es treten nur Differenzen zwischen Koordinaten auf. Es genügt also, diese Gleichung für die Transformationen (2.21) zu überprüfen, wobei v eine beliebige Relativgeschwindigkeit ist, die natürlich vom Betrag kleiner als eins ist. Schreiben wir zur Abkürzung $\Delta t = t_2 - t_1$ und entsprechend für die anderen Differenzen, so gilt

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{t}^2 - \Delta \tilde{x}^2 &= \gamma^2(v) (\Delta t - v \Delta x)^2 - \gamma^2(v) (\Delta x - v \Delta t)^2 \\ &= \gamma^2(v) (\Delta t^2 + v^2 \Delta x^2 - \Delta x^2 - v^2 \Delta t^2) \\ &= \gamma^2(v) (1 - v^2) (\Delta t^2 - \Delta x^2) = \Delta t^2 - \Delta x^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Gleichung (2.43) gilt also tatsächlich für jedes Paar von Ereignissen, und damit kann die Berechnung (2.41) für die angezeigte Zeitspanne in jedem Inertialsystem durchgeführt werden.

Es ist sogar sinnvoll, einfach vom *zeitlichen Abstand* der beiden Ereignisse \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 zu sprechen. Denn dieser zeitliche Abstand $T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ist unabhängig vom Bezugssystem. Er ist durch eine eindeutige Messvorschrift definiert. Um T zu messen, muss man eine Uhr so in Bewegung versetzen, dass sie beide Ereignisse durchläuft, und zwar ohne dazwischen beschleunigt zu werden. Dann kann man T von der Uhr ablesen. Es ist die Differenz der Zeigerstellungen beim Passieren von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 .

Schließlich können wir aus (2.41) eine weitere Schlussfolgerung ziehen. Der zeitliche Abstand $T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ist nicht für jedes Paar von Ereignissen definiert. Offenbar muss, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, $|\Delta t| > |\Delta x|$ gelten. Natürlich ist das genau die Bedingung dafür, dass es überhaupt für eine Uhr möglich ist, beide Ereignisse zu durchlaufen. Denn auch eine Uhr kann sich nicht schneller als das Licht bewegen. Wir sagen, dass die Ereignisse \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 *zeitartig* zueinander liegen, wenn das der Fall ist.

Wir erinnern uns, dass wir eine ähnliche Definition auch schon in der Newtonschen Raumzeit eingeführt hatten. Dort waren wir über dem Umweg einer invarianten Bilinearform auf die Definition des zeitlichen Abstandes zweier Ereignisse gestoßen. Umgekehrt, wenn wir uns nun die Gleichung (2.43) anschauen, dann sieht diese fast schon aus wie die Definition einer invarianten Bilinearform. Wir müssen sie nur noch formal richtig erfassen. Dazu betrachten wir wieder statt

der Raumzeit \mathcal{M} selbst den zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} , welcher durch die Basisvektoren e_μ , also e_t und e_x aufgespannt wird.

Machen wir also folgenden Ansatz. Wir definieren auf dem Vektorraum \mathcal{V} eine Bilinearform

$$\mathbf{u} = u^\mu e_\mu, \quad \mathbf{w} = w^\mu e_\mu, \quad \eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u^\mu \eta_{\mu\nu} w^\nu, \quad (2.45)$$

wobei η eine symmetrische 2×2 -Matrix ist. Als Bedingung an $\eta_{\mu\nu}$ stellen wir, dass diese Matrix unter Koordinatentransformationen invariant sein soll. Nun wissen wir bereits, wie sich eine Bilinearform unter einer Transformation von einem Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ verhält, nämlich

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} \Lambda^\nu_{\tilde{\nu}} \eta_{\mu\nu}, \quad (2.46)$$

wobei $\Lambda^\mu_{\tilde{\mu}}$ die in (2.20) gegebene Matrix ist. Ausgeschrieben in Komponenten erhalten wir drei unabhängige Gleichungen, denn zwei der vier Komponenten sind wegen der Symmetrie von $\eta_{\mu\nu}$ äquivalent,

$$\begin{aligned} \eta_{\tilde{t}\tilde{t}} &= \gamma(v) (\eta_{tt} + v^2 \eta_{xx} + 2v \eta_{tx}) \\ \eta_{\tilde{t}\tilde{x}} &= \gamma(v) (v \eta_{tt} + v \eta_{xx} + (1 + v^2) \eta_{tx}) \\ \eta_{\tilde{x}\tilde{x}} &= \gamma(v) (v^2 \eta_{tt} + \eta_{xx} + 2v \eta_{tx}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nun soll die Bilinearform invariant sein, das heißt die linken Seiten dieser Gleichungen sollen nicht vom Parameter v der Transformation abhängen. Dann dürfen aber auch die rechten Seiten nicht von v abhängen. Insbesondere müssen die Ableitungen nach v an der Stelle $v = 0$ verschwinden. Da $d\gamma(v)/dv = 0$ ist für $v = 0$, erhalten wir folgende Bedingungen an die Komponenten von $\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta_{tt} = -\eta_{xx}, \quad \eta_{tx} = \eta_{xt} = 0, \quad (2.48)$$

wobei die letzte Gleichung wieder aus der Symmetrie folgt. Wie man leicht nachrechnet, sind diese Bedingungen auch schon hinreichend dafür, dass die rechten Seiten der Gleichungen (2.47) von v unabhängig sind. Also liegt die Bilinearform η bis auf eine Konstante fest. Diese wählen wir so, dass

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \eta_{tt} & \eta_{tx} \\ \eta_{xt} & \eta_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Damit haben wir auf dem Vektorraum \mathcal{V} eine Bilinearform definiert, und zwar so, dass die Definition in jedem Inertialsystem gleich lautet. Gegeben zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, mit Komponenten u^μ und w^μ bezüglich einer Basis e_μ , so gilt

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u^\mu \eta_{\mu\nu} w^\nu = u^x w^x - u^t w^t. \quad (2.50)$$

Und damit können wir den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 definieren. Dazu führen wir wieder den Abstandsvektor $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \in \mathcal{V}$ ein, dessen Komponenten durch $a_2^\mu - a_1^\mu$ gegeben sind. Der zeitliche Abstand ist dann

$$T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \sqrt{-\eta(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)} = \sqrt{-(a_2^t - a_1^t)^2 + (a_2^x - a_1^x)^2} \quad (2.51)$$

Natürlich müssen wir wieder die Bedingung stellen, dass die Ereignisse zueinander zeitartig liegen, damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist.

Wir können mit der Bilinearform aber noch mehr anfangen. Da die Matrix $\eta_{\mu\nu}$ invertierbar ist, definiert sie eine *Metrik* auf dem Vektorraum \mathcal{V} . Das heißt, wir können jedem Vektor eine Norm zuordnen. Wir können auch sagen, wann zwei Vektoren orthogonal zueinander sind, und eventuell können wir auch so etwas wie Winkel zwischen Vektoren definieren. Es handelt sich jedoch nicht um die übliche Euklidische Metrik eines zweidimensionalen Vektorraums. Insbesondere ist sie, wie man in (2.50) sofort sieht, nicht positiv.

Zeitartig, raumartig, lichtartig

Wie wir gerade gesehen haben, stellen genau diejenigen Vektoren $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, für die $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ ist, den Abstandsvektor zweier zueinander zeitartig gelegenen Ereignisse dar. Wir wollen diese Vektoren *zeitartig* nennen, und definieren

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu < 0\}. \quad (2.52)$$

Für zeitartige Vektoren ist eine Norm definiert,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{Z} \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{u}) = \sqrt{-\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{-u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu}, \quad (2.53)$$

und diese Norm definiert den zeitlichen Abstand von zwei Ereignissen. Da die Zeit eine ausgezeichnete Richtung hat, ist es zusätzlich noch möglich, zwischen *positiven* und *negativen* zeitartigen Vektoren zu unterscheiden. Dazu müssen wir das Vorzeichen der Zeitkomponente der Vektoren betrachten,

$$\mathcal{Z}^+ = \{\mathbf{u} \in \mathcal{Z} \mid u^t > 0\}, \quad \mathcal{Z}^- = \{\mathbf{u} \in \mathcal{Z} \mid u^t < 0\}. \quad (2.54)$$

Aufgabe 2.7 Man zeige, dass das Vorzeichen der Zeitkomponente u^t eines zeitartigen Vektors $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ in jedem Inertialsystem gleich ist, dass sich also alle Beobachter darüber einig sind, ob ein zeitartiger Vektor positiv oder negativ ist.

Einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ mit $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ nennen wir *raumartig*, und die Menge aller raumartigen Vektoren bezeichnen wir mit

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu > 0\}. \quad (2.55)$$

Auch für raumartige Vektoren können wir eine Norm einführen, wir müssen dafür nur das Vorzeichen unter der Wurzel umkehren,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{u}) = \sqrt{\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu}. \quad (2.56)$$

Auch diese Norm hat eine physikalische Bedeutung. Betrachten wir dazu einen Vektor \mathbf{u} mit $u^t = 0$, wobei t die Zeitkoordinate in einem gegebenen Inertialsystem Σ ist. Dann gilt offenbar

$L(\mathbf{u}) = |u^x|$, das heißt $L(\mathbf{u})$ ist die räumliche Länge des Vektors \mathbf{u} , welcher den Abstand zweier in Σ gleichzeitiger Ereignisse definiert. Nun nehmen wir an, dass $u^t \neq 0$. Dann gibt es jedoch stets ein anderes Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$, so dass $u^{\tilde{t}} = 0$. Und in diesem Inertialsystem hat $L(\mathbf{u})$ dann die Bedeutung einer räumlichen Länge.

Für einen raumartigen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ definiert $L(\mathbf{u})$ also die räumliche Länge des Vektors \mathbf{u} , gemessen in dem Bezugssystem, in dem \mathbf{u} der Abstandsvektor von zwei gleichzeitigen Ereignissen ist. Analog dazu definiert $T(\mathbf{u})$ für einen zeitartigen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$ den zeitlichen Abstand von zwei Ereignissen, und zwar in dem Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse am gleichen Ort stattfinden. Es bleibt nur noch zeigen, dass es solche Bezugssysteme auch immer gibt.

Aufgabe 2.8 Es sei $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$ ein zeitartiger Vektor. Man zeige, dass es stets ein Inertialsystem Σ gibt, so dass $\mathbf{u} = u^t \mathbf{e}_t$, dass also \mathbf{u} parallel zur t -Achse zeigt und somit eine Zeitspanne darstellt.

Aufgabe 2.9 Es sei $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ ein raumartiger Vektor. Man zeige, dass es stets ein Inertialsystem Σ gibt, so dass $u^t = 0$, dass also \mathbf{u} parallel zur x -Achse zeigt und somit einen räumlichen Vektor darstellt.

Nun gibt es offenbar noch eine dritte Klasse von Vektoren, die weder zeitartig noch raumartig sind. Es sind diejenigen Vektoren $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, für die $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$. Da die Metrik nicht positiv ist, folgt daraus nicht, dass $\mathbf{u} = 0$. Es gibt also nicht verschwindende Vektoren, deren Norm aber verschwindet. Solche Vektoren werden *Nullvektoren* genannt. Die entsprechenden Teilmenge bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{u} \neq 0, \eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^\mu \neq 0, u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu = 0\}. \quad (2.57)$$

Auch diese Vektoren haben wieder eine besondere physikalische Bedeutung. Ausgeschrieben in Koordinaten gilt

$$u^x u^x - u^t u^t = 0 \quad \Rightarrow \quad |u^t| = |u^x|. \quad (2.58)$$

Das aber bedeutet nichts anderes als dass der Vektor \mathbf{u} genau in die Richtung einer der Winkelhalbierenden im Koordinatensystem zeigt, also in die Richtung, in die sich Lichtstrahlen in der Raumzeit ausbreiten. Daher nennen wir einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ *lichtartig*. Auch hier können wir wieder zwischen positiven und negativen lichtartigen Vektoren unterscheiden,

$$\mathcal{L}_+ = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} \mid u^t > 0\}, \quad \mathcal{L}_- = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} \mid u^t < 0\}. \quad (2.59)$$

Aufgabe 2.10 Man zeige, dass auch die Unterteilung in positive und negative lichtartige Vektoren unabhängig vom Bezugssystem ist. Ist eine solche Unterteilung auch für raumartige Vektoren möglich?

Da die Bilinearform η auf \mathcal{L} identisch gleich Null ist, gibt es keine Möglichkeit, einem lichtartigen Vektor irgendeine Art Norm zuzuordnen. In einem gewissen Sinne, den wir später genauer erklären werden, sind alle lichtartigen Vektoren gleichwertig.

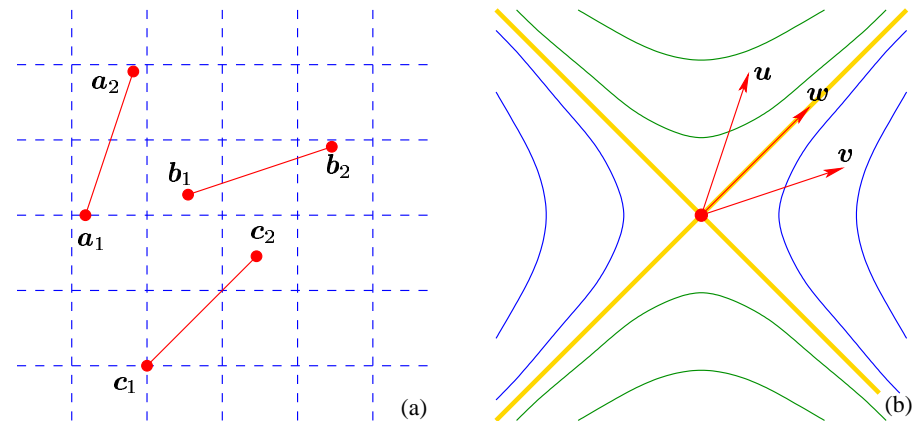


Abbildung 2.8: Drei Paare von Ereignissen, die zueinander zeitartig ($\mathbf{a}_{1,2}$), raumartig ($\mathbf{b}_{1,2}$) und lichtartig ($\mathbf{c}_{1,2}$) liegen. Die entsprechenden Abstandsvektoren sind ebenfalls zeitartig (\mathbf{u}), raumartig (\mathbf{v}) und lichtartig (\mathbf{w}). Die Hyperbeln sind die Linien gleicher Norm für raumartige und zeitartige Vektoren.

Eine graphische Darstellung der Definition von zeitartig, raumartig und lichtartig findet sich in Abbildung 2.8. Im Bild (a) sind zunächst drei Paare von Ereignissen in der Raumzeit \mathcal{M} dargestellt, die zueinander zeitartig, raumartig, bzw. lichtartig liegen. Im ersten Fall ist es also möglich, zum Beispiel eine Uhr von \mathbf{a}_1 nach \mathbf{a}_2 zu bewegen und den zeitlichen Abstand dieser Ereignisse zu messen. Im zweiten Fall gibt es ein Bezugssystem, in dem die Ereignisse \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 gleichzeitig stattfinden, und demnach ist es möglich ihren räumlichen Abstand zu definieren. Im dritten Fall schließlich kann ein Lichtsignal von \mathbf{c}_1 nach \mathbf{c}_2 gesendet werden, aber kein massives Objekt, und es gibt auch kein Inertialsystem, in dem diese Ereignisse gleichzeitig stattfinden.

Im Bild (b) ist die entsprechende Situation im zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} dargestellt. Der Abstandsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ ist ein positiver zeitartiger Vektor, da die Ereignisse \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 zueinander zeitartig liegen. Entsprechend ist $\mathbf{v} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$ ein raumartiger Vektor und $\mathbf{w} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$ ein lichtartiger Vektor. Die lichtartigen Vektoren sind die, die in einem Winkel von 45° nach oben oder unten zeigen, also in die Richtungen, in die sich das Licht ausbreitet. Die zeitartigen Vektoren sind die, die steiler nach oben oder unten zeigen, und die raumartigen Vektoren sind schließlich die flacheren. Man beachte, dass keine dieser Teilmengen von \mathcal{V} einen Untervektorraum bildet.

Es ist nun auch deutlich, warum eine Unterscheidung zwischen positiv und negativ zeitartigen und lichtartigen Vektoren möglich ist, dies aber für raumartige Vektoren nicht möglich ist. Genau genommen könnten wir jedoch auch dort eine Unterscheidung vornehmen, nämlich zwischen

nach links und nach rechts zeigenden raumartigen Vektoren. Allerdings ist das eine besondere Eigenschaft der zweidimensionalen Raumzeit. Wenn wir später zur echten, also vierdimensionalen Raumzeit übergehen, und räumliche Drehungen wieder mit einbeziehen, werden wir sehen, dass es keinen Sinn macht, zwischen positiven und negativen Richtungen im Raum zu unterscheiden.

Schließlich können wir in Abbildung 2.8(b) auch noch die Norm der zeitartigen und raumartigen Vektoren ablesen. Dazu wurden ein paar Linien konstanter Norm eingezeichnet, also Linien mit

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = k \quad \Rightarrow \quad u^x u^x - u^t u^t = k, \quad (2.60)$$

wobei k entweder positiv oder negativ sein kann. Offenbar definiert diese Gleichung eine Hyperbel in der durch die Komponenten (u^t, u^x) aufgespannten Ebene. Je nach Vorzeichen von k liegt diese Hyperbel im raumartigen Bereich, für $k > 0$, oder im zeitartigen Bereich, für $k < 0$. Für $k = 0$ erhalten wir wieder die lichtartigen Vektoren. Die Hyperbeln mit konstanter Norm $k = \pm 1$ sind in diesem Sinne die raumartigen und zeitartigen *Einheitskugeln* im Vektorraum \mathcal{V} .

Bis jetzt haben wir nur die durch die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ definierte Norm betrachtet. Aber eine Metrik definiert auch Winkel. Es genügt zunächst, nur die Definition von orthogonalen Vektoren zu betrachten. Natürlich sollen zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$ genau dann orthogonal zueinander sein, wenn $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Da wir andererseits wissen, dass für die Einheitsvektoren gilt

$$\eta(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.61)$$

und wir die explizite Matrixdarstellung (2.49) für $\eta_{\mu\nu}$ haben, folgt daraus, dass die Einheitsvektoren eine *Orthonormalbasis* von \mathcal{V} bilden. Eine solche Basis besteht stets aus einem zeitartigen und einem raumartigen Vektor. Beide haben die Norm Eins, und sie sind zueinander orthogonal. Wir können also die Beziehung zwischen Raum und Zeit in einem Inertialsystem auch auf folgende geometrische Art und Weise beschreiben.

Zunächst betrachten wir nur eine zeitartige Weltlinie eines Beobachters, der nicht beschleunigt sein soll. Gesucht ist das Inertialsystem Σ , also die Basis \mathbf{e}_μ des Vektorraums \mathcal{V} , bezüglich dessen der Beobachter ruht. Da die Zeitachse in diesem Inertialsystem mit der Weltlinie des Beobachters übereinstimmt, ist der Vektor \mathbf{e}_t derjenige positive zeitartige Einheitsvektor, der in Richtung der Weltlinie zeigt. Also gerade der normierte Tangentialvektor, wie wir ihn auch schon für die Newtonsche Raumzeit definiert hatten. Die Frage ist dann, was ist für diesen Beobachter der *Raum* zu einem gegebenen Zeitpunkt?

Offenbar wird dieser gerade durch den zu \mathbf{e}_t orthogonalen Unterraum von \mathcal{V} aufgespannt. In einer zweidimensionalen Raumzeit bleibt also nur ein raumartiger Einheitsvektor \mathbf{e}_x , der orthogonal zu \mathbf{e}_t ist. Oder genau genommen zwei, denn $-\mathbf{e}_x$ ist natürlich auch ein raumartiger Einheitsvektor. Raum und Zeit sind also zueinander orthogonal. Das stimmt auch noch, wie wir sehen werden, in einer vierdimensionalen Raumzeit. Beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes wechseln wir also von einer Orthonormalbasis zu einer anderen. Es ist einzig und allein das ‘‘falsche Vorzeichen’’ in (2.49), welches bewirkt, dass sich solche Transformationen nicht wie gewöhnliche Drehungen verhalten. Wir können also festhalten:

Raum und Zeit sind zueinander orthogonale Unterräume der Raumzeit.

Zukunft, Vergangenheit und Gegenwart

Wegen des verschärften Kausalitätsprinzips, wonach sich ein Signal höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, ist es sinnvoll, auch über andere mit Ursache und Wirkung zusammenhängenden Begriffe neu nachzudenken. Betrachten wir zum Beispiel den Begriff *Zukunft*, bezogen auf ein bestimmtes Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$. Die Zukunft dieses Ereignisses, das sind alle diejenigen Ereignisse, auf welche das Ereignis \mathbf{a} im Prinzip Einfluss nehmen kann. Eine alternative Definition wäre, zu sagen, dass die Zukunft eines Ereignisses \mathbf{a} all diejenigen Ereignisse sind, die ein Beobachter, der sich jetzt bei \mathbf{a} befindet, später noch durchlaufen kann.

Die beiden Definitionen sind nicht ganz gleich. Betrachten wir zuerst die zweite. Damit ein Beobachter oder irgendein massives Objekt von \mathbf{a} nach \mathbf{b} gelangen kann, muss der Abstandsvektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ positiv zeitartig sein. Wir definieren also die *Zukunft* von \mathbf{a} als

$$\mathcal{Z}^+(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{Z}^+\}. \quad (2.62)$$

Wir benutzen dieselbe Notation wie vorher für die entsprechende Teilmengen von \mathcal{V} , schieben allerdings jetzt $\mathcal{Z}^+(\mathbf{a})$, da wir sozusagen die Teilmenge $\mathcal{Z}^+ \subset \mathcal{V}$ an das Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ anheften, und so eine Teilmenge $\mathcal{Z}^+(\mathbf{a}) \subset \mathcal{M}$ der Raumzeit erhalten. Das \mathcal{Z} steht also weiterhin für ‘‘Zeit’’, und nicht für ‘‘Zukunft’’. Entsprechend ist die *Vergangenheit* von \mathbf{a} gegeben durch

$$\mathcal{Z}^-(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{Z}^-\}. \quad (2.63)$$

Offenbar ist $\mathbf{b} \in \mathcal{Z}^+(\mathbf{a})$ genau dann wenn $\mathbf{a} \in \mathcal{Z}^-(\mathbf{b})$. Wenn also ein Ereignis in der Zukunft eines anderen liegt, so gilt umgekehrt dass das zweite Ereignis in der Vergangenheit des ersten liegt. Abbildung 2.9 zeigt eine graphische Darstellung der Zukunft und Vergangenheit eines Ereignisses. Die Zukunft befindet sich in einem offenen Kegel oberhalb des Ereignisses, die Vergangenheit entsprechend in einem offenen Kegel darunter. Der Rand dieses Kegels wird als *Lichtkegel* bezeichnet. Er wird aufgespannt von allen Ereignissen, die zu \mathbf{a} lichtartig liegen. Es gibt also den *Vorwärtslichtkegel*

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{L}^+\}, \quad (2.64)$$

und den *Rückwärtslichtkegel*

$$\mathcal{L}^-(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{L}^-\}, \quad (2.65)$$

Die Bezeichnung *Kegel* rührt natürlich daher, dass es sich in einer vierdimensionalen Raumzeit tatsächlich um einen Kegel, genauer um einen dreidimensionalen Hyperkegel handelt. In einer zweidimensionalen Raumzeit besteht der Lichtkegel eines Ereignisses nur aus zwei Lichtstrahlen, die nach links und rechts durch das Ereignis laufen.

Ob der Lichtkegel selbst mit zur Zukunft bzw. zur Vergangenheit gehört, hängt davon ab, wie genau wir diese definieren. Wenn es uns genügt, dass wir ein Signal zu jedem Ereignis in der Zukunft schicken können, dann gehört der Vorwärtslichtkegel mit zur Zukunft. Wenn wir aber

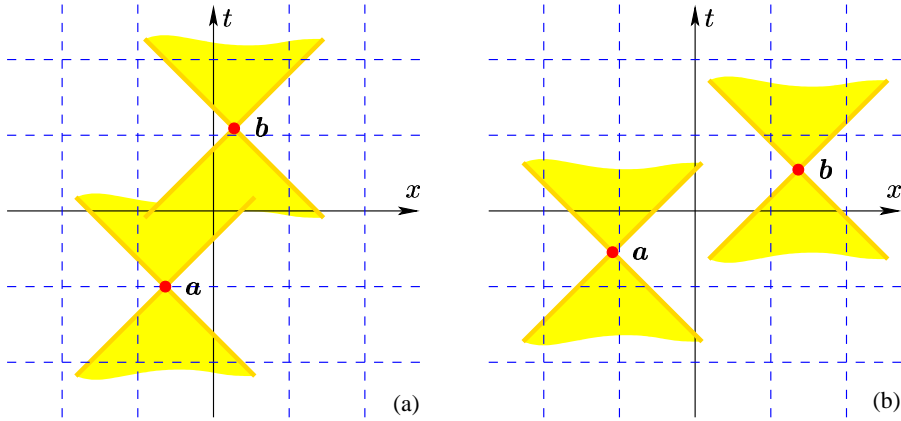


Abbildung 2.9: Der Lichtkegel eines Ereignisses a wird von allen durch a laufenden Lichtstrahlen aufgespannt. Die Zukunft von a ist der Bereich innerhalb des Vorwärtslichtkegels, die Vergangenheit der Bereich innerhalb des Rückwärtslichtkegels. In (a) liegen die Ereignisse a und b zeitartig zueinander, und zwar liegt b in der Zukunft von a . In (b) liegen die Ereignisse a und b raumartig zueinander, also b in der Gegenwart von a und umgekehrt.

selbst, jedenfalls im Prinzip, zu jedem Ereignis in der Zukunft gelangen wollen können, dann besteht die Zukunft nur aus dem Inneren des Kegels, wie in (2.62) definiert. Und entsprechendes gilt für die Vergangenheit. Wenn wir dort den Rückwärtslichtkegel mit einbeziehen, dann besteht die Vergangenheit eines Ereignisses a aus allen Ereignissen, von denen wir Kenntnis haben können, wenn wir uns bei a befinden.

Was bleibt ist die Gegenwart. Normalerweise bezeichnen wir als Gegenwart alle gleichzeitigen Ereignisse. Das ist aber, wie wir gesehen haben, abhängig vom gewählten Inertialsystem. Sinnvoller ist es, die Gegenwart eines Ereignisses a als die Menge aller Ereignisse zu definieren, die raumartig zu a liegen, also

$$\mathcal{R}(a) = \{b \in \mathcal{M} \mid b - a \in \mathcal{R}\}. \quad (2.66)$$

Dass dies eine sinnvolle Definition ist, macht man sich leicht an folgendem Beispiel klar, bei dem die Definition von Gegenwart eine gewisse Rolle spielt. Stellen wir uns eine fortschrittliche Zivilisation vor, die zwar die interstellare Raumfahrt beherrscht, aber noch immer mit Kriminalität zu kämpfen hat. Es ist also hin und wieder nützlich, für bestimmte Ereignisse ein *Alibi* zu haben.

Die klassische Definition von einem Alibi für ein Ereignis $a \in \mathcal{M}$ ist, einen Nachweis zu besitzen, *gleichzeitig* an einem *anderen Ort* gewesen zu sein. Da es aber prinzipiell nicht möglich ist, sich schneller als das Licht zu bewegen, genügt es natürlich, einen Nachweis zu haben für

irgendein Ereignis b , das in der Gegenwart von a liegt. Um zu beweisen, dass man in Juni 1999 nicht auf der Erde war, genügt es völlig, nachweisen zu können, dass man im April 2001 auf einem Planet in der Umlaufbahn von Alpha Centauri war, also sicher mehr als zwei Lichtjahre von der Erde entfernt.

Die Gegenwart eines Ereignisses a ist also die Menge aller Ereignisse, die mit a in keinem kausalen Zusammenhang stehen, das heißt weder kann a die Ursache noch die Wirkung eines Ereignisses in dieser Gegenwart sein. Außerdem kann keine Weltlinie irgendeines Objektes, auch kein Lichtstrahl, sowohl das Ereignis a als auch ein anderes Ereignis in der Gegenwart von a durchlaufen. Das alles ist auch noch in der allgemeinen Relativitätstheorie so. Allerdings gibt es dann keine so einfache Definition (2.66) mehr. Zu einem Alibi für a gehört dann nicht nur der Nachweis eines anderen Ereignisses b auf der eigenen Weltlinie, sondern auch noch der ungleich schwerere Beweis, dass b tatsächlich in der Gegenwart von a liegt.

Aufgabe 2.11 Man zeige, dass durch Zukunft und Vergangenheit Ordnungsrelationen definiert werden. Das heißt, wenn b in der Zukunft von a liegt, und c in der Zukunft von b , dann liegt auch c in der Zukunft von a . Gilt das auch, wenn "in der Zukunft" durch "auf dem Vorwärtslichtkegel" ersetzt wird?

3 Das Tensorkalkül

Bis jetzt haben wir nur eine zweidimensionale Raumzeit betrachtet und dort einige Schlussfolgerungen aus dem Relativitätsprinzip gezogen. Bevor wir diese nun für die vierdimensionale, wirkliche Raumzeit verallgemeinern, wollen wir ein paar nützliche mathematische Konzepte einführen, die wir unter dem Begriff *Tensorkalkül* zusammenfassen können. Die Idee ist dabei, eine einheitliche Beschreibung von linearen Strukturen auf Vektorräumen einzuführen.

Vektoren und duale Vektoren

Es sei \mathcal{V} ein d -dimensionaler, reeller Vektorraum. Durch e_μ sei eine Basis von \mathcal{V} gegeben, wobei μ irgendeine Indexmenge mit d Elementen durchläuft, zum Beispiel $\mu = 1, \dots, d$. Ein beliebiger Vektor $v \in \mathcal{V}$ wird durch seine Komponenten v^μ bezüglich dieser Basis *dargestellt*,

$$v = v^\mu e_\mu. \quad (3.1)$$

Der zu \mathcal{V} *duale* Vektorraum \mathcal{V}^* ist definiert als die Menge aller linearen Abbildungen $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $p \in \mathcal{V}^*$ ein beliebiges Element, so schreiben wir die zugehörige lineare Abbildung als $v \mapsto p \cdot v$. Es gilt

$$p \cdot v = p \cdot (v^\mu e_\mu) = v^\mu (p \cdot e_\mu) = v^\mu p_\mu. \quad (3.2)$$

Wir können die reellen Zahlen $p_\mu = p \cdot e_\mu$ als die Entwicklungskoeffizienten von p nach einer Basis e^μ von \mathcal{V}^* auffassen, also

$$p = p_\mu e^\mu. \quad (3.3)$$

Die Basis e^μ von \mathcal{V}^* heißt die zur Basis e_μ von \mathcal{V} *duale* Basis. Sie ist eindeutig definiert durch die Eigenschaft

$$e^\mu \cdot e_\nu = \delta^\mu_\nu. \quad (3.4)$$

Offenbar ist die Beziehung zwischen \mathcal{V} und \mathcal{V}^* symmetrisch, das heißt der zu \mathcal{V}^* duale Vektorraum ist \mathcal{V} . Das Produkt $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ definiert eine bilineare Abbildung $\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, oder ein *Skalarprodukt*.

Wir unterscheiden Vektoren und duale Vektoren dadurch, dass wir ihre Komponenten mit hochgestelltem bzw. tiefgestelltem Index schreiben. Ein durch v^μ bezeichnetes d -Tupel von reellen Zahlen repräsentiert einen Vektor, während ein mit p_μ bezeichnetes d -Tupel von reellen Zahlen einen dualen Vektor repräsentiert. Wir sagen auch einfach, v^μ sei ein Vektor, und p_μ sei ein dualer Vektor. Das Skalarprodukt ist dann unmittelbar durch die Summenkonvention definiert.

Diese d -Tupel von reellen Zahlen transformieren in unterschiedlicher Art und Weise, wenn wir im Vektorraum \mathcal{V} , und folglich auch im dualen Vektorraum \mathcal{V}^* einen Basiswechsel durchführen. Es sei $\Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu$ eine $d \times d$ -Matrix, und $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ die inverse Matrix. Dann ist durch

$$e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} e_\mu, \quad e^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu e^\mu, \quad (3.5)$$

eine neue Basis $e_{\tilde{\mu}}$ von \mathcal{V} und eine neue duale Basis $e^{\tilde{\mu}}$ von \mathcal{V}^* definiert. Um zu sehen, dass die neuen Basen ebenfalls zueinander dual sind, müssen wir feststellen, ob auch für sie die Beziehung (3.4) gilt. Tatsächlich ist

$$e^{\tilde{\mu}} \cdot e_{\tilde{\nu}} = (\Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu e^\mu) \cdot (\Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} e_\nu) = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu (e^\mu \cdot e_\nu) \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu \delta^\mu_\nu \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\rho \Lambda^{\rho}_{\tilde{\nu}} = \delta^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}. \quad (3.6)$$

Daraus können wir nun leicht das Transformationsverhalten der Komponenten v^μ von $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ und p_μ von $\mathbf{p} \in \mathcal{V}^*$ ableiten. Es gilt

$$v^{\tilde{\mu}} = e^{\tilde{\mu}} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad v^{\tilde{\mu}} = e^{\tilde{\mu}} \cdot \mathbf{v} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu e^\mu \cdot \mathbf{v} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu v^\mu, \quad (3.7)$$

und entsprechend

$$p_{\tilde{\mu}} = \mathbf{p} \cdot e_{\tilde{\mu}} \quad \Rightarrow \quad p_{\tilde{\mu}} = \mathbf{p} \cdot e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \mathbf{p} \cdot e_\mu = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} p_\mu. \quad (3.8)$$

Wir können also sagen, dass ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ durch ein d -Tupel von reellen Zahlen v^μ dargestellt wird, welches unter Basiswechsel wie (3.7) transformiert. Entsprechend wird ein dualer Vektor $\mathbf{p} \in \mathcal{V}^*$ durch ein d -Tupel von reellen Zahlen p_μ dargestellt wird, welches unter Basiswechsel wie (3.8) transformiert.

Die Position des Index verrät uns somit, wie das entsprechende Objekt sich verhält wenn wir zu einer anderen Basis übergehen. Und das erklärt nun auch die spezielle Summenkonvention. Durch die *Kontraktion* $p_\rho v^\rho$ wird nämlich nichts anderes als das Skalarprodukt $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ definiert. Und das ist von der Basis unabhängig, denn

$$p_{\tilde{\rho}} v^{\tilde{\rho}} = p_\mu \Lambda^{\mu}_{\tilde{\rho}} \Lambda^{\tilde{\nu}}_\nu v^\nu = p_\mu \delta^\mu_\nu v^\nu = p_\rho v^\rho. \quad (3.9)$$

Wir sagen, dass $p_\rho v^\rho$ ein *Skalar* ist, also einfach eine reelle Zahl, die sich unter einem Basiswechsel nicht verändert.

Das nützliche an der Indexnotation ist also nicht nur, dass wir durch die Position der Indizes Vektoren und duale Vektoren unterscheiden können. Wir sehen auch sofort, wie sich die entsprechenden Objekte unter einem Basiswechsel transformieren. Die Transformationen (3.7) und (3.8) sind nämlich die einzigen Möglichkeiten, die Komponenten v^μ und p_μ so mit den Transformationsmatrizen $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ und $\Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu$ zu kombinieren, dass erstens die Summenkonvention zur Anwendung kommt, und zweitens das Ergebnis ein Vektor $v^{\tilde{\mu}}$ mit einem oberen Index, bzw. ein dualer Vektor $p_{\tilde{\mu}}$ mit einem unteren Index ist.

Und schließlich können wir aus der Indexposition auch sofort ersehen, wie wir Vektoren und duale Vektoren so miteinander kombinieren können, dass sich ein Skalar ergibt. Der einzige Möglichkeit, bei der die Summenkonvention zur Anwendung kommen kann, ist die Multiplikation eines dualen Vektors mit einem Vektor.

Tensoren

Nun wollen wir dieses Konzept von Vektoren und dualen Vektoren ein wenig erweitern. Betrachten wir dazu zunächst eine beliebige, auf \mathcal{V} definierte *Multilinearform*, die wir H nennen. Es handelt sich also um eine Abbildung $H : \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, die in jedem der insgesamt n Argumente linear ist. Bezüglich einer Basis e_μ von \mathcal{V} erhalten wir die folgende Darstellung von H ,

$$H(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = H(v_1^\mu e_\mu, v_2^\nu e_\nu, \dots, v_n^\rho e_\rho) = H_{\mu\nu\dots\rho} v_1^\mu v_2^\nu \dots v_n^\rho, \quad (3.10)$$

wobei

$$H_{\mu\nu\dots\rho} = H(e_\mu, e_\nu, \dots, e_\rho). \quad (3.11)$$

Das ist eine Tabelle von d^n reellen Zahlen, welche die Multilinearform H eindeutig definiert. Wir können also eine Multilinearform H mit einer Tabelle $H_{\mu\nu\dots\rho}$ von reellen Zahlen identifizieren, wobei die Anzahl n der Indizes die Anzahl der Argumente der Multilinearform angibt. Wir wollen eine solche Tabelle als *Tensor n -ter Stufe*, oder genauer als Tensor der Stufe $(0, n)$ bezeichnen.

Bevor wir diese Bezeichnung näher erklären, betrachten wir ein paar Eigenschaften eines Tensors, sowie einige Beispiele. Zunächst bezieht sich die Darstellung eines Tensors als Tabelle $H_{\mu\nu\dots\rho}$ von reellen Zahlen auf eine bestimmte Basis e_μ des Vektorraumes \mathcal{V} . Folglich ändern sich die Einträge dieser Tabelle, wenn wir zu einer anderen Basis übergehen. Wie, das können wir unmittelbar aus der Definition (3.11) entnehmen. Indem wir die Transformation (3.5) einsetzen, erhalten wir

$$H_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\dots\tilde{\rho}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} \dots \Lambda^{\rho}_{\tilde{\rho}} H_{\mu\nu\dots\rho}. \quad (3.12)$$

Ein Tensor n -ter Stufe ist also eine Tabelle von d^n reellen Zahlen, deren Einträge sich wie (3.12) transformieren, wenn wir im Vektorraum \mathcal{V} eine Transformation (3.5) der Basis vornehmen. Und auch hier sagt uns die Indexposition und die Summenkonvention eindeutig, wie wir zu transformieren haben.

Aufgabe 3.1 Man zeige, dass $H_{\mu\nu\dots\rho}$ dann und nur dann eine Multilinearform H auf \mathcal{V} definiert, wenn das Transformationsgesetz (3.12) gilt.

Betrachten wir nun einige Spezialfälle. Zunächst sei $n = 1$. Ein Tensor erster Stufe ist nichts anderes als ein dualer Vektor, denn es handelt sich um eine Multilinearform mit nur einem Argument, also eine lineare Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Und tatsächlich stimmt in diesem Fall das Transformationsgesetz (3.12) mit (3.8) überein. Ein dualer Vektor ist also ein Tensor der Stufe $(0, 1)$. Wir können auch den trivialen Fall $n = 0$ betrachten. In diesem Fall ist H einfach eine reelle Zahl, die sich bei einem Basiswechsel nicht ändert. Ein Tensor nullter Stufe ist ein Skalar.

Ein weiterer Spezialfall ist $n = 2$. In diesem Fall ist $H_{\mu\nu}$ eine $d \times d$ -Matrix, die eine Bilinearform $H : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert,

$$H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = H_{\mu\nu} v^\mu w^\nu. \quad (3.13)$$

Wir können die Matrix $H_{\mu\nu}$ auch als eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, nämlich \mathcal{V} und \mathcal{V}^* auffassen. Jedem Vektor v^μ wird ein dualer Vektor $p_\mu = H_{\mu\nu} v^\nu$ zugeordnet.

Wir können das Konzept aber noch erweitern. Bisher haben wir nur Multilinearformen auf \mathcal{V} betrachtet. Aber natürlich können wir auch solche auf \mathcal{V}^* definieren, oder sogar gemischte. Sei also $H : \mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ eine multilineare Abbildung, wobei m Mal der Faktor \mathcal{V}^* und n Mal der Faktor \mathcal{V} auftritt. Dann können wir dieser Abbildung wieder eine Tabelle von reellen Zahlen zuordnen, nämlich

$$H^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma} = H(\underbrace{e^\mu, \dots, e^\nu}_m, \underbrace{e_\rho, \dots, e_\sigma}_n). \quad (3.14)$$

Wir nennen dies einen Tensor der Stufe (m, n) . Ein solcher Tensor wird durch eine Tabelle von d^{n+m} reellen Zahlen dargestellt, wobei m obere und n untere Indizes auftreten, die jeweils d verschiedene Werte durchlaufen. Die Position der Indizes verrät uns auch hier wieder, wie die Einträge der Tabelle transformieren, wenn wir in \mathcal{V} und \mathcal{V}^* einen Basiswechsel (3.5) vornehmen. Es gilt nämlich

$$H^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}{}_{\tilde{\rho}\dots\tilde{\sigma}} = A^{\tilde{\mu}}{}_{\mu} \dots A^{\tilde{\nu}}{}_{\nu} A^{\rho}{}_{\tilde{\rho}} \dots A^{\sigma}{}_{\tilde{\sigma}} H^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma}. \quad (3.15)$$

Auch das folgt wieder aus (3.14), indem wir das Transformationsverhalten der Basisvektoren e^μ und e_μ verwenden, und die Linearität von H .

Als Spezialfälle treten hier für $m = 0$ die zuvor eingeführten Tensoren n -ter Stufe auf, die nur untere Indizes haben und Multilinearformen auf \mathcal{V} definieren. Für $m = 1$ und $n = 0$ erhalten wir die Vektoren selbst. Ein Vektor v^μ ist also ein Tensor der Stufe $(1, 0)$, das heißt ein Tensor mit genau einem oberen Index und dem entsprechenden Transformationsverhalten (3.7). Ein weiterer Spezialfall ist $m = 1$ und $n = 1$. In diesem Fall definiert die Matrix $H^\mu{}_\nu$ eine lineare Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, nämlich $v^\mu \mapsto H^\mu{}_\nu v^\nu$. Das Kronecker-Symbol $\delta^\mu{}_\nu$ ist in diesem Sinne auch ein Tensor der Stufe $(1, 1)$. Es stellt die identische Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ dar.

Aufgabe 3.2 Man zeige, dass für $\delta^\mu{}_\nu$ tatsächlich das Transformationsgesetz (3.15) gilt. Ist $\delta_{\mu\nu}$ ein Tensor der Stufe $(0, 2)$?

Wir sehen also, dass Tensoren ein sehr nützliches allgemeines Konzept darstellen, mit dessen Hilfe wir alle möglichen linearen Beziehungen zwischen Vektoren darstellen können. Zusammengefasst können wir sagen:

Ein **Tensor** ist eine Tabelle von reellen Zahlen, die einem Vektorraum \mathcal{V} und seinem Dualraum \mathcal{V}^* zugeordnet ist, und deren Einträge in einer bestimmten Art und Weise unter einem Basiswechsel transformieren.

Zum Schluss noch ein paar Anmerkungen zur Notation. Die Menge aller Tensoren der Stufe (m, n) , die selbst wieder einen Vektorraum bilden, bezeichnen wir mit $\mathcal{V}^{(m, n)}$. Es ist also $\mathcal{V}^{(1, 0)} = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}^{(0, 1)} = \mathcal{V}^*$, und $\mathcal{V}^{(1, 1)}$ ist die Menge aller linearen Abbildungen $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Zu welcher dieser Räume ein gegebener Tensor gehört, erkennen wir an der Anzahl m der oberen Indizes, und der Anzahl n der unteren Indizes. Wenn wir den Tensor als eine multilineare Abbildung interpretieren, sagt uns die Anzahl und Position der Indizes, wieviele Vektoren und wieviele duale Vektoren wir als Argumente einsetzen müssen. Außerdem sagt uns die Position der Indizes, wie sich das entsprechende Objekt unter Basistransformation verhält.

Natürlich muss die Reihenfolge der Argumente nicht immer die in (3.14) gegebene sein, also erst alle dualen Vektoren und dann alle Vektoren. Wenn das erste Argument der Multilinearform H ein Vektor, das zweite und dritte ein dualer Vektor, und das vierte wieder ein Vektor ist, so schreiben wir $H_\mu{}^{\nu\rho}{}_\sigma$.

Aufgabe 3.3 Man bestimme das Transformationsverhalten von $H_\mu{}^{\nu\rho}{}_\sigma$ unter einem Basiswechsel.

Tensoren können weitere Eigenschaften haben, zum Beispiel bestimmte Symmetrien. Bis jetzt spielten symmetrische Bilinearformen eine große Rolle, also symmetrische Tensoren der Stufe $(0, 2)$. Sie definieren eine symmetrische Bilinearform, also eine Metrik auf \mathcal{V} . Allgemein nennen wir einen Tensor $H_{\dots\mu\dots\nu\dots}$ *symmetrisch* in den Indizes μ und ν , wenn

$$H_{\dots\mu\dots\nu\dots} = H_{\dots\nu\dots\mu\dots}. \quad (3.16)$$

Eine entsprechende Definition gilt, wenn μ und ν obere Indizes sind. Natürlich bedeutet symmetrisch dann nichts anderes als dass die durch den Tensor definierte Multilinearform symmetrisch ist unter Vertauschung der entsprechenden Argumente. Entsprechend nennen wir einen Tensor $H_{\dots\mu\dots\nu\dots}$ *antisymmetrisch* in den Indizes μ und ν , wenn

$$H_{\dots\mu\dots\nu\dots} = -H_{\dots\nu\dots\mu\dots}. \quad (3.17)$$

Aufgabe 3.4 Es sei $H_{\mu\nu\rho}$ ein Tensor dritter Stufe, welcher in μ und ν (anti)symmetrisch ist, sowie in ν und ρ (anti)symmetrisch. Man zeige, dass $H_{\mu\nu\rho}$ auch in μ und ρ (anti)symmetrisch ist. Wieviele unabhängige Komponenten hat $H_{\mu\nu\rho}$?

Aufgabe 3.5 Es sei $H_{\mu\nu\rho}$ ein Tensor dritter Stufe, welcher in μ und ν symmetrisch, sowie in ν und ρ antisymmetrisch ist. Man zeige, dass $H_{\mu\nu\rho} = 0$.

Aufgabe 3.6 Warum ist es sinnlos zu sagen, ein Tensor $H^\mu_{\nu\rho}$ sei in μ und ν symmetrisch?

Tensorfelder und Verknüpfungen

Betrachten wir nun einen affinen Raum \mathcal{M} mit zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} . Punkte in \mathcal{M} bezeichnen wir mit $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ usw., und ihre Koordinaten bezüglich eines Koordinatensystems Σ seien durch x^μ, y^μ, z^μ usw. gegeben. Zu jedem solchen Koordinatensystem gehört eine Basis \mathbf{e}_μ des zugeordneten Vektorraums \mathcal{V} , und entsprechend eine Basis \mathbf{e}^μ des dualen Vektorraums \mathcal{V}^* . Unter einem *Tensorfeld* $F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$ der Stufe (m, n) , verstehen wir eine Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}^{(m,n)}$, welche jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ einen Tensor $F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}(\mathbf{x})$ zuordnet.

Wie verhält sich ein solches Objekt unter einer linearen Koordinatentransformation auf \mathcal{M} ? Wir gehen also über von einem Koordinatensystem Σ zu $\tilde{\Sigma}$, wobei sich die Koordinaten eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ wie folgt verhalten,

$$x^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} x^{\mu} + \lambda^{\tilde{\mu}}, \quad \Leftrightarrow \quad x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}} + \lambda^{\mu}. \quad (3.18)$$

Hier ist $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ eine invertierbare $d \times d$ -Matrix, λ^{μ} ein d -Vektor, und

$$\Lambda^{\mu}_{\tilde{\rho}} \Lambda^{\tilde{\rho}}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad \lambda^{\tilde{\mu}} = -\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \lambda^{\mu}. \quad (3.19)$$

Wir wissen bereits, dass sich dann die Basis von \mathcal{V} und die von \mathcal{V}^* wie folgt transformieren,

$$\mathbf{e}_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \mathbf{e}_{\mu}, \quad \mathbf{e}^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \mathbf{e}^{\mu}. \quad (3.20)$$

Also gilt für ein Tensorfeld der Stufe (m, n)

$$F^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}_{\tilde{\rho}\dots\tilde{\sigma}}(\mathbf{x}) = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \dots \Lambda^{\tilde{\nu}}_{\nu} \Lambda^{\rho}_{\tilde{\rho}} \dots \Lambda^{\sigma}_{\tilde{\sigma}} F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

und zwar für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. Zunächst ist das natürlich nichts anderes als (3.15). Allerdings können wir dies nun wie folgt umschreiben, indem wir gar nicht mehr auf die Basis in \mathcal{V} und \mathcal{V}^* Bezug nehmen, sondern nur noch auf die Koordinaten auf \mathcal{M} . Aus (3.18) entnehmen wir, dass

$$\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} = \frac{\partial x^{\tilde{\mu}}}{\partial x^{\mu}}, \quad \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\tilde{\mu}}}. \quad (3.22)$$

Statt (3.21) können wir also schreiben

$$F^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}_{\tilde{\rho}\dots\tilde{\sigma}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x^{\tilde{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \dots \frac{\partial x^{\tilde{\nu}}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\tilde{\rho}}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\tilde{\sigma}}} F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Ein Tensorfeld auf \mathcal{M} ist also eine Tabelle von reellen Funktionen auf \mathcal{M} , mit der Eigenschaft, dass die Einträge dieser Tabelle wie (3.23) transformieren, wenn wir von einem Koordinatensystem Σ zu einem anderen Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$ auf \mathcal{M} übergehen.

Aufgabe 3.7 Auf einem dreidimensionalen affinen Raum \mathcal{M} sei Σ ein Koordinatensystem mit Koordinaten (x, y, z) und ein antisymmetrisches Tensorfeld $F_{\mu\nu}$ der Stufe $(0, 2)$ sei definiert durch

$$F_{xy} = z, \quad F_{yz} = x, \quad F_{zx} = y. \quad (3.24)$$

Ein Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$ mit Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ sei definiert durch

$$\tilde{x} = x + y, \quad \tilde{y} = y + z, \quad \tilde{z} = z + x. \quad (3.25)$$

Man berechne die Komponenten des Tensorfeldes $F_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ im Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$.

Da wir hier nur lineare Koordinatentransformationen zulassen, ist ein Wechsel der Koordinaten natürlich nichts anderes als ein Wechsel der Basis des zugeordneten Vektorraumes \mathcal{V} , und eine zusätzliche Verschiebung der Koordinatenursprungs. Später werden wir jedoch sehen, dass sich das Konzept eines Tensorfeldes so verallgemeinern lässt, dass die Beziehung (3.23) auch für allgemeinere Koordinatentransformationen gilt. Es ist deshalb nützlich, sich diese Version der Definition eines Tensorfeldes zu merken.

Tatsächlich sind alle in der Physik bekannten Felder im Prinzip solche Tensorfelder, wobei der affine Raum \mathcal{M} in der relativistischen Physik die Raumzeit ist, oder in der Newtonschen Mechanik einfach nur der dreidimensionale Raum. Im Prinzip heißt, dass es noch ein paar Verallgemeinerungen gibt, von denen wir einige am Ende dieses Kapitels besprechen werden. Grundsätzlich gilt aber, dass die wesentlichen Eigenschaften von physikalischen Feldern durch ihr Verhalten unter Koordinatentransformation beschrieben wird.

Ein typisches Beispiel ist ein Kraftfeld in der Newtonschen Mechanik. Es ist ein Vektorfeld, also ein Tensorfeld der Stufe $(1, 0)$, das unter Drehungen, also unter bestimmten Koordinatentransformationen im Raum, in der hier gegebenen Art und Weise transformiert. Ein anderes aus der klassischen Physik bekanntes Beispiel für ein Tensorfeld zweiter Stufe ist der Spannungstensor in der Festkörperphysik, der den Druck und die Scherkräfte definiert.

Um mit solchen Tensorfeldern Physik zu betreiben, müssen wir Beziehungen zwischen ihnen aufstellen, und wir müssen sie verknüpfen können. Dazu werden wir nun ein paar Regeln aufstellen, mit deren Hilfe wir gegebene Tensoren zu neuen Tensoren zusammensetzen können. Da Tensoren lineare Objekte sind, können wir sie natürlich *addieren*. Die Summe zweier Tensoren gleicher Stufe (m, n) ist wieder ein Tensor der Stufe (m, n) ,

$$C^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} = A^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} + B^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}. \quad (3.26)$$

Das folgt unmittelbar aus der Linearität des Transformationsgesetzes (3.15). Wir können Tensoren aber auch miteinander *multiplizieren*. Aus einem Tensor der Stufe (m, n) und einem Tensor der Stufe (p, q) wird so ein Tensor der Stufe $(m + p, n + q)$, zum Beispiel

$$C^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} = A^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} B_{\rho\dots\sigma}, \quad C^{\mu\nu}_{\rho} = A^{\nu} B^{\mu}_{\rho}, \quad \text{oder} \quad C^{\mu} = A B^{\mu}. \quad (3.27)$$

Im letzten Fall handelt es sich einfach um die Multiplikation eines Vektors B^{μ} mit einem Skalar A , also die gewöhnliche skalare Multiplikation im Vektorraum \mathcal{V} .

Schließlich gibt es noch eine weitere Möglichkeit, aus einem Tensor einen neuen zu machen. Voraussetzung ist, dass der gegebene Tensor mindestens einen oberen und einen unteren Index besitzt, also die zugehörige Multilinearform mindestens einen Vektor und einen dualen Vektor als Argument hat. Dann können wir einen Tensor der Stufe (m, n) *verjüngen* oder *kontrahieren*, und erhalten einen Tensor der Stufe $(m - 1, n - 1)$,

$$C^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} = A^{\alpha\mu\dots\nu}_{\alpha\rho\dots\sigma} \quad (3.28)$$

Als Beispiel betrachten wir die am Anfang eingeführte Definition eines Skalarproduktes $\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Zunächst haben wir einen dualen Vektor p_μ und einen Vektor v^μ gegeben, also einen Tensor der Stufe $(0, 1)$ und einen der Stufe $(1, 0)$. Diese können wir durch Multiplikation zu einem Tensor $A^\mu_\nu = v^\mu p_\nu$ der Stufe $(1, 1)$ kombinieren. Wenn wir v^μ als einen Zeilenvektor und p_μ als einen Spaltenvektor interpretieren, ist das nichts anderes als die gewöhnliche Matrixmultiplikation. Schließlich können wir den Tensor A^μ_ν verjüngen und erhalten einen Skalar $C = A^\mu_\mu = v^\mu p_\mu$. In der Matrixdarstellung entspricht das dem Bilden der Spur.

Wir sehen also, dass wir mit Hilfe des Tensorkalküls alle typischen linearen Operationen formulieren können, für die wir sonst die Matrix- und Vektorschreibweise verwenden. Jedoch ist die Indexschreibweise sehr viel flexibler. Es wird daher später so sein, dass wir die Indizes nur noch verwenden, um den Typ des jeweiligen Objektes zu identifizieren. Es ist gar nicht mehr nötig, sich unter einem Index einen Platzhalter für Koordinaten oder Basisvektoren vorzustellen, der bestimmte Werte annimmt. Im Moment ist diese Vorstellung aber wohl noch ganz hilfreich.

Aufgabe 3.8 Man zeige, dass die durch (3.26-3.28) definierten Objekte C auch tatsächlich Tensoren sind, wenn A und B Tensoren sind.

Natürlich können wir auf diese Weise auch Tensorfelder zu neuen Tensorfeldern kombinieren, indem wir sie punktweise, das heißt an jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, in gleicher Weise addieren, multiplizieren, oder verjüngen. Für Tensorfelder gibt es aber noch eine spezielle weitere Operation, die ein Tensorfeld auf ein anderes abbildet, und zwar die *Ableitung* nach den Koordinaten. Sie bildet ein Tensorfeld $F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$ der Stufe (m, n) auf ein Tensorfeld $\partial_\alpha F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$ der Stufe $(m, n + 1)$ ab, welches als die Ableitung nach der Koordinate x^α definiert ist,

$$\partial_\alpha F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha} \quad (3.29)$$

Um zu zeigen, dass dies wieder ein Tensorfeld ist, betrachten wir der Einfachheit halber ein Tensorfeld F^μ_ν der Stufe $(1, 1)$. Dann gilt gemäß (3.23) beim Übergang von einem Koordinatensystem Σ zu $\tilde{\Sigma}$

$$F^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x^{\tilde{\mu}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{\nu}}} F^\mu_\nu(\mathbf{x}). \quad (3.30)$$

Nun leiten wir diese Gleichung nach $x^{\tilde{\alpha}}$ ab, und benutzen dabei, dass wegen der Linearität der Transformation die Ableitungen $\partial x^{\tilde{\mu}}/\partial x^\mu$ und $\partial x^\nu/\partial x^{\tilde{\nu}}$ konstant sind. Also gilt

$$\frac{\partial F^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}(\mathbf{x})}{\partial x^{\tilde{\alpha}}} = \frac{\partial x^{\tilde{\mu}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{\nu}}} \frac{\partial F^\mu_\nu(\mathbf{x})}{\partial x^{\tilde{\alpha}}} = \frac{\partial x^{\tilde{\mu}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{\nu}}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\tilde{\alpha}}} \frac{\partial F^\mu_\nu(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha}. \quad (3.31)$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Kettenregel. Was nun dort steht ist aber nichts anderes als die Transformationsregel für ein Tensorfeld der Stufe $(1, 2)$. Also ist $\partial_\alpha F^\mu_\nu$ ein Tensorfeld.

Aufgabe 3.9 Warum steht der Index α bei ∂_α unten?

Die Metrik

Einen speziellen Tensor hatten wir bereits früher eingeführt, nämlich eine symmetrische Bilinearform $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen einen solchen Tensor der Stufe $(0, 2)$ einen *metrischen* Tensor, oder einfach eine Metrik η auf \mathcal{V} . Es gilt also

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}. \quad (3.32)$$

Wir können eine Metrik auch als eine lineare Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ auffassen, wobei

$$v^\mu \mapsto v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu. \quad (3.33)$$

Jedem Vektor v^μ wird durch die Metrik ein dualer Vektor v_μ zugeordnet. Wir sagen, die Metrik sei *invertierbar* oder *nicht entartet*, wenn es eine inverse Abbildung $\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$ gibt,

$$v_\mu \mapsto v^\mu = \eta^{\mu\nu} v_\nu, \quad (3.34)$$

wobei $\eta^{\mu\nu}$ die zu $\eta_{\mu\nu}$ inverse $d \times d$ -Matrix ist, also

$$\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad \eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu. \quad (3.35)$$

Offenbar ist die *inverse Metrik* $\eta^{\mu\nu}$ ein Tensor der Stufe $(2, 0)$, also eine Bilinearform auf dem dualen Vektorraum \mathcal{V}^* . Wenn eine solche inverse Metrik existiert, dann werden die Vektorräume \mathcal{V} und \mathcal{V}^* durch die Metrik bijektiv aufeinander abgebildet.

Eine Metrik erlaubt es uns also, den Vektorraum \mathcal{V} mit seinem Dualraum \mathcal{V}^* zu identifizieren. Wir führen deshalb die folgende Schreib- und Sprechweise ein. Einen abstrakten Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ bezeichnen wir mit dem gleichen Symbol wie den ihm zugeordneten dualen Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^*$, denn wir haben die beiden Vektorräume ja identifiziert. Darstellen können wir diesen Vektor *entweder* durch ein d -Tupel v^μ von reellen Zahlen, das wie ein Vektor transformiert, *oder* durch ein d -Tupel v_μ von reellen Zahlen, das wie ein dualer Vektor transformiert, wenn wir einen Basiswechsel vornehmen.

Zwischen diesen beiden Darstellungen besteht stets der Zusammenhang (3.33) bzw. (3.34). Wir sagen deshalb auch, dass wir mit Hilfe der Metrik einen Index *hoch* und *runter* ziehen können. Dadurch ändern wir den abstrakten Vektor nicht, jedoch seine Darstellung und damit sein Transformationsverhalten unter Basiswechsel. In der Relativitätstheorie ist es auch üblich, das d -Tupel v_μ als die *kovarianten* Komponenten eines Vektors zu bezeichnen, und das d -Tupel v^μ als die *kontravarianten* Komponenten desselben Vektors. Auch diese Sprechweise hat ihren Ursprung

im Transformationsverhalten unter Basiswechsel und sagt letztlich nichts anderes, als dass die Komponenten wie die eines Vektors bzw. eines dualen Vektors transformieren.

Da wir bereits vorher die Skalarprodukt-Notation $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = p_\mu v^\mu$ für $\mathbf{p} \in \mathcal{V}^*$ und $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ eingeführt hatten, können wir diese nun erweitern und auch das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ oder dualen Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^*$ wie folgt schreiben:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^\mu w_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = v_\mu w^\mu = \eta^{\mu\nu} v_\mu w_\nu. \quad (3.36)$$

Wir können aber nicht nur Vektoren auf duale Vektoren abbilden und umgekehrt. Wir können mit Hilfe der Metrik auch die Indizes von beliebigen Tensoren hoch und runter ziehen. Sei zum Beispiel $A^{\mu\nu}{}_\rho$ ein Tensor der Stufe $(2, 1)$, also eine multilineare Abbildung $A : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Ferner sei durch $A^\mu{}_{\nu\rho}$ ein Tensor der Stufe $(1, 2)$ gegeben, also eine multilineare Abbildung $A : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, und es gelte

$$A^\mu{}_{\nu\rho} = \eta_{\nu\sigma} A^{\mu\sigma}{}_\rho \quad \Leftrightarrow \quad A^{\mu\nu}{}_\rho = \eta^{\nu\sigma} A^\mu{}_{\sigma\rho}. \quad (3.37)$$

Die Tensoren $A^\mu{}_{\nu\rho}$ und $A^{\mu\nu}{}_\rho$ werden also durch Hoch- bzw. Runterziehen des mittleren Index aufeinander abgebildet. Dann sind beides Darstellungen desselben Tensors dritter Stufe.

Aufgabe 3.10 Man zeige, dass $A^{\mu\nu}{}_\rho$ und $A^\mu{}_{\nu\rho}$ die gleiche multilineare Abbildung definieren, wenn \mathcal{V} und \mathcal{V}^* durch die Metrik identifiziert werden.

Entsprechendes gilt natürlich für jede Stufe. Einen Tensor der Stufe (m, n) können wir auf einen Tensor der Stufe $(m-1, n+1)$ abbilden, indem wir einen Index runter ziehen, oder auf einen Tensor der Stufe $(m+1, n-1)$, indem wir einen Index hoch ziehen. Es handelt sich dann um verschiedene Darstellungen des gleichen Tensors $m+n$ -ter Stufe. Es ist jedoch wichtig festzustellen, dass diese Identifizierung von Tensoren verschiedener Stufen nur dann möglich ist, wenn der Vektorraum \mathcal{V} mit einer invertierbaren Metrik ausgestattet ist. Wir können also festhalten:

Durch eine **Metrik** wird ein Vektorraum mit seinem Dualraum identifiziert, und die Indizes von Tensoren können beliebig hoch und runter gezogen werden.

Aufgabe 3.11 Die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ ist selbst ein Tensor der Stufe $(0, 2)$. Durch Hochziehen der Indizes können wir die Tensoren $\eta_\mu{}^\nu$ und $\eta^{\mu\nu}$ der Stufe $(1, 1)$, sowie den Tensor $\eta^{\mu\nu}$ der Stufe $(2, 0)$ bilden. Man berechne $\eta_\mu{}^\nu$ und $\eta^{\mu\nu}$, und zeige, dass der so definierte Tensor $\eta^{\mu\nu}$ tatsächlich die inverse Metrik ist, die Schreibweise also konsistent ist.

Mit Hilfe der Metrik können wir auch wie üblich *orthogonale* Vektoren definieren. Wir nennen zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ genau dann orthogonal, wenn $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = 0$. Ferner definieren wir den *Orthogonalraum* $\mathcal{V}_\mathbf{v}^\perp \subset \mathcal{V}$ eines nicht verschwindenden Vektors $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ als die Menge aller Vektoren, die zu \mathbf{v} orthogonal sind,

$$\mathcal{V}_\mathbf{v}^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\} = \{\mathbf{w} \in \mathcal{V} \mid v_\mu w^\mu = 0\}. \quad (3.38)$$

Der Orthogonalraum $\mathcal{V}_\mathbf{v}^\perp$ ist stets ein Untervektorraum von \mathcal{V} der Dimension $d-1$. Das folgt sofort aus der zweiten Darstellung in (3.38). Da v_μ ein nicht verschwindender dualer Vektor ist, wird durch $v_\mu w^\mu = 0$ eine lineare Gleichung für die d Komponenten w^μ definiert, also ist die Lösungsmenge ein $d-1$ dimensionaler Untervektorraum von \mathcal{V} .

Da wir nicht verlangen, dass die Metrik positiv ist, wird es im allgemeinen Vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ geben, so dass $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ positiv, negativ, oder sogar gleich Null ist, auch wenn \mathbf{v} selbst nicht Null ist. Einen nicht verschwindenden Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ mit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ nennen wir *Nullvektor*. Ein Nullvektor ist also zu sich selbst orthogonal, und es gibt solche Vektoren genau dann, wenn die Metrik nicht vollständig positiv oder negativ ist.

Unter einem *Einheitsvektor* verstehen wir einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$ mit $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ oder $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$. Wir müssen also zwischen zwei Arten von Einheitsvektoren unterscheiden. Auch wenn im Moment keine physikalische Motivation für diese Sprechweise besteht, wollen wir die Vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ mit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ *raumartig* und die Vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ mit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < 0$ *zeitartig* nennen. Aber, wie gesagt, das ist nur eine an dieser Stelle völlig unmotiviert Definition, die nicht unbedingt etwas mit den physikalischen Begriffen Raum und Zeit zu tun hat. Wir haben also im allgemeinen sowohl raumartige als auch zeitartige Einheitsvektoren.

Wenn $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ kein Nullvektor ist, und auch nicht gleich Null, so können wir diesem Vektor eindeutig einen Einheitsvektor $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$ zuordnen, der ein positives Vielfaches von \mathbf{v} ist, also in die gleiche Richtung zeigt wie \mathbf{v} ,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \pm 1. \quad (3.39)$$

Ob \mathbf{n} ein raumartiger oder zeitartiger Einheitsvektor ist, hängt vom Vorzeichen von $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ab. Für Nullvektoren, die wir auch *lichtartig* nennen, ist eine solche Definition offenbar nicht möglich. Das heißt, es gibt keine Einheitsvektoren die zugleich Nullvektoren sind.

Schließlich wollen wir noch definieren, was wir unter einer *Orthonormalbasis* verstehen. Es ist eine Basis e_μ von \mathcal{V} , die aus zueinander orthogonalen Einheitsvektoren besteht. In einer solchen Basis nehmen die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ und die inverse Metrik $\eta^{\mu\nu}$ eine besonders einfache Form an. Zunächst gilt

$$\eta_{\mu\nu} = \eta(e_\mu, e_\nu) = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } \mu = \nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (3.40)$$

Der metrische Tensor $\eta_{\mu\nu}$ wird also durch eine Diagonalmatrix dargestellt, deren Einträge ± 1 sind. Eine solche Matrix ist gleich ihrer Inversen, so dass der inverse metrische Tensor $\eta^{\mu\nu}$ die gleiche Matrixdarstellung hat. Eine Orthonormalbasis ist demnach durch die Eigenschaft definiert, dass

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Hier steht \mathbf{I} für die Einheitsmatrix. Die einzige Eigenschaft der Metrik, die von der Basis unabhängig ist, ist die *Anzahl* der raumartigen und zeitartigen Basisvektoren. Wenn p die Anzahl der zeitartigen, und q die Anzahl der raumartigen Basisvektoren ist, dann steht in (3.41) oben links

die $p \times p$ -Einheitsmatrix, und unten rechts die $q \times q$ -Einheitsmatrix. Das Paar (p, q) oder manchmal auch die Differenz $q - p$ wird die *Signatur* der Metrik genannt. Es gilt natürlich stets $d = p + q$.

Die **Signatur** einer Metrik definiert die Anzahl der zeitartigen und raumartigen Einheitsvektoren einer Orthonormalbasis.

Beispiele für Orthonormalbasen hatten wir bereits kennen gelernt. Natürlich ist die durch e_x, e_y, e_z gegebene Basis des dreidimensionalen Raumes der Newtonschen Mechanik in Kapitel 1 eine Orthonormalbasis. In diesem Fall ist $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, das heißt $p = 0$ und $q = 3$, und die Metrik ist positiv. Ein anderes Beispiel ist die in (2.49) eingeführte Metrik der zweidimensionalen Raumzeit, die wir in Kapitel 2 betrachtet haben. In diesem Fall ist $p = 1$ und $q = 1$, das heißt wir haben einen zeitartigen und einen raumartigen Basisvektor, und diese sind zueinander orthogonal.

Aufgabe 3.12 *Es sei \mathcal{V} ein Vektorraum und $\eta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ eine invertierbare Metrik. Man zeige, dass es stets eine Orthonormalbasis gibt, und dass jede Orthonormalbasis aus gleich vielen positiven bzw. negativen Einheitsvektoren besteht, dass also die Signatur tatsächlich eine Eigenschaft der Metrik η ist.*

Aufgabe 3.13 *Eine Orthonormalbasis kann offenbar keine Nullvektoren enthalten. Man zeige, dass auch eine Orthogonalbasis keine Nullvektoren enthalten kann.*

Die Invarianzgruppe

Wir hatten bereits gesehen, dass diejenigen Koordinatentransformationen auf dem affinen Raum \mathcal{M} eine besondere Rolle spielen, unter denen die Metrik auf dem zugeordneten Vektorraum *invariant* ist, das heißt unter denen sich die Darstellung des metrischen Tensors nicht ändert. In der Physik sind dies die *Symmetrien* der Raumzeit. Wir wollen diese Transformationen zuerst auf dem Vektorraum \mathcal{V} selbst untersuchen. Gesucht sind also solche Basistransformationen,

$$e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} e_{\mu}, \quad (3.42)$$

unter denen die Darstellung (3.41) der Metrik erhalten bleibt. Mit anderen Worten, wir suchen die Gruppe aller linearen Transformationen, die eine Orthogonalbasis wieder auf eine Orthogonalbasis abbilden. Natürlich wissen wir bereits, dass dies im Falle einer positiven Metrik mit Signatur $(0, d)$ die orthogonale Gruppe $O(d)$ ist. Wegen dieser Analogie wird die gesuchte Gruppe mit $O(p, q)$ bezeichnet, und *orthogonale Gruppe der Signatur (p, q)* genannt.

Wir wollen nun herausfinden, wie sich diese Gruppe von der gewöhnlichen orthogonalen Gruppe unterscheidet. Dazu schreiben wir zuerst die an die Drehmatrix $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ gestellte Bedingung auf. Die Metrik ist ein Tensor der Stufe $(0, 2)$, also gilt bei einem Basiswechsel

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}}. \quad (3.43)$$

Dabei soll sowohl $\eta_{\mu\nu}$ als auch $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ durch die Matrix (3.41) dargestellt werden.

Es ist an dieser Stelle nützlich, eine Matrixschreibweise einzuführen. Wir definieren eine $d \times d$ -Matrix $\Lambda = (\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}})$, sowie eine durch (3.41) gegebene $d \times d$ -Matrix η . Dann können wir (3.43) wie folgt schreiben,

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (3.44)$$

Das ist offenbar eine verallgemeinerte Definition einer orthogonalen Matrix. Für eine positive Metrik mit Signatur $(0, d)$ gilt $\eta = \mathbf{I}$, und wir erhalten wieder die gewöhnliche Definition der Gruppe $O(d)$. Das gleiche gilt natürlich auch für eine negative Metrik mit Signatur $(d, 0)$. Dann ist $\eta = -\mathbf{I}$, und wir erhalten wieder die Bedingung $\Lambda^T \Lambda = \mathbf{I}$. Es gilt also $O(0, d) = O(d, 0) = O(d)$.

Erinnern wir uns kurz, wie wir aus der Definition (3.44) für $\eta = \mathbf{I}$ die wesentlichen Eigenschaften der orthogonalen Gruppe $O(d)$ ableiten können. Zunächst können wir auf beiden Seiten der Gleichung die Determinante bilden und erhalten $\|\Lambda\|^2 = 1$, also $\|\Lambda\| = 1$ oder $\|\Lambda\| = -1$. Die Gruppe zerfällt in zwei nicht zusammenhängende Komponenten, die wir mit $O_+(d)$ und $O_-(d)$ bezeichnen. Die Untergruppe $O_+(d)$, oft auch $SO(d)$ genannt, enthält das Einselement und alle Drehungen, die sich stetig erzeugen lassen. Die Teilmenge $O_-(d)$ enthält alle Spiegelungen. Sie ist keine Untergruppe, da das Produkt von zwei Elementen daraus stets in $O_+(d)$ liegt.

Es ist außerdem leicht zu sehen, dass die Gruppe $O(d)$ *kompakt* ist, also eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge der Menge $\mathbb{R}^{d \times d}$ aller $d \times d$ -Matrizen. Dass sie abgeschlossen ist, folgt aus der Definition als Lösungsmenge eines Systems von quadratischen Gleichungen für die Komponenten. Um zu sehen, dass die Lösungsmenge beschränkt ist, bilden wir die Spur der Gleichung $\Lambda^T \Lambda = \mathbf{I}$. Das ergibt $\text{Tr}(\Lambda^T \Lambda) = d$. Nun ist aber $\text{Tr}(\Lambda^T \Lambda)$, wie man leicht nachrechnet, die Summe der Quadrate aller Matrixeinträge. Also ist jeder einzelne Eintrag kleiner oder gleich \sqrt{d} , und damit ist die Lösungsmenge der Gleichung $\Lambda^T \Lambda = \mathbf{I}$ beschränkt.

Aber kommen wir nun zur Gruppe $O(p, q)$. Zunächst sollten wir zeigen, dass durch (3.44) tatsächlich eine Gruppe definiert wird. Wir müssen zeigen, dass mit Λ und Λ' auch das Produkt $\Lambda \Lambda'$ und die inverse Matrix Λ^{-1} Elemente der Gruppe sind. Beginnen wir mit dem zweiten. Offenbar ist Λ invertierbar, wenn es die Bedingung (3.44) erfüllt. Die zu Λ inverse Matrix ist

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta, \quad (3.45)$$

denn

$$\Lambda^{-1} \Lambda = \eta \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \eta = \mathbf{I}. \quad (3.46)$$

Nun müssen wir zeigen, dass auch Λ^{-1} die Bedingung (3.44) erfüllt. Tatsächlich ist

$$(\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} = \eta \Lambda \eta \eta \Lambda^{-1} = \eta \Lambda \Lambda^{-1} = \eta. \quad (3.47)$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass mit Λ und Λ' auch das Produkt $\Lambda \Lambda'$ die gestellte Bedingung erfüllt. Das sehen wir wie folgt,

$$(\Lambda \Lambda')^T \eta (\Lambda \Lambda') = \Lambda'^T \Lambda^T \eta \Lambda \Lambda' = \Lambda'^T \eta \Lambda' = \eta. \quad (3.48)$$

Also ist $O(p, q)$ eine Gruppe. Wir können auch hier wieder auf beiden Seiten in (3.44) die Determinante bilden, und erhalten $\|A\|^2 = 1$. Also zerfällt auch die Gruppe $O(p, q)$ in zwei Komponenten, je nach dem Vorzeichen der Determinante.

Wie wir nun zeigen werden, zerfällt diese Gruppe aber sogar in vier nicht zusammenhängende Komponenten. Dazu schreiben wir die Matrix A als eine aus vier Matrizen zusammengesetzte Block-Matrix, genau wie die Metrik in (3.41),

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Es steht also oben links eine $p \times p$ -Matrix A , oben rechts eine $p \times q$ -Matrix B , unten links eine $q \times p$ -Matrix C , und unten rechts eine $q \times q$ -Matrix D . Entsprechend ist auch die Matrix η zerlegt. Wenn wir das in die linke Seite von (3.44) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^\top C - A^\top A & C^\top D - A^\top B \\ D^\top C - B^\top A & D^\top D - B^\top B \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Damit das wieder gleich der rechten Seite von (3.44) ist, muss gelten

$$A^\top A = C^\top C + \mathbf{I}, \quad D^\top D = B^\top B + \mathbf{I}, \quad A^\top B = C^\top D, \quad B^\top A = D^\top C. \quad (3.51)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind offenbar äquivalent, so dass wir drei Matrixgleichungen für die Teilmatrizen A, B, C, D erhalten.

Wir wollen hier nicht nach der allgemeinsten Lösung dieses Gleichungssystems suchen, sondern nur einige einfache Eigenschaften der Gruppe $O(p, q)$ daraus ableiten. Betrachten wir zuerst den Spezialfall $B = 0$ und $C = 0$. Dann sind gemäß (3.51) A und D zwei gewöhnliche, orthogonale Matrizen und A ist eine Blockdiagonalmatrix. Die Gruppe $O(p) \times O(q)$ ist also als Untergruppe in $O(p, q)$ enthalten. Das ist auch unmittelbar anschaulich. Unter solchen speziellen Transformationen mischen nur die zeitartigen bzw. nur die raumartigen Basisvektoren untereinander, und dabei handelt es sich jeweils um eine gewöhnliche Drehung.

Natürlich zerfällt diese Untergruppe in vier unzusammenhängende Komponenten $O_\pm(p) \times O_\pm(q)$. Um zu sehen, dass das auch für die gesamte Gruppe $O(p, q)$ gilt, betrachten wir die ersten beiden Gleichungen in (3.51) etwas genauer. In der ersten Gleichung steht auf beiden Seiten eine *symmetrische* $p \times p$ -Matrix. Wir wissen, dass solche Matrizen stets p orthogonale Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten haben. Es ist sogar so, dass die Eigenwerte einer Matrix der Form $C^\top C$ nicht negativ sind. Dazu sei der Spaltenvektor v ein Eigenvektor von $C^\top C$ mit Eigenwert $c \in \mathbb{R}$, und $w = Cv$. Dann gilt

$$c v^\top v = v^\top C^\top C v = w^\top w. \quad (3.52)$$

Nun ist aber $v^\top v > 0$ und $w^\top w \geq 0$, also $c \geq 0$. Damit sind die Eigenwerte von $C^\top C$ alle nicht negativ, und somit laut (3.51) die Eigenwerte von $A^\top A$ alle größer oder gleich Eins. Die Determinante von $A^\top A$ ist das Produkt aller Eigenwerte und somit auch mindestens gleich Eins. Da A eine quadratische Matrix ist, folgt daraus schließlich, dass entweder $\|A\| \geq 1$ oder $\|A\| \leq -1$.

Die gleiche Argumentation, angewandt auf die zweite Gleichung in (3.51), ergibt, dass entweder $\|D\| \geq 1$ oder $\|D\| \leq -1$.

Damit haben wir gezeigt, dass die Gruppe $O(p, q)$ in vier nicht zusammenhängende Komponenten zerfällt, die wir mit $O_{\pm\pm}(p, q)$ bezeichnen. Das erste Vorzeichen ist dabei das von $\|A\|$, das zweite das von $\|D\|$. Das Produkt der beiden Vorzeichen ergibt die Determinante $\|A\|$, die deswegen keine weitere Unterscheidung mehr ermöglicht. Das Einselement liegt in der Untergruppe $O_{++}(p, q)$, die anderen Komponenten bilden auch hier wieder keine Untergruppen.

Auch diese Unterteilung hat eine anschauliche Bedeutung. Wir erinnern uns, dass wir bei der gewöhnlichen orthogonalen Gruppe zwischen einfachen Drehungen und Spiegelungen unterscheiden konnten. Hier können wir nun zwischen zwei Arten von Spiegelungen unterscheiden. Offenbar können wir eine Spiegelung unter den zeitartigen Basisvektoren durchführen, oder eine unter den raumartigen, oder natürlich beides. Anders ausgedrückt, es gibt Zeitspiegelungen und Raumspiegelungen, jedenfalls wenn wir den Vektorraum \mathcal{V} als den der Raumzeit zugeordneten betrachten.

Wir wollen hier nicht sehr viel weiter in die Struktur der verallgemeinerten orthogonalen Gruppe $O(p, q)$ eingehen. Im Rahmen der Relativitätstheorie ist nur eine bestimmte solche Gruppe von Interesse, nämlich $O(1, 3)$. Diese werden wir im nächsten Kapitel ausführlicher untersuchen. Nützlich ist vielleicht aber noch die Feststellung, dass die Gruppe $O(p, q)$ im Gegensatz zu $O(d)$ nicht kompakt ist. Wenn wir nämlich in (3.44) die Spur bilden, erhalten wir wegen der in η vorkommenden negativen Einträge nicht mehr eine Summe aus Quadraten. Wir werden das gleich explizit an einem Beispiel sehen. Doch zunächst können wir festhalten:

Die **Invarianzgruppe** einer Metrik mit Signatur (p, q) ist die verallgemeinerte orthogonale Gruppe $O(p, q)$, die in vier Komponenten $O_{\pm\pm}(p, q)$ zerfällt.

Die Isometriegruppe

Die *Isometriegruppe* eines affinen Raumes \mathcal{M} ist eine einfache Erweiterung der Invarianzgruppe des zugeordneten Vektorraumes \mathcal{V} . Es ist die Gruppe aller Koordinatentransformationen auf \mathcal{M} , unter denen der metrische Tensor invariant ist. Der Unterschied zur Invarianzgruppe ist, dass nun auch Verschiebungen als Koordinatentransformationen auftreten, die aus der Sicht des Vektorraumes \mathcal{V} sozusagen unsichtbar sind.

Sei also \mathcal{M} ein d -dimensionaler affiner Raum, \mathcal{V} der zugeordnete Vektorraum, und η eine auf \mathcal{V} definierte Metrik mit Signatur (p, q) . Unter einem *orthonormalen*, oder *kartesischen* Koordinatensystem auf \mathcal{M} verstehen wir ein Koordinatensystem Σ mit Koordinaten x^μ , so dass die zugeordnete Basis e_μ von \mathcal{V} eine Orthonormalbasis ist.

Nun betrachten wir eine allgemeine lineare Transformation der Koordinaten,

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}} + \lambda^\mu \quad \Rightarrow \quad e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} e_\mu, \quad (3.53)$$

und fragen uns, ob das transformierte Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$ auch kartesisch ist. Offenbar ist das genau dann der Fall, wenn die Drehmatrix $\Lambda^\mu_{\tilde{\mu}}$ eine orthogonale Matrix ist, also ein Element von

$O(p, q)$. Die Verschiebung um den Vektor λ^μ hat keinen Einfluss auf diese Eigenschaft.

Damit kennen wir aber auch die Isometriegruppe. Ein Element dieser Gruppe wird durch eine Matrix $A^\mu_{\tilde{\mu}}$ aus $O(p, q)$ und einen beliebigen Vektor λ^μ dargestellt. Da auch diese Gruppe nur von der Signatur der Metrik abhängt, nennen wir sie $ISO(p, q)$. Auch sie zerfällt wieder in vier unzusammenhängende Komponenten $ISO_{\pm\pm}(p, q)$, falls sowohl $p > 0$ und $q > 0$, während $ISO(d, 0) = ISO(0, d) = ISO(d)$ nur in zwei Komponenten $ISO_{\pm}(d)$ zerfällt. So ist zum Beispiel $ISO(3)$ die gewöhnliche Isometriegruppe des dreidimensionalen Raumes, bestehend aus Drehungen, Spiegelungen, und Verschiebungen, während $ISO_+(3)$ die Spiegelungen nicht enthält.

Wie sieht nun die Gruppenmultiplikation in $ISO(p, q)$ aus? Tatsächlich besitzt auch diese Gruppe eine einfache Matrixdarstellung. Dazu kombinieren wir die Drehmatrix $A^\mu_{\tilde{\mu}}$ und den als Spaltenvektor aufgefassten Vektor λ^μ zu einer "großen" $(d+1) \times (d+1)$ -Matrix,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A^\mu_{\tilde{\mu}} & \lambda^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Oben links steht also die $d \times d$ -Matrix, die wir vorher als A bezeichnet hatten, rechts daneben steht ein Spaltenvektor mit d Komponenten, und in der unteren Zeile stehen d Nullen und eine Eins. Wir wollen nun zeigen, dass erstens das Produkt zweier solcher Matrizen wieder von dieser Form ist, und zweitens diese Multiplikation genau dem hintereinander Ausführen der entsprechenden Koordinatentransformationen entspricht. Dazu stellen wir zunächst fest, dass wir die Transformation (3.53) auch als Matrixprodukt schreiben können, wenn wir einen "verlängerten" Koordinatenvektor einführen,

$$\zeta = \begin{pmatrix} x^\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\mu_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}} + \lambda^\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\mu_{\tilde{\mu}} & \lambda^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\tilde{\mu}} \\ 1 \end{pmatrix} = \Gamma \tilde{\zeta}. \quad (3.55)$$

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation folgt dann sofort die gewünschte Eigenschaft, nämlich dass das hintereinander Ausführen von zwei Koordinatentransformationen dem Produkt der Matrizen entspricht. Bleibt nur noch zu zeigen, dass die Matrix (3.54) auch invertierbar ist, obwohl genau genommen auch das schon aus der Darstellung (3.55) und der Tatsache folgt, dass Koordinatentransformationen invertierbar sind. Trotzdem geben wir hier der Vollständigkeit halber die explizite Darstellungen der inversen Matrix an,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A^\mu_{\tilde{\mu}} & \lambda^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} A^{\tilde{\mu}}_{\mu} & \lambda^{\tilde{\mu}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

wobei die inverse Matrix $A^{\tilde{\mu}}_{\mu}$ und der Vektor $\lambda^{\tilde{\mu}}$ wieder durch (3.19) gegeben sind.

Um diese allgemeine Diskussion der Symmetriegruppen von affinen Räumen abzuschließen, wollen wir noch ein explizites Beispiel betrachten, nämlich die zweidimensionale Raumzeit aus dem letzten Kapitel. Wir hatten die Symmetrien dieser Raumzeit bereits aus dem Relativitätsprinzip hergeleitet, und waren auf die Lorentz-Transformationen (2.26) gestoßen. Es sollte nun möglich sein, dieses Ergebnis mit Hilfe der allgemeinen Herleitung von oben zu reproduzieren.

Gesucht ist also zunächst die Invarianzgruppe einer Metrik mit Signatur $(1, 1)$. Wie also sieht die Gruppe $O(1, 1)$ aus? Wir können die Matrixdarstellungen (3.49) benutzen, wobei aus den Teilmatrizen jetzt einfach Zahlen werden, also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Damit $A \in O(1, 1)$ ein Element der Gruppe ist, müssen die Gleichungen (3.51) erfüllt sein, das heißt

$$a^2 = c^2 + 1, \quad d^2 = b^2 + 1, \quad ab = cd. \quad (3.58)$$

Außerdem erinnern wir uns, dass es die Vorzeichen von a und d sind, die über die Zugehörigkeit des jeweiligen Gruppenelementes zu einer der vier Komponenten $O_{\pm\pm}(1, 1)$ entscheiden. Betrachten wir zunächst nur die Untergruppe $O_{++}(1, 1)$. Dann ist $a \geq 1$ und $d \geq 1$, und folglich

$$a = \sqrt{c^2 + 1}, \quad d = \sqrt{b^2 + 1}. \quad (3.59)$$

Die dritte Gleichung lautet dann

$$b \sqrt{c^2 + 1} = c \sqrt{b^2 + 1} \Rightarrow b^2 c^2 + b^2 = c^2 b^2 + c^2 \Rightarrow b = c, \quad (3.60)$$

denn b und c müssen das gleiche Vorzeichen haben. Es bleibt also nur ein reeller Parameter b oder c übrig. Es bietet sich an, diesen durch einen neuen Parameter $\chi \in \mathbb{R}$ zu ersetzen, so dass

$$b = c = \sinh \chi \Rightarrow a = d = \cosh \chi. \quad (3.61)$$

Die Gruppe $O_{++}(1, 1)$ ist also eine eindimensionale Gruppe, und ein Element daraus hat die Gestalt

$$A(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Das hat natürlich eine sehr große Ähnlichkeit mit einer gewöhnlichen Drehmatrix. So gilt zum Beispiel, wie man leicht nachrechnet, das Multiplikationsgesetz

$$A(\chi_1) A(\chi_2) = A(\chi_1 + \chi_2). \quad (3.63)$$

Der entscheidende Unterschied ist jedoch, dass die Winkelfunktionen durch Hyperbelfunktionen ersetzt wurden, und dass der Parameter χ nicht periodisch ist. Das sehen wir auch in Abbildung 2.8. Unter einer orthogonalen Transformation (3.62), oder wie wir es im letzten Kapitel genannt haben, unter einer Lorentz-Transformation bewegen sich die Basisvektoren entlang der in Abbildung 2.8(b) gezeigten Hyperbeln. Die Hyperbeln sind in diesem Sinne die "Einheitskreise" im Vektorraum \mathcal{V} . Die Tatsache, dass dies keine geschlossenen Linien sind, äußert sich darin, dass die "Drehgruppe" nicht periodisch ist.

Um die Darstellung (2.26) wieder zu finden, müssen wir den Parameter χ durch die Geschwindigkeit v ersetzen, und zwar so dass

$$v = \tanh \chi \quad \Rightarrow \quad \gamma(v) = \cosh \chi, \quad v \gamma(v) = \sinh \chi. \quad (3.64)$$

Die Geschwindigkeit v nimmt also, im Gegensatz zu χ , nur Werte zwischen -1 und 1 an. Da χ ein Art Winkel definiert, und wegen der einfachen Multiplikationsregel (3.63), ist es manchmal sinnvoller, χ statt v als Parameter einer Lorentz-Transformation zu wählen. Die Größe χ wird *Rapidität* genannt, und letztlich ist es eine alternative Definition für die Relativgeschwindigkeit von zwei Inertialsystemen.

Und wie sehen die Elemente der Teilmengen $O_{+-}(1, 1)$, $O_{-+}(1, 1)$ und $O_{--}(1, 1)$ aus? Dazu müssen wir zusätzlich zur Drehung (3.62) noch eine Spiegelung der Zeit bzw. des Raumes durchführen. Wir erreichen das, indem wir in der Rechnung oben jeweils andere Vorzeichen für die Wurzeln in (3.59) wählen. So erhalten wir schließlich eine Darstellung der gesamten Gruppe,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} &\in O_{++}(1, 1), & \begin{pmatrix} -\cosh \chi & \sinh \chi \\ -\sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} &\in O_{-+}(1, 1), \\ \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi \\ \sinh \chi & -\cosh \chi \end{pmatrix} &\in O_{+-}(1, 1), & \begin{pmatrix} -\cosh \chi & -\sinh \chi \\ -\sinh \chi & -\cosh \chi \end{pmatrix} &\in O_{--}(1, 1). \end{aligned} \quad (3.65)$$

In Abbildung 2.2 kann man sich leicht vorstellen, wie diese Transformationen wirken. Zusätzlich zu der dort dargestellten Transformation wird die Richtung der Zeit- bzw. der Raumachse umgekehrt. Im Unterschied zu einer gewöhnlichen Rotation, also zur Drehgruppe $O(2)$, kann eine gleichzeitige Reflexion beider Achsen offenbar nicht durch eine "Rotation um 180° " rückgängig gemacht werden. Das ist der Grund dafür, dass die Gruppe $O(1, 1)$ in vier statt in nur zwei Komponenten zerfällt.

Pseudotensoren

Das Konzept eines Tensors lässt sich noch ein wenig verallgemeinern, und wir werden später einige dieser Erweiterungen benötigen, so dass es nützlich ist, diese bereits hier einzuführen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel. Es sei wieder \mathcal{V} ein d -dimensionaler Vektorraum, η eine invertierbare Metrik mit Signatur (p, q) , und e_μ sei eine Orthonormalbasis, so dass also $\eta_{\mu\nu}$ die Diagonalform (3.41) hat. Die Indizes μ, ν, \dots sollen die Werte $1, \dots, d$ annehmen.

Wir definieren nun einen *vollständig antisymmetrisches* Objekt $\varepsilon^{\mu\dots\nu}$ mit d oberen Indizes, das in jedem Paar seiner Indizes antisymmetrisch ist. Bezüglich jeder Orthonormalbasis e_μ sollen seine Komponenten wie folgt gegeben sein,

$$\varepsilon^{\mu\dots\nu} = \begin{cases} +1 & \text{falls } \mu, \dots, \nu \text{ eine gerade Permutation von } 1, \dots, d \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } \mu, \dots, \nu \text{ eine ungerade Permutation von } 1, \dots, d \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls zwei der Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (3.66)$$

Offenbar ist dieses Objekt in jedem Indexpaar antisymmetrisch, denn beim Vertauschen zweier Indizes wird aus einer geraden Permutation eine ungerade und umgekehrt. Am besten machen wir uns das an einem Beispiel klar. Es sei $d = 3$. Dann hat $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ insgesamt 27 Komponenten, von denen aber alle außer 6 verschwinden, weil zwei der Indizes gleich sind. Die 6 nicht verschwindenden Komponenten sind

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1, \quad \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = \varepsilon^{213} = -1. \quad (3.67)$$

Aufgabe 3.14 Man schreibe alle nicht verschwindenden Komponenten von $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ für $d = 4$ auf.

Die Frage ist nun, ist dieses Objekt ein Tensor der Stufe $(d, 0)$? Dazu müssen wir prüfen, ob unter einem Basiswechsel $e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} e_\mu$, mit $\Lambda \in O(p, q)$, das übliche Transformationsgesetz gilt, ob also

$$\varepsilon^{\mu\dots\nu} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \dots \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} \varepsilon^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}, \quad (3.68)$$

wenn mit e_μ auch $e_{\tilde{\mu}}$ eine Orthonormalbasis ist.

Nehmen wir nun an, dass μ, \dots, ν eine gerade Permutation der Indizes $1, \dots, d$ ist, zum Beispiel $\mu = 1, \dots, \nu = d$. Dann steht auf der linken Seite eine Eins, und auf der rechten Seite steht eine Summe über alle Permutationen der Indizes $\tilde{\mu}, \dots, \tilde{\nu}$, wobei die Summanden jeweils mit der Signatur der Permutation multipliziert werden.

Das aber ist genau die Definition der *Determinante* der Matrix $\Lambda = (\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}})$. Die Gleichheit (3.68) gilt also genau dann, wenn $\|\Lambda\| = 1$. Also nur für Transformationen $\Lambda \in O_{++}(p, q)$ oder $\Lambda \in O_{--}(p, q)$, nicht jedoch für $\Lambda \in O_{+-}(p, q)$ und $\Lambda \in O_{-+}(p, q)$. Demnach ist $\varepsilon^{\mu\dots\nu}$ kein Tensor. Trotzdem können wir ein einfaches Transformationsgesetz angeben, dass für jeden Basiswechsel $\Lambda \in O(p, q)$ stimmt. Es gilt nämlich

$$\|\Lambda\| \varepsilon^{\mu\dots\nu} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \dots \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} \varepsilon^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}. \quad (3.69)$$

Wir wollen ein Objekt mit diesem Transformationsverhalten einen *Pseudotensor* nennen. Tatsächlich kennen wir solche Objekte bereits aus der klassischen Mechanik.

Bevor wir uns ein Beispiel ansehen, geben wir zuerst eine etwas allgemeinere Definition. Es ist nicht nötig, dass der Vektorraum \mathcal{V} mit einer Metrik versehen ist. Sei also zunächst \mathcal{V} ein beliebiger d -dimensionaler Vektorraum, und \mathcal{V}^* der duale Vektorraum. Die möglichen Basistransformationen $e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} e_\mu$ bilden dann die allgemeine lineare Gruppe $GL(d)$, und diese zerfällt in zwei Komponenten $GL_{\pm}(d)$, wobei das Vorzeichen das der Determinante der Matrix $\Lambda \in GL(d)$ ist. Wir schreiben als Abkürzung für dieses Vorzeichen $\text{sgn}(\Lambda) = \text{sgn}(\|\Lambda\|)$.

Unter einem *Pseudotensor* der Stufe (m, n) verstehen wir eine Tabelle $B^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$ aus d^{m+n} reellen Zahlen, die unter einem Basiswechsel $e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} e_\mu$ wie folgt transformiert,

$$B^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}_{\tilde{\rho}\dots\tilde{\sigma}} = \text{sgn}(\Lambda) \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \dots \Lambda^{\tilde{\nu}}_{\nu} \Lambda^{\rho}_{\tilde{\rho}} \dots \Lambda^{\sigma}_{\tilde{\sigma}} B^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}, \quad (3.70)$$

wobei $\Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu}$ wieder die inverse Transformationsmatrix ist.

Anschaulich bedeutet (3.70) folgendes. Wir können die Basen eines Vektorraumes in *Rechts-* und *Linksbasen* unterteilen, indem wir irgendeine Basis auswählen und sagen, das sei eine Rechtsbasis. Die Rechtsbasen sind dann die, die aus der festgelegten Basis durch Transformationen $\Lambda \in \text{GL}_+(d)$ hervorgehen, und die Linksbasen sind diejenigen, die aus der festgelegten Basis durch Transformationen $\Lambda \in \text{GL}_-(d)$ hervorgehen.

Das Transformationsverhalten eines Pseudotensors lässt sich dann wie folgt beschreiben. Beim Übergang von einer Rechts- zu einer anderen Rechtsbasis verhält er sich wie ein Tensor. Das gleiche gilt beim Übergang von einer Links- zu einer anderen Linksbasis. Bei einem Übergang von einer Rechts- zu einer Linksbasis oder umgekehrt ändert sich jedoch zusätzlich das Vorzeichen. Kurz zusammengefasst:

Ein **Pseudotensor** wechselt bei einer Reflexion der Basis sein Vorzeichen.

Wir können mit Pseudotensoren genau so rechnen wie mit normalen Tensoren. Wie können sie also Addieren, Multiplizieren und Verjüngen. Allerdings ändert sich dabei unter Umständen das Transformationsverhalten.

Aufgabe 3.15 Man zeige, dass die Summe zweier Pseudotensoren gleicher Stufe wieder ein Pseudotensor ist. Wie verhält es sich mit dem Produkt von zwei Pseudotensoren? Kann man einen Pseudotensor mit einem Tensor multiplizieren, und wenn ja, was für ein Objekt ist das Produkt? Kann man Pseudotensoren auch verjüngen?

Offenbar benötigen wir für die Definition eines Pseudotensors keine Metrik. Wenn eine solche existiert, gilt aber für Pseudotensoren das gleiche wie für Tensoren. Wir können Indizes beliebig hoch und runter ziehen, und zum Beispiel einen Pseudovektor l^μ mit einem dualen Pseudovektor $l_\mu = \eta_{\mu\nu} l^\nu$ identifizieren.

Außerdem gilt noch folgendes. Zusammen mit der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ bekommen wir stets, sozusagen kostenlos, einen speziellen Pseudotensor der Stufe $(d, 0)$ mitgeliefert, nämlich den vollständig antisymmetrischen Pseudotensor $\varepsilon^{\mu\dots\nu}$, der wie in (3.66) definiert ist, und zwar bezüglich jeder beliebigen Orthonormalbasis. Dieser Pseudotensor wird üblicherweise als *Levi-Civita-Tensor* bezeichnet.

Natürlich können wir die Indizes auch nach unten ziehen, das heißt wir können den Levi-Civita-Tensor als einen Pseudotensor $\varepsilon_{\mu\dots\nu}$ der Stufe $(0, d)$ darstellen.

Aufgabe 3.16 Die Signatur der Metrik sei (p, q) . Man zeige, dass bezüglich jeder Orthonormalbasis e_μ die Komponenten von $\varepsilon_{\mu\dots\nu}$ wie folgt gegeben sind,

$$\varepsilon_{\mu\dots\nu} = (-1)^p \begin{cases} +1 & \text{falls } \mu, \dots, \nu \text{ eine gerade Permutation von } 1, \dots, d \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } \mu, \dots, \nu \text{ eine ungerade Permutation von } 1, \dots, d \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls zwei der Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (3.71)$$

Als Beispiel betrachten wir den dreidimensionalen, Euklidischen Raum \mathcal{M} und den zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} , versehen mit einer positiven Metrik η . Um bei der gewohnten Notation zu bleiben,

bezeichnen wir die Indizes wieder mit kleinen lateinischen Buchstaben m, n, \dots . Wir haben also eine Orthonormalbasis e_m , mit $m = x, y, z$, und einen metrischen Tensor $\eta_{mn} = \delta_{mn}$. Der kostenlos mitgelieferte Levi-Civita-Tensor ist ε^{mnp} mit

$$\varepsilon^{xyz} = \varepsilon^{yzx} = \varepsilon^{zxy} = 1, \quad \varepsilon^{xzy} = \varepsilon^{zyx} = \varepsilon^{yxz} = -1. \quad (3.72)$$

Natürlich ist das der bekannte *antisymmetrische Einheitstensor* aus der Mechanik. Wir können ihn verwenden, um zum Beispiel den Drehimpuls eines Teilchens bezüglich eines festen Punktes $\mathbf{o} \in \mathcal{M}$ zu definieren. Dazu sei $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ der Ort des Teilchens, und $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ der Impuls. Dies und der Ortsvektor $\mathbf{x} - \mathbf{o} \in \mathcal{V}$ sind Vektoren, deren Komponenten wir wie üblich als p^m und $x^m - o^m$ schreiben. Der Drehimpuls ist dann definiert durch

$$L^m = \varepsilon^{mnp} p_n (x_p - o_p) = \varepsilon^m_{np} p^n (x^p - o^p). \quad (3.73)$$

Der Drehimpuls ist also ein Pseudovektor, oder ein Pseudotensor erster Stufe. Unter einer Reflexion des Raumes ändert er sein Vorzeichen. Ein anderes Bekanntes Beispiel für einen Pseudovektor ist das magnetische Feld in der klassischen Formulierung der Maxwell'schen Elektrodynamik. Das werden wir in Kapitel 6 genauer untersuchen.

Offenbar spielen Pseudotensoren in der Physik durchaus eine Rolle. Trotzdem kommen wir im Prinzip ohne sie aus, und wir werden später tatsächlich sehen, dass zum Beispiel die relativistische Formulierung der Elektrodynamik keine Pseudotensoren benötigt. Der Grund dafür ist sehr einfach und an dieser Stelle bereits offensichtlich. Wenn nämlich auf dem Vektorraum \mathcal{V} eine Metrik $\eta_{\mu\nu}$ existiert, und damit auch ein Levi-Civita-Tensor $\varepsilon^{\mu\dots\nu}$, so können wir jedem Pseudotensor einen Tensor zuordnen, der letztlich die gleiche Information enthält.

Eine komplizierte aber im allgemeinen Fall mögliche Art, dies zu tun, ist einen Pseudotensor der Stufe (m, n) einfach mit dem Pseudotensor $\varepsilon^{\mu\dots\nu}$ zu multiplizieren. Das Ergebnis ist dann ein Tensor der Stufe $(m + d, n)$. In den meisten Fällen geht es aber auch einfacher. Betrachten wir als Beispiel wieder den Drehimpuls in der Newton'schen Mechanik. Statt wie in (3.73) den Drehimpuls als einen Pseudovektor zu definieren, können wir ihn auch als einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe definieren,

$$L^{mn} = p^m (x^n - o^n) - p^n (x^m - o^m). \quad (3.74)$$

Dieser enthält die gleiche Information, denn wie man leicht nachrechnet gilt

$$L^p = \frac{1}{2} \varepsilon^{pmn} L_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad L^{mn} = \varepsilon^{mnp} L_p. \quad (3.75)$$

In einem dreidimensionalen Vektorraum mit Metrik gibt es also eine bijektive Abbildung, die jedem Pseudovektor eindeutig einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe zuordnet und umgekehrt.

Aufgabe 3.17 Es sei \mathcal{V} ein d -dimensionaler Vektorraum mit einer invertierbaren Metrik. Man zeige, dass es eine bijektive Abbildung gibt, die jedem total antisymmetrischen Pseudotensor n -ter Stufe einen total antisymmetrischen Tensor $(d - n)$ -ter Stufe zuordnet. Warum macht diese

Aussage nur Sinn, wenn $0 \geq n \geq d$ ist, bzw. wie verhält es sich mit einem total antisymmetrischen (Pseudo-)Tensor n -ter Stufe, wenn $n > d$?

Aufgabe 3.18 Es sei \mathcal{V} ein d -dimensionaler Vektorraum mit einer invertierbaren Metrik. Bezüglich einer Basis $e_{\tilde{\mu}}$, die keine Orthonormalbasis ist, sei der metrische Tensor durch $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ und der Levi-Civita-Tensor durch $\varepsilon^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}}$ gegeben. Man zeige, dass

$$\varepsilon^{\tilde{\mu}\dots\tilde{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\eta}|}} \begin{cases} +1 & \text{falls } \tilde{\mu}, \dots, \tilde{\nu} \text{ eine gerade Permutation von } \tilde{1}, \dots, \tilde{d} \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } \tilde{\mu}, \dots, \tilde{\nu} \text{ eine ungerade Permutation von } \tilde{1}, \dots, \tilde{d} \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls zwei der Indizes gleich sind,} \end{cases} \quad (3.76)$$

wobei $|\tilde{\eta}|$ der Betrag der Determinante der Matrix $\tilde{\eta} = (\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}})$ ist. Man beachte, dass diese Determinante von der gewählten Basis abhängt.

Die Volumenform

Zum Schluss wollen wir noch eine weitere Struktur einführen, die uns auch hin und wieder begegnen wird, vor allem später in der allgemeinen Relativitätstheorie. Dazu sei zunächst wieder \mathcal{M} ein d -dimensionaler affiner Raum, \mathcal{V} der zugeordnete Vektorraum, und $\eta_{\mu\nu}$ ein invertierbare Metrik mit Signatur (p, q) , sowie e_{μ} eine Orthonormalbasis, zu der ein kartesisches Koordinatensystem Σ auf \mathcal{M} gehört.

Ferner sei F^{μ}_{ν} ein Tensorfeld der Stufe $(1, 1)$, von dem wir annehmen, dass es im unendlichen genügend schnell gegen Null geht. Dann können wir das Integral von F^{μ}_{ν} bilden,

$$G^{\mu}_{\nu} = \int_{\mathcal{M}} d^d \mathbf{x} F^{\mu}_{\nu}(\mathbf{x}), \quad (3.77)$$

und uns fragen, was für ein Objekt G^{μ}_{ν} ist. Das Integral ist als übliches Integral über die Koordinaten x^{μ} definiert, also

$$\int_{\mathcal{M}} d^d \mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^d. \quad (3.78)$$

Insbesondere stellt sich die Frage, ob G^{μ}_{ν} ein Tensor ist. Sei also durch $\tilde{\Sigma}$ ein zweites, ebenfalls kartesisches Koordinatensystem gegeben. Dann kennen wir das Transformationsverhalten von F^{μ}_{ν} , nämlich

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}} + \lambda^{\mu} \Rightarrow F^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}(\mathbf{x}) = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} F^{\mu}_{\nu}(\mathbf{x}). \quad (3.79)$$

Um das Transformationsverhalten von G^{μ}_{ν} zu finden, müssen wir zusätzlich berücksichtigen, dass sich auch das Integrationsmaß verändert, wenn wir zu einem neuen Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$ über gehen. Aus dem Transformationsverhalten der Koordinaten folgt, dass

$$\int dx^{\tilde{1}} \dots \int dx^{\tilde{d}} = \int dx^1 \dots \int dx^d \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right|, \quad (3.80)$$

wobei $|\partial \tilde{x} / \partial x|$ die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation ist. Das ist genau der inverse Betrag der Determinante $|A|^{-1}$ der Transformationsmatrix $A = (\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}})$. Es gilt also

$$G^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}} = |A|^{-1} \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} G^{\mu}_{\nu}. \quad (3.81)$$

Nun hatten wir aber angenommen, dass sowohl durch Σ als auch durch $\tilde{\Sigma}$ ein kartesisches Koordinatensystem gegeben ist. Demnach ist $A \in O(p, q)$, und daraus folgt $|A| = 1$. Also transformiert sich G^{μ}_{ν} wie ein Tensor. Natürlich gilt dasselbe auch für Tensoren jeder anderen Stufe, und wie man leicht sieht auch für Pseudotensoren. In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Integral eines Tensorfeldes also wieder ein Tensor.

Jedoch geht offenbar etwas schief, wenn wir die Integration nicht in einem kartesischen, sondern in irgendeinem anderen Koordinatensystem ausführen. Denn dann ist die Jacobi-Determinante in (3.81) nicht mehr gleich Eins, und folglich transformiert G^{μ}_{ν} nicht mehr wie ein Tensor. Um trotzdem eine Integration ausführen zu können, und zwar so, dass das Ergebnis wieder ein Tensor ist, müssen wir die Definition (3.77) des Integrals ein wenig ändern.

Wir wollen also weiterhin aus einem gegebenen Tensorfeld F^{μ}_{ν} einen Tensor G^{μ}_{ν} erzeugen, aber wir wollen das Integral so definieren, dass wir es auch in einem nicht-kartesischen Koordinatensystem ausrechnen können. Sei also Σ ein kartesisches Koordinatensystem und $\tilde{\Sigma}$ ein beliebiges anderes. Dann soll in Σ weiterhin gelten

$$G^{\mu}_{\nu} = \int dx^1 \dots \int dx^d F^{\mu}_{\nu}(\mathbf{x}). \quad (3.82)$$

Andererseits soll F^{μ}_{ν} ein Tensorfeld und G^{μ}_{ν} ein Tensor sein. Wenn wir zunächst nur die Indizes, aber nicht das Integrationsmaß transformieren, so muss gelten

$$G^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}} = \int dx^1 \dots \int dx^d F^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}(\mathbf{x}). \quad (3.83)$$

Transformieren wir nun zusätzlich das Integrationsmaß, so folgt daraus

$$G^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}} = \int dx^{\tilde{1}} \dots \int dx^{\tilde{d}} |A| F^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}(\mathbf{x}). \quad (3.84)$$

Da $\tilde{\Sigma}$ kein kartesisches Koordinatensystem ist, ist $|A|$ im allgemeinen nicht gleich Eins. Um das Integral in einem nicht-kartesischen Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$ auszuwerten, müssen wir also einen zusätzlichen Faktor in das Integrationsmaß einbeziehen. Die Frage ist, können wir diesen Faktor ermitteln, ohne auf ein kartesischen Koordinatensystem Σ Bezug zu nehmen?

Tatsächlich ist das möglich. Betrachten wir dazu den metrischen Tensor, der in $\tilde{\Sigma}$ gegeben ist durch

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}} \eta_{\mu\nu}. \quad (3.85)$$

Dies können wir wieder als Matrix-Gleichung auffassen, wobei auf der rechten Seite das Produkt von drei Matrizen steht,

$$\tilde{\eta} = A^T \eta A. \quad (3.86)$$

Bilden wir den Betrag der Determinante dieser Gleichung, so ergibt sich

$$|\tilde{\eta}| = |A|^2, \quad (3.87)$$

denn im kartesischen Koordinatensystem Σ gilt $|\eta| = 1$. Wir können also den Faktor $|A|$ in (3.84) direkt als Funktion des metrischen Tensors ausdrücken,

$$G^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}} = \int dx^{\tilde{1}} \cdots \int dx^{\tilde{d}} \tilde{\omega} F^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}}(\mathbf{x}), \quad \text{wobei} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{|\tilde{\eta}|}. \quad (3.88)$$

Wir nennen $\tilde{\omega}$ die *Volumenform* im Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$. Natürlich gilt diese Gleichung dann auch in jedem kartesischen Koordinatensystem Σ . In diesem Fall ist $\omega = \sqrt{|\eta|} = 1$.

Ganz allgemein können wir folgende Aussage machen. Das Integral eines Tensorfeldes F^{μ}_{ν} , das wir natürlich durch ein Tensorfeld irgendeiner anderen Stufe ersetzen können, ergibt genau dann einen Tensor G^{μ}_{ν} gleicher Stufe, wenn wir in das Integrationsmaß die Volumenform ω einfügen, die durch die Wurzel der Determinante des metrischen Tensors gegeben ist. Die korrekte Definition eines Tensor-Integrals lautet also

$$G^{\mu \cdots \nu}_{\rho \cdots \sigma} = \int_{\mathcal{M}} d^d \mathbf{x} \omega F^{\mu \cdots \nu}_{\rho \cdots \sigma}(\mathbf{x}), \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{|\eta|}. \quad (3.89)$$

Die Volumenform ω ist eine positive Konstante, die von der Wahl des Koordinatensystems abhängt, in dem integriert wird. In einem kartesischen Koordinatensystem gilt $\omega = 1$. Beim Übergang von einem Koordinatensystem Σ zu einem anderen Koordinatensystem $\tilde{\Sigma}$ gilt

$$x^{\mu} = A^{\mu}_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}} + \lambda^{\mu} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega} = |A| \omega. \quad (3.90)$$

Auf einem affinen Raum mit Metrik können wir also wie gewohnt integrieren, solange wir kartesische Koordinatensysteme verwenden. Das Integral eines Tensors ist dann wieder ein Tensor gleicher Stufe. Und für Pseudotensoren gilt das genau so. Wenn wir andere Koordinatensysteme verwenden, um die Integration auszuführen, müssen wir auf die Volumenform ω zurück greifen, die als Funktion der Metrik gegeben ist.

Aufgabe 3.19 Es sei \mathcal{M} ein vierdimensionaler affiner Raum, $\mathbf{y} \in \mathcal{M}$ ein fester Punkt und Σ ein kartesisches Koordinatensystem mit Koordinaten x^{μ} , $\mu = 1, 2, 3, 4$. Durch $\phi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \delta(x^3 - y^3) \delta(x^4 - y^4)$ ist ein skalares Feld ϕ auf \mathcal{M} definiert. Wie lautet die Definition von $\phi(\mathbf{x})$ bezüglich eines anderen, nicht-kartesischen Koordinatensystems $\tilde{\Sigma}$? Ferner sei $F(\mathbf{x})$ ein anderes skalares Feld. Man zeige, dass

$$\int d^d \mathbf{x} \omega \phi(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) \quad (3.91)$$

4 Der Minkowski-Raum

In Kapitel 2 haben wir die physikalischen Eigenschaften einer zweidimensionalen Raumzeit aus dem Relativitätsprinzip abgeleitet. In Kapitel 3 haben wir das mathematische Handwerkszeug bereitgestellt, das wir nun benötigen, um diese Ergebnisse auf die wirkliche, also vierdimensionale Raumzeit zu übertragen. Die vierdimensionale Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie wird üblicherweise als *Minkowski-Raum* bezeichnet.

Die Lorentz-Metrik

Wir beginnen mit einer Definition des Minkowski-Raumes. Es ist ein vierdimensionaler affiner Raum \mathcal{M} mit einem zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} und versehen mit einer invertierbaren Metrik der Signatur $(1, 3)$. Die Motivation dafür entnehmen wir aus Kapitel 2. Dort hatten wir gesehen, dass in einer zweidimensionalen Raumzeit die Signatur der Metrik $(1, 1)$ ist, und dass jedem kartesischen Koordinatensystem ein Inertialsystem entspricht. Raum und Zeit standen dabei senkrecht zueinander, so dass eine Orthonormalbasis jeweils aus einem zeitartigen und einem raumartigen Einheitsvektor bestand.

Wir wollen zunächst annehmen, dass dasselbe für die vierdimensionale Raumzeit gilt. Jedem Inertialsystem entspricht also ein kartesisches Koordinatensystem Σ auf \mathcal{M} , und jede Orthogonalbasis besteht folglich aus einem zeitartigen und drei raumartigen Einheitsvektoren. Das ergibt die Signatur $(1, 3)$ der Metrik. Wir werden gleich sehen, dass wir dies auch direkt aus unserer vereinfachten Elektrodynamik ableiten können. Doch blieben wir zunächst bei der Definition. Es sei also Σ ein kartesisches Koordinatensystem (t, x, y, z) auf \mathcal{M} . Die Koordinaten eines Ereignisses $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ bezüglich Σ nennen wir wieder \mathbf{a}^{μ} , wobei kleine griechische Indizes die Werte t, x, y, z durchlaufen.

Da es hin und wieder nützlich ist, eine *Raum-Zeit-Aufspaltung* vorzunehmen, verwenden wir auch wieder kleine lateinische Indizes, die die Werte x, y, z annehmen. Ein Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ hat also die Zeitkoordinate a^t und die Raumkoordinaten a^m . Wir sagen, zwei Ereignisse \mathbf{a}, \mathbf{b} finden am gleichen Ort statt, wenn $a^m = b^m$, und sie sind gleichzeitig wenn $a^t = b^t$. Natürlich bezieht sich diese Sprechweise stets auf ein bestimmtes Inertialsystem Σ . Wir wissen bereits, dass es keinen Sinn hat, von Gleichzeitigkeit zu sprechen, ohne sich auf ein bestimmtes Inertialsystem zu beziehen.

Da die Metrik die Signatur $(1, 3)$ haben soll, und das gewählte Koordinatensystem kartesisch ist, hat der metrische Tensor $\eta_{\mu\nu}$ die folgende Matrixdarstellung,

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Oder in Komponenten,

$$\eta_{tt} = -1, \quad \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{zz} = 1, \quad (4.2)$$

und alle anderen Komponenten sind Null. Diese Metrik wird auch als *Lorentz-Metrik* bezeichnet. Aus der Bezeichnung Lorentz-Metrik und Minkowski-Raum wird deutlich, dass beide Strukturen nicht auf Einstein zurückgehen. Als mathematisches Objekt, das in der Maxwell'schen Elektrodynamik eine gewisse Rolle spielt, war die Lorentz-Metrik und ihre Invarianzgruppe, die Lorentz-Gruppe, zu der wir gleich kommen werden, schon lange bekannt, als Einstein die spezielle Relativitätstheorie formulierte.

Es war jedoch, wie schon an anderer Stelle bemerkt, allein Einsteins Verdienst, die richtige *physikalische Interpretation* dieser mathematischen Konzepte gefunden zu haben. Andererseits kam die Relativitätstheorie zunächst ohne das Konzept der Raumzeit aus. Sie war also am Anfang keine *geometrische* Theorie, so wie wir sie heute sehen, insbesondere im Zusammenhang mit der allgemeinen Relativitätstheorie. Es war deshalb ein nicht zu unterschätzendes Verdienst Minkowskis, das geometrische Konzept der Raumzeit sozusagen *erfunden* zu haben. Es hat nicht unerheblich dazu beigetragen, die Relativitätstheorie besser zu verstehen.

Doch nun zurück zur Lorentz-Metrik. Wir können sie leicht invertieren und erhalten

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

also die gleiche Matrix- oder Komponentendarstellung für den inversen metrischen Tensor,

$$\eta^{tt} = -1, \quad \eta^{xx} = \eta^{yy} = \eta^{zz} = 1, \quad (4.4)$$

und alle anderen Komponenten sind auch hier wieder Null. Wenn wir die oben definierte Raum-Zeit-Aufspaltung vornehmen, so gilt

$$\eta_{tt} = -1, \quad \eta_{tm} = \eta_{mt} = 0, \quad \eta_{mn} = \delta_{mn}. \quad (4.5)$$

Um zu sehen, wie dieser metrische Tensor auf natürliche Art und Weise in der Elektrodynamik auftritt, brauchen wir uns nur noch einmal die Wellengleichung (2.1) unserer vereinfachten Theorie aus Kapitel 2 anzuschauen. Setzen wir dort $c = 1$, so ergibt sich

$$\partial_t \partial_t \phi = \delta^{mn} \partial_m \partial_n \phi \Leftrightarrow \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0. \quad (4.6)$$

Formal taucht also die Lorentz-Metrik schon in den vereinfachten Maxwell-Gleichungen auf, wenn man sie nur geschickt umschreibt.

Umgekehrt erkennen wir in (4.6) sofort, dass für diese Wellengleichung das Relativitätsprinzip gilt. Es handelt sich nämlich erstens um eine *Tensorgleichung*. Das Feld ϕ ist ein skalares Feld auf \mathcal{M} , also ist $\partial_\mu \partial_\nu \phi$ ein Tensorfeld der Stufe $(0, 2)$, welches wir mit dem inversen metrischen Tensor multiplizieren und dann verjüngen können, so dass sich wieder ein Skalar ergibt. Und natürlich steht auch auf der rechten Seite der Gleichung ein Skalar.

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass die Feldgleichung in *allen* Inertialsystemen durch dieselbe Tensorgleichung gegeben ist. Nun gilt aber zweitens, dass in *allen* Inertialsystemen der metrische Tensor $\eta^{\mu\nu}$ die Darstellung (4.3) hat. Also gilt für das Feld ϕ das Relativitätsprinzip. Die Wellengleichung für ϕ ist in allen Inertialsystemen die gleiche.

Der tiefere Sinn des Tensorkalküls ist also seine enge Verbundenheit mit der Relativitätsprinzip. Da wir wissen, wie sich Tensoren unter Koordinatentransformationen verhalten, können wir einer Tensorgleichung, bei der auf beiden Seiten Tensoren gleicher Stufe und gleichen Gewichtes stehen, sofort ansehen, dass sie eine vom Koordinatensystem unabhängige Identität darstellt.

Jede **Tensorgleichung** erfüllt das Relativitätsprinzip, das heißt sie nimmt in jedem Inertialsystem die gleiche Form an.

Eine physikalische Theorie ist demnach mit dem Relativitätsprinzip verträglich, wenn sie mit Hilfe von Tensorgleichungen formuliert werden kann. Ein einfaches Beispiel dafür ist die durch die Wellengleichung (4.6) definierte vereinfachte Elektrodynamik. Dass das gleiche auf für die wirklichen Maxwell-Gleichungen gilt, werden wir in Kapitel 6 sehen.

Zeitartig, raumartig, lichtartig

Die wichtigsten Eigenschaften der Lorentz-Metrik kennen wir schon aus Kapitel 2. Da die Metrik nicht positiv ist, können wir zwischen *zeitartigen*, *raumartigen*, und *lichtartigen* Vektoren $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ unterscheiden. Die Definitionen sind völlig analog zu denen in Kapitel 2. Die Teilmenge der zeitartigen Vektoren ist

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} < 0\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu < 0\}. \quad (4.7)$$

Offenbar gilt für $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$ stets entweder $u^t > 0$ oder $u^t < 0$, denn für $u^t = 0$ ist $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \delta_{mn} u^m u^n \geq 0$. Wir können also auch hier wieder zwischen positiven und negativen zeitartigen Vektoren unterscheiden,

$$\mathcal{Z}^+ = \{\mathbf{u} \in \mathcal{Z} \mid u^t > 0\}, \quad \mathcal{Z}^- = \{\mathbf{u} \in \mathcal{Z} \mid u^t < 0\}. \quad (4.8)$$

Ein positiver zeitartiger Vektor zeigt in Richtung Zukunft, ein negativer zeitartiger Vektor in Richtung Vergangenheit.

Wir können außerdem eine Norm auf \mathcal{Z} einführen, die jedem zeitartigen Vektor eine Länge, oder wir sollten besser sagen eine Zeitspanne zuordnet,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{Z} \Rightarrow T(\mathbf{u}) = \sqrt{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}. \quad (4.9)$$

Zeitartige Vektoren haben genau die Eigenschaften, wie wir sie für eine zweidimensionale Raumzeit schon in Kapitel 2 gefunden haben. Wenn $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$ zwei Ereignisse sind, die zueinander zeitartig liegen, und zwar so, dass der Abstandsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{Z}^+$ positiv zeitartig ist, dann

gibt $T(\mathbf{u})$ die Zeitspanne zwischen den beiden Ereignissen an, und zwar gemessen in dem Inertialsystem, in dem \mathbf{a} und \mathbf{b} am gleichen Ort stattfinden. Es ist also die Zeit, die eine Uhr anzeigt, welche sich gleichförmig bewegt und auf deren Weltlinie beide Ereignisse liegen.

Dass es so ein Inertialsystem immer gibt, werden wir im nächsten Abschnitt zeigen. Dass $T(\mathbf{u})$ diese Zeitspanne darstellt, können wir sofort aus (4.9) und dem Relativitätsprinzip ableiten. Letzteres besagt, dass die Definition von $T(\mathbf{u})$ in jedem Inertialsystem gleich lautet. Denn unter der Wurzel steht ein Skalar, also ein Tensor nullter Stufe, der sich unter einem Basiswechsel in \mathcal{V} nicht verändert. Wir können also annehmen, Σ sei dasjenige Inertialsystem, in dem \mathbf{a} und \mathbf{b} am gleichen Ort stattfinden. Dann ist $u^t = b^t - a^t > 0$ und $u^m = b^m - a^m = 0$, also

$$T(\mathbf{u}) = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} = \sqrt{u^t u^t} = u^t = b^t - a^t. \quad (4.10)$$

Das ist aber genau der in Σ gemessene zeitliche Abstand der Ereignisse, also die Zeit, die eine Uhr anzeigt, die sich gleichförmig von \mathbf{a} nach \mathbf{b} bewegt. Das genau war ja die Definition einer Uhr. Eine im Inertialsystem Σ ruhende Uhr zeigt genau die Zeitkoordinate t in diesem Inertialsystem an.

Ein raumartiger Vektor ist ebenfalls wie in Kapitel 2 definiert. Die Teilmenge der raumartigen Vektoren ist

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu > 0\}. \quad (4.11)$$

Aufgabe 4.1 Man zeige, dass die raumartigen Vektoren im Gegensatz zu den zeitartigen Vektoren eine zusammenhängende Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ bilden. Es gibt also keine sinnvolle Unterteilung in positive und negative raumartige Vektoren oder dergleichen.

Für raumartige Vektoren gibt es ebenfalls eine Norm. Für zwei Ereignisse $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$, die zueinander raumartig liegen, also $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{R}$, definiert diese Norm genau wie in Kapitel 2 den räumlichen Abstand der Ereignisse, und zwar gemessen in dem Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{u}) = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}. \quad (4.12)$$

Auch hier nehmen wir wieder an, dass es ein solches Inertialsystem gibt, was wir später auch zeigen werden. Wenn Σ dieses Inertialsystem ist, dann gilt $u^t = b^t - a^t = 0$ und $u^m = b^m - a^m$, und folglich

$$L(\mathbf{u}) = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} = \sqrt{\delta_{mn} u^m u^n} = \sqrt{\delta_{mn} (b^m - a^m) (b^n - a^n)}. \quad (4.13)$$

Das ist aber genau der räumliche Abstand. Die zweidimensionalen Definitionen aus Kapitel 2 lassen sich also unmittelbar auf die vierdimensionale Raumzeit verallgemeinern.

Schließlich bleiben noch die lichtartigen Vektoren. Das sind genau die Nullvektoren in \mathcal{V} , also

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0\} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u^\mu \neq 0, u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu = 0\}. \quad (4.14)$$

Auch hier können wir wieder zwischen positiven und negativen lichtartigen Vektoren unterscheiden, denn es ist entweder $u^t > 0$ oder $u^t < 0$. Aus $u^t = 0$ und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ folgt nämlich, wie man leicht nachrechnet, $u^m = 0$ und somit $\mathbf{u} = 0$. Die Null selbst ist aber laut Definition kein lichtartiger Vektor. Wir definieren also

$$\mathcal{L}^+ = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} \mid u^t > 0\}, \quad \mathcal{L}^- = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} \mid u^t < 0\}. \quad (4.15)$$

Auch hier gilt wieder, dass positive lichtartige Vektoren in Richtung der Zukunft zeigen, und negative lichtartige Vektoren in Richtung der Vergangenheit.

Jeder nicht verschwindende Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ist Element genau einer der so definierten Teilmengen. Es gilt also

$$\mathcal{V} = \{0\} \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{R}, \quad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-. \quad (4.16)$$

Keine dieser Teilmengen ist ein Untervektorraum. Die zeitartigen und lichtartigen Vektoren bilden jedoch eine *konvexe* Teilmenge, das heißt es gilt

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{Z}^+ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{Z}^+, \quad (4.17)$$

und

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{L}^+ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{L}^+. \quad (4.18)$$

Aufgabe 4.2 Man beweise (4.17) und (4.18). Gilt auch $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{L}^+ \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{L}^+$?

Eine graphische Darstellung der Geometrie von \mathcal{V} sehen wir in Abbildung 4.1. Die lichtartigen Vektoren bilden einen Kegel, den sogenannten *Lichtkegel*. Wir hatten diese Bezeichnung auch schon in Kapitel 2 verwendet, obwohl der Kegel dort nur aus zwei Linien bestand, nämlich einem nach links und einem nach rechts laufenden Lichtstrahl. Nun kann ein Lichtstrahl natürlich in jede Richtung des Raumes laufen.

Wenn $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ ein Ereignis ist, dann ist der diesem Ereignis zugeordnete Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel die Menge aller Ereignisse, die ein von \mathbf{a} ausgehender bzw. bei \mathbf{a} ankommender Lichtstrahl durchlaufen kann,

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{L}^+\}, \quad \mathcal{L}^-(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{L}^-\}. \quad (4.19)$$

Anschaulich können wir uns den Vorwärtslichtkegel eines Ereignisses $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ als einen bei \mathbf{a} ausgelösten Blitz vorstellen, der sich in alle Richtungen des Raumes ausbreitet. Wenn der Blitz am Ursprung des Koordinatensystems ausgelöst wird, dann besteht die Lichtfront zur Zeit $t > 0$ aus einer Kugel mit Radius t um den räumlichen Koordinatenursprung, und zwar laut Relativitätsprinzip in jedem Inertialsystem. Die Menge aller dieser Kugeln bildet einen Hyperkegel, also eine dreidimensionale Teilmenge der vierdimensionalen Raumzeit. Dies ist der Lichtkegel.

Da dies ein wenig schwierig darzustellen ist, zeigt Abbildung 4.1 nur eine dreidimensionale Raumzeit. Der Lichtkegel ist dann der in (a) dargestellte gewöhnliche Kegel. Er beschreibt einen

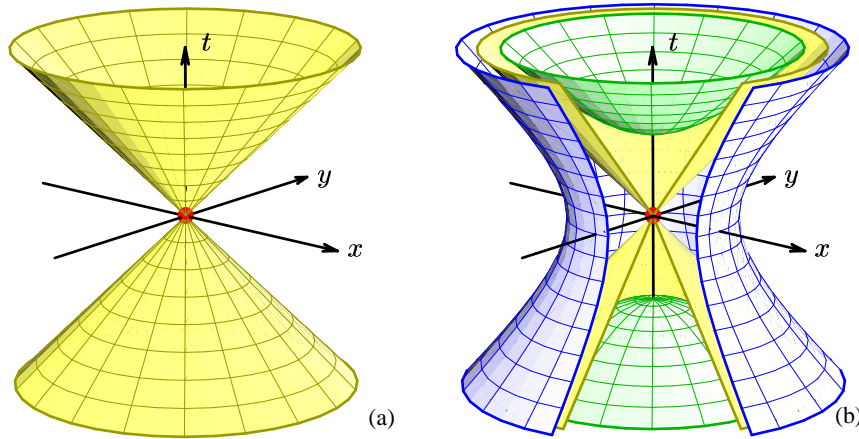


Abbildung 4.1: Der Lichtkegel (a) eines Ereignisses $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ besteht aus allen Lichtstrahlen, die durch \mathbf{a} laufen. Innerhalb des Vorwärtslichtkegels liegt die Zukunft, innerhalb der Rückwärtslichtkegels die Vergangenheit, und außerhalb des Lichtkegels die Gegenwart von \mathbf{a} . Die Ereignisse, die von \mathbf{a} einen konstanten räumlichen bzw. zeitlichen Abstand haben, liegen jeweils auf einem Hyperboloid (b) außerhalb bzw. innerhalb der Lichtkegels.

sich mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnenden Kreis im Raum. Wir können uns also vorstellen, dass in jedem Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ ein solcher Lichtkegel sitzt, der dem Licht sozusagen vorschreibt, in welche Richtungen es laufen kann. Dieser Lichtkegel existiert unabhängig von irgendeinem Koordinatensystem. Es ist eine der Raumzeit als solcher aufgeprägte Struktur, genau wie die Lorentz-Metrik $\eta_{\mu\nu}$.

Wir sagen auch, dass die Lichtkegel die *kausale Struktur* der Raumzeit bestimmen. Auch das hatten wir für die vereinfachte, zweidimensionale Raumzeit bereits in Kapitel 2 gesehen. Die *Zukunft* eines Ereignisses $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ besteht aus allen Ereignissen, zu denen man von \mathbf{a} aus gelangen kann, wenn man sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass der Abstandsvektor zu \mathbf{a} positiv zeitartig ist. Entsprechend ist auch die *Vergangenheit* eines Ereignisses definiert, also

$$\mathcal{Z}^+(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{Z}^+\}, \quad \mathcal{Z}^-(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{Z}^-\}. \quad (4.20)$$

Und schließlich definieren wir auch hier wieder die *Gegenwart* von \mathbf{a} als die Menge aller Ereignisse, die in keiner kausalen Beziehung zu \mathbf{a} stehen. Das soll heißen, dass es weder möglich ist, ein Signal von \mathbf{a} dorthin zu schicken, noch eins von dort zu empfangen. Die Gegenwart besteht

demnach aus allen Ereignissen, die raumartig zu \mathbf{a} liegen,

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{R}\}. \quad (4.21)$$

In Abbildung 4.1(b) sind noch zwei weitere Strukturen des Minkowski-Raumes dargestellt, nämlich die *Einheitskugeln*, auf denen die raumartigen und zeitartigen *Einheitsvektoren* liegen. Ein raumartiger Einheitsvektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ist definiert durch die Eigenschaft

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u^x u^x + u^y u^y + u^z u^z - u^t u^t = 1. \quad (4.22)$$

Diese Gleichung definiert im \mathbb{R}^4 ein *einschaliges Hyperboloid*. Das Wort “Einheitskugel” ist daher ein wenig irreführend. Wenn wir uns allerdings auf die rein räumlichen Vektoren mit $u^t = 0$ beschränken, das heißt auf die horizontale Ebene in Abbildung 4.1, so definiert (4.22) tatsächlich eine Kugel vom Radius Eins.

Wenn wir also im Minkowski-Raum eine Kugel wie üblich definieren als die Menge aller Ereignisse, die von einem festen Ereignis \mathbf{a} , dem Mittelpunkt, einen bestimmten räumlichen Abstand haben, dann ist diese Kugel ein außerhalb des Lichtkegels von \mathbf{a} gelegenes Hyperboloid, das sich dem Lichtkegel asymptotisch nähert. Wobei “sich nähern” allerdings auf eine fiktive euklidische Metrik des in Abbildung 4.1 dargestellten Raumes bezieht. In Wirklichkeit sind natürlich alle Ereignisse auf diesem Hyperboloid gleich weit von \mathbf{a} entfernt, so ist er ja gerade definiert.

Wir müssen deshalb ein wenig aufpassen, wenn wir geometrische Sachverhalte im Minkowski-Raum graphisch darstellen. Im Minkowski-Raum gilt nicht die Euklidische Metrik, sondern die Lorentz-Metrik. Deshalb besteht die Gefahr, dass wir uns falsche Vorstellungen über räumliche und zeitliche Abstände machen, wenn wir mehr oder weniger instinktiv die Vorstellung einer Euklidischen Metrik verwenden. Auch die Ereignisse, die auf dem Hyperboloid in Abbildung 4.1(b) “ganz weit draußen” liegen, sind immer noch gleich weit vom Mittelpunkt entfernt wie alle anderen.

Eigentlich macht es noch nicht einmal Sinn, zu sagen, das Hyperboloid nähere sich dem Lichtkegel asymptotisch an. Denn in der Minkowski-Geometrie ist jeder Punkt auf dem Hyperboloid gleich weit vom Lichtkegel entfernt. Daher müssen wir uns immer, wenn wir eine solche intuitive geometrische Sprechweise verwenden, darüber im Klaren sein, ob wir nun die wirkliche Geometrie meinen, die durch die Lorentz-Metrik definiert wird, oder ob wir uns auf eine anschauliche, aber fiktive Euklidische Geometrie beziehen, die wir sozusagen in die graphische Darstellung hineininterpretieren. Bezüglich einer solchen anschaulichen Geometrie ist die in Abbildung 4.1(b) gezeigte Fläche außerhalb des Lichtkegels ein Hyperboloid, im Sinne der wahren Minkowski-Geometrie ist es jedoch eine Kugel.

Neben dieser räumlichen Einheitskugel können wir natürlich auch eine zeitartige Einheitskugel definieren. Ein zeitartiger Einheitsvektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ hat die Eigenschaft

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 \quad \Rightarrow \quad u^t u^t - u^x u^x - u^y u^y - u^z u^z = 1. \quad (4.23)$$

Diese Gleichung definiert ein *zweischaliges Hyperboloid* innerhalb des Lichtkegels. Auf der oberen Schale liegen alle positiven zeitartigen Einheitsvektoren, auf der unteren Schale alle negativen

zeitartigen Einheitsvektoren. Im Sinne einer fiktiven Euklidischen Geometrie gilt auch hier wieder, dass die beiden Schalen sich asymptotisch dem Lichtkegel nähern. Im Minkowski-Raum gibt es also zwei Arten von zeitartige Einheitskugeln. Sie bestehen aus denjenigen Ereignissen, die zu einem gegebenen Ereignis einen festen zeitlichen Abstand haben, und dabei entweder in der Zukunft oder in der Vergangenheit dieses Ereignisses liegen.

In Wirklichkeit haben also alle Ereignisse auf dem Hyperboloid den gleichen zeitlichen Abstand vom Ereignis im Zentrum. Das hat eine ganz interessante Konsequenz. Offenbar ist es möglich, in einer gegebenen, sagen wir kurzen Zeit zu jedem beliebigen Ort zu reisen. Denn das Hyperboloid dehnt sich ja beliebig weit in der Raum hinein aus. Doch wie ist das möglich, wenn man doch nicht schneller als das Licht sein kann? Nun, man muss sich klar machen, was Ort und Zeit in diesem Fall heißt. Ort bezieht sich auf das Inertialsystem Σ , das wir für die graphische Darstellung verwendet haben. Zeit bezieht sich in diesem Fall jedoch auf die von einer mitbewegten Uhr gemessenen Zeitspanne.

Wenn wir also vom Ereignis im Mittelpunkt zu einem Ereignis "ganz weit draußen" auf der oberen zeitartigen Schale reisen, dann vergeht für uns Reisende nur eine kurze Zeitspanne, nämlich die Zeitspanne, die genau diese Schale definiert. Im Inertialsystem Σ jedoch vergeht eine längere Zeitspanne, und diese ist stets größer als die räumliche Entfernung zu dem Ereignis, zu dem wir reisen, denn dieses befindet sich ja stets innerhalb des Vorwärtslichtkegels. Die scheinbare Überlichtgeschwindigkeit ist nur ein Resultat der Zeitdilatation. Trotzdem ist es offenbar möglich, jedenfalls im Prinzip, jeden Stern unserer Galaxie innerhalb einer vorgegebenen Flugzeit, zum Beispiel ein Jahr, zu erreichen. Wenn wir von dieser Reise nach zwei Jahren zurück kommen, sind hier auf der Erde jedoch mindestens so viele Jahre vergangen, wie der Abstand zum Stern in Lichtjahren beträgt.

Den gleichen Sachverhalt können wir auch durch die Längenkontraktion erklären. Nehmen wir an, das Ereignis im Zentrum von Abbildung 4.1(b) sei die Erde heute, und die t -Achse ihre Weltlinie. Im galaktischen Maßstab können wir ihre Rotation um die Sonne vernachlässigen. Weit draußen auf der x -Achse befinde sich der Stern, zu dem wir reisen wollen. Es soll relativ zur Erde ruhen, das heißt seine Weltlinie ist parallel zur t -Achse. Für uns ist der Stern also sehr weit weg. Allerdings schneidet seine Weltlinie, wenn wir sie in die Zukunft verfolgen, irgendwo das raumartige Hyperboloid außerhalb des Lichtkegels, welches die Einheitskugel im Minkowski-Raum mit Radius ein Lichtjahr definiert.

Das Ereignis an dieser Stelle ist also ein Lichtjahr von der Erde entfernt. Zwar nicht gemessen in unserem ruhenden Inertialsystem, aber in einem anderen, bewegten Inertialsystem. Wenn wir uns also mittels einer Rakete in dieses Inertialsystem begeben, ist der Stern nur noch ein Lichtjahr weit von der Erde entfernt. Und wenn wir noch ein wenig beschleunigen, wird die Entfernung noch kleiner und schließlich klein genug, so dass wir die Strecke in einem Jahr zurücklegen können. Tatsächlich ist also das Verbot, schneller als das Licht zu reisen, weniger restriktiv als man zunächst annehmen würde. Zumindest in einem statischen Weltall kann man jeden Ort in beliebig kurzer Zeit erreichen. Man muss sich aber darüber im Klaren sein, was in diesem Fall Ort und Zeit bedeuten.

Die Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Bei der Interpretation von (4.9) als Zeitspanne, die eine Uhr anzeigt, und von (4.12) als räumlichen Abstand zweier Ereignisse hatten wir angenommen, dass es stets ein Inertialsystem gibt, an dem die betreffenden Ereignisse am selben Ort bzw. zur selben Zeit stattfinden. Das wollen wir nun explizit zeigen. Wir wollen außerdem zeigen, dass tatsächlich jedem Inertialsystem eindeutig ein kartesisches Koordinatensystem auf \mathcal{M} entspricht und umgekehrt.

Um das zu sehen, werden wir uns die Isometriegruppe $ISO(1,3)$, also die Symmetriegruppe des Minkowski-Raumes genauer ansehen. Wir werden zeigen, dass sie aus genau den Transformationen besteht, die wir aus der klassischen Mechanik kennen, nämlich den Verschiebungen von Raum und Zeit, den räumlichen Drehungen und den gleichförmigen Bewegungen. Nur die Art und Weise, wie die gleichförmigen Bewegungen auf die Koordinaten wirken, weicht von der aus Kapitel 1 bekannten Definition der Galilei-Gruppe ab. Das hatten wir auch schon in Kapitel 2 gesehen, als wir die zweidimensionale Raumzeit untersuchten.

Gesucht ist nun also eine geeignete Parameterdarstellung der Gruppe $ISO(1,3)$, und zwar möglichst so, dass die Parameter eine einfache physikalische oder geometrische Interpretation zulassen. Wir gehen dazu wieder von der allgemeinen Darstellung einer linearen Koordinatentransformation auf \mathcal{M} aus,

$$a^\mu = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} a^{\tilde{\mu}} + \lambda^\mu \quad \Leftrightarrow \quad a^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} a^\mu + \lambda^{\tilde{\mu}}, \quad (4.24)$$

von der wir wissen, dass sie folgenden Basiswechsel auf \mathcal{V} induziert,

$$e_{\tilde{\mu}} = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} e_\mu \quad \Leftrightarrow \quad e_\mu = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{\mu} e_{\tilde{\mu}}. \quad (4.25)$$

Damit die transformierte Basis wieder eine Orthonormalbasis ist, muss natürlich wieder die übliche Bedingung gelten, nämlich dass der transformierte metrische Tensor $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ genau wie $\eta_{\mu\nu}$ von der Form (4.1) ist, also

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} \Lambda^\nu_{\tilde{\nu}} \eta_{\mu\nu}. \quad (4.26)$$

Wir hatten diese Gleichung in Kapitel 3 bereits für den allgemeinen Fall einer Metrik mit Signatur (p, q) diskutiert, und haben nun den Fall $p = 1$ und $q = 3$ vorliegen. Um die allgemeinste Matrix zu finden, für die (4.26) gilt, zerlegen wir sie und den Vektor λ^μ zunächst in ihre Zeit- und Raumkomponenten,

$$(\Lambda^\mu_{\tilde{\mu}}) = \begin{pmatrix} \Lambda^t_{\tilde{t}} & \Lambda^m_{\tilde{m}} \\ \Lambda^{m_{\tilde{t}}} & \Lambda^{m_{\tilde{m}}} \end{pmatrix}, \quad (\lambda^\mu) = \begin{pmatrix} \tau \\ \xi^m \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Es ist dabei nützlich, die folgende Sprechweise einzuführen. Wir sagen, dass der 4-Vektor λ^μ in einen 3-Vektor ξ^m und eine Zeitkomponente τ zerfällt. Entsprechend zerfällt die 4×4 -Matrix $\Lambda^\mu_{\tilde{\mu}}$ in eine 3×3 -Matrix $\Lambda^{m_{\tilde{m}}}$, einen 3-Vektor $\Lambda^{m_{\tilde{t}}}$, einen transponierten 3-Vektor $\Lambda^t_{\tilde{m}}$, sowie eine Zeitkomponente $\Lambda^t_{\tilde{t}}$.

Genau diese Zerlegung der Matrix hatten wir auch in (3.49) durchgeführt. Wir hatten dort gesehen, dass die Gruppe in vier nicht zusammenhängende Komponenten zerfällt, und dass diese

durch die Vorzeichen der Determinanten der oben links und unten rechts stehenden Blockmatrizen gekennzeichnet sind, deren Betrag jeweils größer oder gleich Eins ist. Dies sind also die 1×1 -Matrix $\Lambda_{\tilde{t}}^t$ und die 3×3 -Matrix $\Lambda_{\tilde{m}}^m$.

Wir wollen uns hier zunächst auf die Untergruppe $O_{++}(1,3)$ beschränken, also insbesondere annehmen, dass $\Lambda_{\tilde{t}}^t$ positiv ist. Wir machen daher den folgenden, hier nicht weiter motivierten Ansatz,

$$\Lambda_{\tilde{t}}^t = \gamma, \quad \Lambda_{\tilde{m}}^t = -\gamma v_{\tilde{m}}, \quad \Lambda_{\tilde{t}}^m = \gamma v^m, \quad \Lambda_{\tilde{m}}^m = \Delta_{\tilde{m}}^m - \alpha v^m v_{\tilde{m}}, \quad (4.28)$$

wobei $\gamma \geq 1$ und α reelle Zahlen sind, v^m und $v_{\tilde{m}}$ jeweils 3-Vektoren, und $\Delta_{\tilde{m}}^m$ eine 3×3 -Matrix. Dann formen wir (4.26) ein wenig um, um die inverse Matrix zu finden. Es gilt offenbar

$$\Lambda_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\nu}} = \eta^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\tilde{\nu}}. \quad (4.29)$$

Auch diese Gleichung hatten wir in Kapitel 3 benutzt. Sie tauchte, in Matrixform geschrieben, in (3.45) auf. Wir erhalten also, kurz gesagt, die inverse Matrix $\Lambda_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\nu}}$ aus der Matrix $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$, indem wir die Indizes vertauschen und mit der Metrik hoch bzw. runter ziehen. Das ist völlig analog zu einer gewöhnlichen orthogonalen Matrix, nur dass wir jetzt zum Hoch- und Runterziehen der Indizes die Lorentz-Metrik verwenden müssen, und deshalb ändern sich einige Vorzeichen. Angewandt auf die Komponenten (4.28) erhalten wir

$$\Lambda_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} = \gamma, \quad \Lambda_{\tilde{m}}^{\tilde{t}} = -\gamma v_m, \quad \Lambda_{\tilde{t}}^{\tilde{m}} = \gamma v^{\tilde{m}}, \quad \Lambda_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} = \Delta_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} - \alpha v^{\tilde{m}} v_m \quad (4.30)$$

wobei

$$v_m = \delta_{mn} v^n, \quad v^{\tilde{m}} = \delta^{\tilde{m}\tilde{n}} v_{\tilde{n}}, \quad \Delta_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} = \delta^{\tilde{m}\tilde{n}} \delta_{mn} \Delta_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}. \quad (4.31)$$

Mit anderen Worten, v^m und v_m sowie $v^{\tilde{m}}$ und $v_{\tilde{m}}$ sind jeweils die gleichen 3-Vektoren. Nur die Indexpositionen haben sich verändert, was aber trivial ist, da die Metrik auf dem dreidimensionalen Raum jeweils die Euklidische Metrik ist. Dasselbe gilt für die Matrix $\Delta_{\tilde{m}}^{\tilde{m}}$, die sich aus $\Delta_{\tilde{m}}^m$ durch Transponieren ergibt.

Bevor wir nun nachprüfen, ob (4.30) tatsächlich die zu (4.28) inverse Matrix definiert, und die daraus resultierenden Bedingungen an die Parameter ableiten, wollen wir zeigen, dass die 3-Vektoren v^m und $v^{\tilde{m}}$ nichts anderes sind als die Relativgeschwindigkeiten der beiden Inertialsysteme, jeweils dargestellt in Σ bzw. $\tilde{\Sigma}$. Es sei zum Beispiel durch $a^{\tilde{m}} = 0$ die Weltlinie eines in $\tilde{\Sigma}$ ruhenden Objektes definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^t &= \Lambda_{\tilde{t}}^t a^{\tilde{t}} + \lambda^t = \gamma a^{\tilde{t}} + \tau, \\ a^m &= \Lambda_{\tilde{t}}^m a^{\tilde{t}} + \lambda^m = \gamma v^m a^{\tilde{t}} + \xi^m. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein, so ergibt sich

$$a^m = v^m (a^t - \tau) + \xi^m, \quad (4.33)$$

also ist v^m die in Σ gemessene Geschwindigkeit eines in $\tilde{\Sigma}$ ruhenden Objektes. Umgekehrt gilt das natürlich genauso, denn die inverse Matrix (4.30) ergibt sich aus (4.28) offenbar dadurch, dass wir v^m durch $v^{\tilde{m}}$ ersetzen. Also ist $v^{\tilde{m}}$ die in $\tilde{\Sigma}$ gemessene Geschwindigkeit eines in Σ ruhenden Objektes.

Doch nun wollen wir feststellen, welche Beziehung zwischen diesen beiden Geschwindigkeiten und den restlichen Parametern besteht. Dazu müssen wir die Matrixgleichung (4.26) lösen oder, was das gleiche ist, feststellen, ob die Matrizen $\Lambda^{\mu}_{\tilde{\mu}}$ und $\Lambda_{\tilde{\mu}}^{\mu}$ tatsächlich zueinander invers sind, also

$$\Lambda^{\mu}_{\tilde{\rho}} \Lambda_{\tilde{\nu}}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (4.34)$$

Beginnen wir mit der Zeit-Zeit-Komponente dieser Gleichung,

$$\Lambda^t_{\tilde{\rho}} \Lambda_{\tilde{t}}^t = \Lambda_{\tilde{t}}^t \Lambda^t_t + \Lambda^t_{\tilde{p}} \Lambda_{\tilde{t}}^p = \gamma^2 - \gamma^2 v_{\tilde{p}} v^{\tilde{p}} = 1. \quad (4.35)$$

Schreiben wir kurz $v^2 = v_{\tilde{p}} v^{\tilde{p}}$, so folgt daraus

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (4.36)$$

Als nächstes betrachten wir die Raum-Zeit-Komponente von (4.34). Sie lautet

$$\Lambda^t_{\tilde{\rho}} \Lambda_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} = \Lambda_{\tilde{t}}^t \Lambda^{\tilde{t}}_n + \Lambda^t_{\tilde{p}} \Lambda_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} = -\gamma^2 v_n - \gamma v_{\tilde{p}} (\Delta_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} - \alpha v^{\tilde{p}} v_n) = 0, \quad (4.37)$$

also

$$-\gamma v_n + \alpha v^2 v_n - v_{\tilde{p}} \Delta_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} v_{\tilde{p}} = (\alpha v^2 - \gamma) v_n. \quad (4.38)$$

Nun können wir über den reellen Parameter α noch immer frei verfügen, denn jede Veränderung von α in (4.28) kann durch eine Veränderung der ebenfalls noch unbekanntenen Matrix $\Delta_{\tilde{m}}^m$ kompensiert werden. Wir wählen deshalb α so, dass

$$\alpha v^2 - \gamma = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\gamma - 1}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} v_{\tilde{p}} = -v_n. \quad (4.39)$$

Um zu sehen, dass α auch für $v^2 = 0$ wohldefiniert ist, können wir die Definition auch umschreiben,

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{1 - \gamma^{-2}} = \gamma \frac{1 - \gamma^{-1}}{(1 - \gamma^{-1})(1 + \gamma^{-1})} = \gamma \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}, \quad (4.40)$$

und das ist offenbar endlich für $\gamma \geq 1$. Was noch bleibt ist die Raum-Raum-Komponente der Gleichung (4.34). Sie lautet

$$\begin{aligned} \Lambda^m_{\tilde{\rho}} \Lambda_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} &= \Lambda_{\tilde{t}}^m \Lambda^{\tilde{t}}_n + \Lambda^m_{\tilde{p}} \Lambda_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} \\ &= -\gamma^2 v^m v_n + (\Delta_{\tilde{p}}^m - \alpha v^m v_{\tilde{p}}) (\Delta_{\tilde{n}}^{\tilde{p}} - \alpha v^{\tilde{p}} v_n) = \delta^m_n. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Durch Ausmultiplizieren und Einsetzen von (4.39) vereinfacht sich dies zu

$$\Delta^m_{\tilde{p}} \Delta^{\tilde{p}}_n = \delta^m_n. \quad (4.42)$$

Also ist $\Delta^m_{\tilde{m}}$ eine gewöhnliche, dreidimensionale orthogonale Matrix und $\Delta^{\tilde{m}}_m$ die dazu inverse und gleichzeitig transponierte Matrix.

Fassen wir also, nach dieser etwas längeren Rechnung, das Ergebnis wie folgt zusammen. Eine allgemeine Koordinatentransformation von einem Inertialsystem Σ zu einem anderen Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ ist gegeben durch

$$a^\mu = \Lambda^\mu_{\tilde{\mu}} a^{\tilde{\mu}} + \lambda^\mu \quad \Leftrightarrow \quad a^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_\mu a^\mu + \lambda^{\tilde{\mu}}. \quad (4.43)$$

Das heißt, sie ist wie immer zusammengesetzt aus einer verallgemeinerten Drehung, gegeben durch die 4×4 -Matrix $\Lambda^\mu_{\tilde{\mu}}$ und einer Verschiebung, gegeben durch den 4-Vektor λ^μ . Damit es sich um eine Isometrie handelt, also die Lorentz-Metrik unter der Transformation invariant ist, muss die verallgemeinerte Drehmatrix komponentenweise wie folgt gegeben sein,

$$\begin{aligned} \Lambda^t_{\tilde{t}} &= \gamma(v), & \Lambda^t_{\tilde{m}} &= \gamma(v) v_p \Delta^p_{\tilde{m}}, \\ \Lambda^m_{\tilde{t}} &= \gamma(v) v^m, & \Lambda^m_{\tilde{m}} &= \Delta^m_{\tilde{m}} + \frac{\gamma(v) - 1}{v^2} v^m v_p \Delta^p_{\tilde{m}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Der Vektor λ^μ ist beliebig, und lässt sich natürlich ebenfalls in Raum- und Zeitkomponenten zerlegen,

$$\lambda^t = \tau, \quad \lambda^m = \xi^m. \quad (4.45)$$

Als Parameter treten dabei eine Zeitverschiebung τ , eine räumliche Verschiebung ξ^m , eine Geschwindigkeit v^m , sowie eine orthogonale räumliche Drehmatrix $\Delta^m_{\tilde{m}}$ auf, das heißt es gilt

$$\delta_{\tilde{m}\tilde{n}} = \Delta^m_{\tilde{m}} \Delta^n_{\tilde{n}} \delta_{mn}. \quad (4.46)$$

Wir nennen den Übergang zwischen zwei Inertialsystemen eine *Poincaré-Transformation*. Die Parameter einer allgemeinen Poincaré-Transformation sind also die gleichen wie die einer Galilei-Transformation, mit dem einzigen Unterschied, dass der Betrag der Relativgeschwindigkeit kleiner sein muss als die Lichtgeschwindigkeit. Allerdings wirkt die Transformation anders auf die Koordinaten, denn (4.44) ist nicht dasselbe wie (1.34).

Aufgabe 4.3 Man setze in (4.44) die Lichtgeschwindigkeit c wieder ein, und zwar so, dass Zeit- und Raumkoordinaten wieder ihre üblichen Einheiten annehmen, und zeige dann, dass sich im Grenzwert $c \rightarrow \infty$ (1.34) ergibt.

Natürlich bilden die Poincaré-Transformationen eine Gruppe, und gemäß der Definition aus Kapitel 3 ist dies die Isometriegruppe $ISO(1,3)$. Wir nennen sie die *Poincaré-Gruppe*. Die zugeordnete Invarianzgruppe der Lorentz-Metrik $O(1,3)$, also die Gruppe der Basistransformationen (4.25), unter denen die Lorentz-Metrik invariant ist, heißt entsprechend *Lorentz-Gruppe*.

Nun haben wir in der obigen Herleitung nicht so genau auf die möglichen Vorzeichen geachtet, das heißt wir haben zum Beispiel nur eine Lösung der Gleichung (4.35) in Betracht gezogen, nämlich die mit $\gamma \geq 1$. Natürlich gibt es auch noch eine Lösung mit $\gamma \leq -1$. Außerdem gibt es zwei Klassen von räumlichen orthogonalen Matrizen (4.46), solche mit Determinante 1 und -1 . Also zerfällt, wie wir ja bereits aus der allgemeinen Untersuchung in Kapitel 3 wissen, sowohl die Lorentz- als auch die Poincaré-Gruppe in vier Komponenten.

Es ist das Vorzeichen der Zeitkomponente $\Lambda^t_{\tilde{t}}$ sowie die Determinante der räumlichen Drehmatrix $\Delta^m_{\tilde{m}}$, die über Zugehörigkeit der Matrix $\Lambda^\mu_{\tilde{\mu}}$ zu einer der vier Komponenten $O_{\pm\pm}(1,3)$ entscheidet. Es ist nicht schwer, die vier Komponenten der Lorentz- bzw. Poincaré-Gruppe geometrisch zu unterscheiden. Offenbar kehrt ein negatives Vorzeichen von $\Lambda^t_{\tilde{t}}$ die Zeitrichtung um, und eine negative Determinante von $\Delta^m_{\tilde{m}}$ bewirkt eine Raumspiegelung. Es ist deshalb üblich, die Komponenten wie folgt zu benennen,

$$\begin{array}{llll} \Lambda^t_{\tilde{t}} \geq +1 & \Lambda^t_{\tilde{t}} \leq -1 & & \\ \|\Delta^m_{\tilde{m}}\| = +1 & O_{++}(1,3) & O_{-+}(1,3) & \text{eigentliche} \\ \|\Delta^m_{\tilde{m}}\| = -1 & O_{+-}(1,3) & O_{--}(1,3) & \text{uneigentliche} \\ & \text{orthochrone} & \text{antiorthochrone} & \text{Lorentz-Transformation} \end{array} \quad (4.47)$$

Eine eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation ist also eine, unter der sowohl die Zeitrichtung als auch die räumliche Orientierung erhalten bleibt. Eine orthochrone Lorentz-Transformation ist eine, unter der zwar die Zeitrichtung, aber nicht notwendigerweise die räumliche Orientierung erhalten ist. Insgesamt finden wir, wie erwartet, vier Komponenten.

Die **Lorentz-Gruppe**, und mit ihr die **Poincaré-Gruppe**, zerfällt in vier nicht zusammenhängende Komponenten, die jeweils eine **Raum-** bzw. **Zeitspiegelung** beinhalten oder nicht.

Es ist klar, dass nur unter orthochronen Transformationen die Definitionen von *positiven* und *negativen* zeitartigen und lichtartigen Vektoren invariant ist. Eine antiorthochrone Transformation führt in diesem Fall zu einer Vertauschung von positiv und negativ. Wir wollen uns deshalb im folgenden auf die eigentlichen orthochronen Transformationen beschränken, und sagen der Einfachheit halber die Lorentz-Gruppe sei $O_{++}(1,3)$, und die Poincaré-Gruppe sei $ISO_{++}(1,3)$.

Orbits und Invarianten

Bis jetzt haben wir die Elemente der jeweiligen Invarianz- und Isometriegruppen stets als *passive* Transformationen betrachtet, das heißt als *Koordinatentransformationen* auf dem affinen Raum \mathcal{M} , bzw. als *Basiswechsel* auf dem zugeordneten Vektorraum \mathcal{V} . Wir können sie aber auch als *aktive* Transformationen ansehen, also als *lineare Abbildungen* $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, bzw. $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Wir müssen dazu nur die Notation ein wenig ändern. Wir halten also jetzt das Koordinatensystem Σ , bzw. die Basis e_μ fest, und transformieren statt dessen die Ereignisse bzw. die Vektoren selbst.

Eine lineare Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ und die dadurch indizierte lineare Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ können wir schreiben als

$$a^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu a^\nu + \lambda^\mu, \quad u^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu u^\nu. \quad (4.48)$$

Der einzige Unterschied ist, dass wir jetzt nur noch eine Sorte von Indizes zur Verfügung haben, und dass wir deshalb von nun an für die Inverse Transformation auch tatsächlich Λ^{-1} schreiben müssen, denn wir können die Matrix nicht mehr von ihrer Inversen an Hand der Indexpositionen unterscheiden.

Es genügt im folgenden, dass wir uns auf die linearen Abbildungen $\Lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ beschränken, gegeben durch die 4×4 -Matrizen Λ^μ_ν . Wir benutzen dann die Matrixschreibweise $\mathbf{u} \mapsto \Lambda \mathbf{u}$. Die Invarianzgruppe $O_{++}(1,3)$ der Lorentz-Metrik ist dann wie folgt definiert. Es ist die Gruppe derjenigen linearen Abbildungen $\Lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, unter denen die Metrik, also das Skalarprodukt aller Vektoren, invariant ist,

$$\eta(\Lambda \mathbf{u}, \Lambda \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad (4.49)$$

und zusätzlich sowohl die Zeitrichtung als auch die räumliche Orientierung erhalten ist. Natürlich führt das wieder auf dieselbe Bedingung für die Matrix Λ , so dass die Abbildungen genau die eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen sind. Wenn wir die Gleichung nämlich in Indexnotation aufschreiben, erhalten wir

$$\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (4.50)$$

Die Matrizen, die (4.49) erfüllen, sind also genau von der Form (4.44), nur dass wir den zweiten Index jetzt nicht mehr mit einer Tilde versehen,

$$\begin{aligned} \Lambda^t_t &= \gamma(v), & \Lambda^t_n &= \gamma(v) v_p \Delta^p_n, \\ \Lambda^m_t &= \gamma(v) v^m, & \Lambda^m_n &= \Delta^m_n + \frac{\gamma(v) - 1}{v^2} v^m v_p \Delta^p_n. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Als Parameter treten dabei noch immer ein 3-Vektor v^m sowie eine orthogonale 3×3 -Matrix Δ^m_n mit positiver Determinante auf, also

$$\delta_{pq} = \Delta^m_p \Delta^m_q \delta_{mn}. \quad (4.52)$$

Aufgabe 4.4 Wir wollen zeigen, dass die Poincaré-Gruppe tatsächlich eine andere Gruppe ist als die Galilei-Gruppe, und nicht nur eine andere Darstellung derselben Gruppe. Dazu sei $\Lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ eine Lorentz-Transformation, die einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung entspricht, und $\Lambda' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ entspreche einer gleichförmigen Bewegung mit der gleichen Geschwindigkeit v in y -Richtung. Man zeige, dass $\Lambda \Lambda' \neq \Lambda' \Lambda$, was aber für Galilei-Transformationen der Fall ist. Wodurch unterscheidet sich die Transformation $\Lambda \Lambda'$ von $\Lambda' \Lambda$ im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten v ?

Am Anfang hatten wir festgestellt, dass eine Beziehung zwischen physikalischen Größen dann auf jeden Fall dem Relativitätsprinzip genügt, wenn die sich als Tensorgleichung schreiben lässt. Physikalische Größen müssen also Tensoren sein. Wenn es sich sogar um eine *Messgröße* handelt, also eine durch eine bestimmte Messvorschrift definierte Größe, dann muss diese sogar durch einen Skalar dargestellt sein. Denn alle Beobachter können schließlich das Messgerät ablesen, und müssen folglich zum gleichen Ergebnis kommen.

Wir wollen nun einige solcher Messgrößen betrachten und zeigen dass sie sich tatsächlich auf Tensoren zurückführen lassen. Sehr viele Messgrößen kennen wir ja noch nicht, im wesentlichen nur Längen und Zeiten. So können wir zum Beispiel die Zeitspanne $T(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ zwischen zwei zeitartig zueinander liegenden Ereignissen messen, oder den räumlichen Abstand $L(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ von zwei zueinander raumartig liegenden Ereignissen. Beide Größen werden tatsächlich auf denselben Skalar zurückgeführt, den wir aus dem Abstandsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ bilden können, nämlich das Produkt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Dies ist, nach den im letzten Kapitel abgeleiteten Regeln, offenbar der einzige Tensor nullter Stufe, den wir aus dem Vektor u^μ und dem metrischen Tensor $\eta_{\mu\nu}$ bilden können. Wir wollen nun zeigen, dass dies auch tatsächlich die *einzig* reelle Funktion eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ist, die unabhängig vom Bezugssystem definiert werden kann, und dass zusätzlich nur das Vorzeichen von u^t eine Invariante ist, falls wir uns auf orthochrone Transformationen beschränken und \mathbf{u} entweder zeitartig oder lichtartig ist.

Wir werden dies wie folgt beweisen. Wir betrachten zwei nicht verschwindende Vektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{V}$ mit $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$, und für zeitartige und lichtartige Vektoren nehmen wir zusätzlich an, dass $\text{sgn}(q^t) = \text{sgn}(p^t)$. Dann zeigen wir, dass es stets eine eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation $\Lambda \in O_{++}(1,3)$ gibt, so dass $\mathbf{q} = \Lambda \mathbf{p}$. Mit anderen Worten, zwei beliebige Vektoren gleicher Länge, und im Falle von zeit- und lichtartigen Vektoren gleichen Vorzeichens, werden stets durch eine geeignet gewählte Lorentz-Transformation aufeinander abgebildet.

Daraus folgt zunächst, dass die Länge tatsächlich die einzige invariante Funktion des Vektors ist. Zweitens folgt daraus, dass alle Vektoren gleicher Länge in gewissem Sinne *gleichberechtigt* sind, dass es also nichts gibt, was einen Vektor von einem anderen auszeichnen könnte. Und daraus wiederum folgt das, was wir weiter oben angenommen aber noch nicht bewiesen haben. Nämlich, dass es zu jedem positiven zeitartigen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}^+$ ein Inertialsystem Σ gibt, so dass $\mathbf{u} = u^t \mathbf{e}_t$, und ebenso dass es zu jedem raumartigen Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ ein Inertialsystem Σ gibt, so dass $\mathbf{u} = u^m \mathbf{e}_m$.

Wäre dem nämlich nicht so, dann gäbe es ein weiteres Kriterium, mit dessen Hilfe wir zeitartige und raumartige Vektoren unterteilen können, nämlich in solche, die in keinem Inertialsystem proportional bzw. orthogonal zum Basisvektor \mathbf{e}_t sind, und solche, für die es solche Inertialsystem gibt. Die dahinter stehende physikalische Aussage hatten die wir benutzt hatten, um die Größen $T(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ und $L(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ zu interpretieren. Zu jedem Paar von Ereignissen, die zeitartig zueinander liegen, gibt es ein Inertialsystem, in dem sie am selben Ort stattfinden. Und zu jedem Paar von Ereignissen, die raumartig zueinander liegen, gibt es ein Inertialsystem, in dem sie gleichzeitig stattfinden.

Führen wir also nun den noch fehlenden Beweis. Es seien zunächst $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{Z}^+$ zwei positive zeitartige Vektoren mit $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} < 0$ und $p^t, q^t > 0$. Zu zeigen ist, dass es eine Transformation $\Lambda \in O_{++}(1,3)$ gibt, so dass $\mathbf{q} = \Lambda \mathbf{p}$. Zunächst betrachten wir den Spezialfall dass $\mathbf{p} = p^t \mathbf{e}_t$, während $\mathbf{q} = q^t \mathbf{e}_t + q^m \mathbf{e}_m$ ein beliebiger Vektor der gleichen Länge ist. Dann gilt laut Voraussetzung

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \Leftrightarrow p^t p^t = q^t q^t - q^m q_m, \quad (4.53)$$

sowie $p^t, q^t > 0$. Gesucht ist nun eine Transformationsmatrix $\Lambda \in O_{++}(1,3)$, so dass

$$q^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \Leftrightarrow q^t = \Lambda^t_t p^t = \gamma(v) p^t, \quad q^m = \Lambda^m_t p^t = \gamma(v) v^m p^t. \quad (4.54)$$

Offenbar müssen wir den Parameter v^m wie folgt wählen,

$$v^m = \frac{q^m}{q^t}, \quad (4.55)$$

sowie eine beliebige räumliche Drehmatrix Δ^m_n . Zu prüfen ist dann noch, dass der Gamma-Faktor den richtigen Wert annimmt, so dass in (4.54) auch wirklich beide Gleichungen gelten. Aus (4.55) ergibt sich

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{q^m q_m}{q^t q^t}\right)^{-1/2} = \left(\frac{q^t q^t - q^m q_m}{q^t q^t}\right)^{-1/2} = \left(\frac{p^t p^t}{q^t q^t}\right)^{-1/2} = \frac{q^t}{p^t}, \quad (4.56)$$

und daraus folgt (4.54). Wir haben also gezeigt, dass ein Vektor \mathbf{p} , der proportional zum Basisvektor \mathbf{e}_t ist, auf jeden anderen positiven zeitartigen Vektor mit der gleichen Länge abgebildet werden kann. Dann kann aber auch jeder solche Vektor auf jeden anderen abgebildet werden, denn wir können ihn zunächst in einem Zwischenschritt auf einen Vektor abbilden, der proportional zu \mathbf{e}_t ist.

Geometrisch können wir uns diesen Sachverhalt in Abbildung 4.1(b) veranschaulichen. Alle positiven zeitartigen Vektoren gleicher Länge liegen auf der oberen Schale des zweischaligen Hyperboloids innerhalb des Lichtkegels. Die orthochronen Lorentztransformationen bilden diese Schale auf sich selbst ab, denn die Länge eines Vektor ist ja laut Definition invariant. Zusätzlich wissen wir nun auch, dass jeder Vektor durch eine geeignete Lorentz-Transformation auf jeden anderen abgebildet werden kann. Wir sagen deshalb, dass die in Abbildung 4.1(b) abgebildete obere Schale der *Orbit* eines positiven zeitartigen Vektors unter der Lorentz-Gruppe ist.

Der **Orbit** eines **zeitartigen** Vektors unter der Lorentz-Gruppe ist diejenige Halbschale eines zeitartigen Hyperboloids, die den Vektor selbst enthält.

Anders ausgedrückt heißt das, dass alle positiven zeitartigen Vektoren gleicher Länge *gleichwertig* sind, in dem Sinne, dass es keine weitere Möglichkeit gibt, einen vom anderen zu unterscheiden, ohne das Relativitätsprinzip zu verletzen. Die einzigen Eigenschaften eines zeitartigen Vektors, über die sich alle Beobachter in allen Inertialsystemen einig sind, sind dessen Länge,

oder besser die durch diesen Vektor definierte Zeitspanne, sowie ob es sich um einen positiven oder negativen zeitartigen Vektor handelt, also ob er in die Zukunft oder in die Vergangenheit zeigt.

Daraus folgt, wie schon gesagt, dass jedem positiven zeitartigen Vektor ein Inertialsystem entspricht, das bis auf eine räumliche Drehung eindeutig ist, und in dem der vorgegebene Vektor die Zeitrichtung definiert. Dass dasselbe auch für raumartige Vektoren gilt, lässt sich ganz ähnlich zeigen.

Aufgabe 4.5 Es seien $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{R}$ zwei raumartige Vektoren gleicher Länge. Man zeige, dass es eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in O_{++}(1,3)$ gibt, so dass $\mathbf{q} = \Lambda \mathbf{p}$.

Da es keine Unterscheidung zwischen positiven und negativen raumartigen Vektoren gibt, folgt daraus, dass der Orbit eines raumartigen Vektors aus dem gesamten in Abbildung 4.1(b) dargestellten Hyperboloid außerhalb des Lichtkegels besteht. Damit sind auch alle raumartigen Vektoren gleicher Länge gleichwertig in dem Sinne, dass es keine objektiven, das heißt vom Bezugssystem unabhängigen, Unterscheidungsmerkmale zwischen ihnen gibt.

Der **Orbit** eines **raumartigen** Vektors unter der Lorentz-Gruppe ist dasjenige raumartige Hyperboloid, das den Vektor selbst enthält.

Insbesondere folgt daraus, dass es zu jedem raumartigen Vektor ein Inertialsystem gibt, in dem dieser Vektor räumlich ist, also zwei gleichzeitige Ereignisse miteinander verbindet. Wäre dem nicht so, gäbe es nämlich doch Unterschiede zwischen verschiedenen Klassen von raumartigen Vektoren.

So weit ist das ganz anschaulich aus Abbildung 4.1(b) zu entnehmen. Die jeweiligen Hyperboloide werden durch Lorentz-Transformationen auf sich selbst abgebildet, genau wie Kugeln im Euklidischen Raum durch Drehungen auf sich abgebildet werden. Auch dort ist es so, dass durch geeignete Drehungen jeder Punkt auf einer Kugel auf jeden anderen Punkt derselben Kugel abgebildet werden kann. Es gibt im Euklidischen Raum keine ausgezeichneten Richtungen.

Weniger anschaulich, und daher zunächst etwas verblüffend, ist aber die Tatsache, dass der Lichtkegel dieselbe Eigenschaft hat. Die in Abbildung 4.1(a) eingezeichneten Gitterlinien sind daher etwas irreführend. Es gibt keine Unterscheidung zwischen verschiedenen lichtartigen Vektoren, außer der zwischen positiven und negativen, die unabhängig vom Bezugssystem sinnvoll ist. Dazu betrachten wir zwei Vektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{L}^+$, die beide auf dem Vorwärtslichtkegel liegen. Demnach gilt

$$p^t = \sqrt{p^m p_m}, \quad q^t = \sqrt{q^m q_m}. \quad (4.57)$$

Betrachten wir zunächst die räumlichen Anteile p^m und q^m . Es ist stets möglich, eine räumliche Drehung zu finden, also eine Lorentz-Transformation mit $v^m = 0$, so dass beide in die gleiche räumliche Richtung zeigen. Wir können also annehmen, dass

$$p^m = p^t w^m, \quad q^m = q^t w^m, \quad \text{wobei} \quad w^m w_m = 1, \quad (4.58)$$

das heißt w^m ist ein räumlicher Einheitsvektor. Gesucht ist nun eine Lorentz-Transformation, die diese Vektoren aufeinander abbildet. Da sie bereits in die gleiche Richtung zeigen, bietet es sich an, als Ansatz $\Delta^m_n = \delta^m_n$ zu wählen, also eine Transformation zu suchen, die keine räumliche Drehung enthält, und eine Relativgeschwindigkeit $v^m = \beta w^m$ zu wählen, also in Richtung der beiden Vektoren. Dann ergibt sich aus (4.51)

$$\begin{aligned} \Lambda^t_t &= \gamma(\beta), & \Lambda^t_n &= \gamma(\beta) \beta w_n, \\ \Lambda^m_t &= \gamma(\beta) \beta w^m, & \Lambda^m_n &= \delta^m_n + (\gamma(\beta) - 1) w^m w_n, \end{aligned} \quad (4.59)$$

wobei

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.60)$$

Den einzigen noch freien Parameter β müssen wir jetzt so wählen, dass $q^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$, also in Komponenten

$$q^t = \Lambda^t_t p^t + \Lambda^t_n p^n, \quad q^m = \Lambda^m_t p^t + \Lambda^m_n p^n. \quad (4.61)$$

Durch Einsetzen von (4.58) und (4.59) in die erste Gleichung ergibt sich

$$q^t = \gamma(\beta) p^t + \gamma(\beta) \beta p^t = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} p^t \Rightarrow \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{q^t}{p^t}. \quad (4.62)$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach β auflösen. Wir erhalten

$$\beta = \frac{(q^t)^2 - (p^t)^2}{(q^t)^2 + (p^t)^2}. \quad (4.63)$$

Jetzt müssen wir nur noch überprüfen, ob auch die zweite Gleichung in (4.61) erfüllt ist. Das ist tatsächlich der Fall, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnet.

Wir schließen also aus der Rechnung, dass jeder positive lichtartige Vektor, also jeder Punkt auf dem Vorwärtslichtkegel in Abbildung 4.1(a), durch eine geeignete Lorentz-Transformation auf jeden anderen Punkt abgebildet werden kann. Der Orbit eines jeden positiven lichtartigen Vektors ist immer der gesamte Vorwärtslichtkegel, und entsprechend ist der Orbit eines negativen lichtartigen Vektors stets der gesamte Rückwärtslichtkegel.

Der **Orbit** eines **lichtartigen** Vektors unter der Lorentz-Gruppe ist derjenige Lichtkegel, der den Vektor selbst enthält.

Insbesondere heißt das, dass es nicht möglich ist, auf dem Lichtkegel Abstände welcher Art auch immer zu messen, oder Längen von lichtartigen Vektoren zu definieren.

Wir haben also gezeigt, dass die invariante Norm $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ tatsächlich die einzige reelle Funktion eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ist, über deren Wert sich alle Beobachter in allen Inertialsystemen einig sind. Die einzige weiteren invariante Eigenschaften ist das Vorzeichen von u^t , falls \mathbf{u} zeitartig oder

lichtartig ist. Ähnliche Schlüsse werden wir später für andere Größen ziehen, zum Beispiel wenn wir Bewegungsgleichungen für Teilchen aufstellen oder deren Eigenschaften beschreiben wollen. Es kommen stets nur solche Größen als invariante Eigenschaften in Frage, die durch Skalare definiert sind, und Beziehung zwischen physikalischen Größen müssen Tensorgleichungen sein, wenn die physikalischen Größen Tensoren sind.

Aufgabe 4.6 Manche Elementarteilchen haben die Eigenschaft, nach einer gewissen mittleren Zeit (Halbwertszeit) zu zerfallen, ohne dass dafür ein äußerer Anlass vorliegen muss. Warum können Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, also zum Beispiel Photonen, keine solche Halbwertszeit haben?

Die Geometrie des Minkowski-Raumes

Um den Minkowski-Raum noch ein wenig besser kennen zu lernen, wollen wir dessen Geometrie noch etwas genauer studieren. Interessant sind in diesem Zusammenhang diejenigen Eigenschaften, die erst in höheren Dimensionen auftreten, und die deshalb in unserem zweidimensionalen Modell in Kapitel 2 noch nicht in Erscheinung traten.

Die wichtigste Eigenschaft des Minkowski-Raumes sind die Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$, die wir uns an jedem Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ "angeheftet" denken können. Sie haben hier wirklich die Form von Kegeln, während sie in einer zweidimensionalen Raumzeit nur aus je zwei Strahlen bestanden. Die Lichtkegel bestimmen die *kausale Struktur* der Raumzeit, das heißt sie sagen uns, zwischen welchen Ereignissen Informationen ausgetauscht werden können und zwischen welchen nicht. Grundsätzlich gilt, dass wir, wenn wir uns an einem Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ befinden, nur von den Ereignissen Kenntnis haben können, die entweder in der Vergangenheit $\mathcal{Z}^-(\mathbf{a})$ oder auf dem Rückwärtslichtkegel $\mathcal{L}^-(\mathbf{a})$ liegen.

Wie wir gerade gesehen haben, sind diese Objekte unabhängig vom Bezugssystem definiert. Die gerade gemachte Aussage über die Kenntnisnahme von anderen Ereignissen ist also unabhängig vom Bewegungszustand, in dem wir uns gerade befinden, wenn wir das Ereignis \mathbf{a} erleben. Die kausale Struktur ist eine Eigenschaft, die wir dem affinen Raum \mathcal{M} selbst zuschreiben können. Die Lichtkegel sind ihm sozusagen fest eingepreßt als unveränderliche Struktur. Das ist zunächst eine etwas gewöhnungsbedürftige Vorstellung, denn eine solche eingepreßte Struktur gibt es im Euklidischen Raum nicht. Dort sind alle Richtungen gleichberechtigt.

Es ist eine gängige Fehlinterpretation der Relativitätstheorie, dass es eine solche *absolute* Struktur nicht gibt, und Raum und Zeit völlig gleichwertig sind. Das ist aber nicht der Fall. Die Unterscheidung zwischen zueinander *raumartig* und *zeitartig* liegenden Ereignissen ist in der speziellen Relativitätstheorie genauso *absolut* wie in der Newtonschen Mechanik die Unterscheidung zwischen *gleichzeitigen* und *nicht gleichzeitigen* Ereignissen. Um das deutlich zu machen, hatten wir in Kapitel 1 genau diese Begriffe auch für die Newtonsche Raumzeit verwendet.

Es ist auch nicht so, wie oft argumentiert wird, dass die Zeit einfach nur eine vierte Dimension ist, die den drei räumlichen Dimensionen völlig gleichwertig gegenüber steht. Dem widerspricht schon allein die offensichtliche Tatsache, dass viele von uns mit einer Uhr am Handgelenk herum

laufen, und nicht mit einem Maßband oder einem Kilometerzähler. Mathematisch drückt sich dieser Sachverhalt darin aus, dass die Signatur der Metrik auf der Raumzeit $(1, 3)$ und nicht $(0, 4)$ ist, und das ist eben ein wesentlicher Unterschied.

Zwar gibt es viele mathematische Tricks, die es in einigen Disziplinen, insbesondere der Feldtheorie, möglich machen, Probleme im Minkowski-Raum auf äquivalente Probleme im vierdimensionalen Euklidischen Raum abzubilden, dort zu lösen, und dann zurück zu übersetzen. Aber dabei handelt es sich letztlich nur um mathematische Methoden, auch wenn die Sprache oft suggeriert, die Physik wäre in beiden Räumen dieselbe. Die Eigenschaft der Metrik, die Signatur $(1, 3)$ zu haben, ist also sehr wesentlich. Eine Welt mit der Signatur $(0, 4)$ oder $(2, 2)$ würde ganz anders aussehen.

Aufgabe 4.7 Man spekuliere darüber, wie eine $(2, 2)$ - oder $(2, 3)$ -Welt (also mit zwei zeitartigen und zwei oder drei raumartigen Dimensionen) aussehen würde, und ob intelligente Wesen in einer solchen Welt vielleicht zwei Uhren am Handgelenk tragen würden.

Wie sich die Signatur der Metrik auf geometrische Objekte auswirkt, zum Beispiel auf die Definition einer Kugel, hatten wir ansatzweise bereits in Abbildung 4.1 gesehen. Dort hatten wir zur besseren Darstellung eine Dimension einfach ignoriert. Was dort dargestellt ist, ist eigentlich eine dreidimensionale Raumzeit mit der Signatur $(1, 2)$. Die dritte Raumdimension bringt aber in diesem Fall nichts neues. Lediglich aus den Kreisen, die als Gitterlinien auf den Lichtkegel und die Hyperboloide gezeichnet sind, werden Kugeln. Wir bleiben deshalb im folgenden bei dieser vereinfachten Darstellung.

Wir wollen nun noch die verschiedenartigen affinen Unterräume von \mathcal{M} betrachten. Ein affiner Unterraum \mathcal{N} von \mathcal{M} ist selbst wieder ein affiner Raum, und der zugeordnete Vektorraum \mathcal{W} ist ein Untervektorraum von \mathcal{V} . Die Metrik $\eta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathcal{M} induziert offenbar eine Metrik $\eta : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathcal{N} . Wenn zum Beispiel der d' -dimensionale Untervektorraum \mathcal{W} durch die Vektoren $\mathbf{n}_a = n_a^\mu \mathbf{e}_\mu$ aufgespannt wird, mit $a = 1, \dots, d'$, so ist der metrische Tensor auf \mathcal{N} bezüglich dieser Basis gegeben durch

$$\eta_{ab} = \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = \eta_{\mu\nu} n_a^\mu n_b^\nu. \quad (4.64)$$

Je nach der Signatur dieser Metrik haben die affinen Unterräume $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ verschiedene Eigenschaften. Betrachten wir zunächst die eindimensionalen Unterräume. Das sind natürlich die Geraden in \mathcal{M} . Der zugeordnete Vektorraum wird aufgespannt durch einen einzigen Vektor $\mathbf{n}_1 \in \mathcal{V}$, den Tangentialvektor der Geraden, und der kann entweder zeitartig, raumartig oder lichtartig sein. Entsprechend ist die Signatur der induzierten Metrik für zeitartige Geraden $(1, 0)$, also negativ, für raumartige Geraden $(0, 1)$, also positiv, und für lichtartige Geraden ist sie $(0, 0)$, das heißt die Metrik ist entartet.

In eine physikalische Sprache übersetzt heißt das folgendes. Auf einer zeitartigen Geraden, dies kann zum Beispiel die Weltlinie einer Uhr sein, können wir Zeitspannen messen. Auf einer raumartigen Weltlinie können wir räumliche Abstände messen. Dies kann zum Beispiel eine bestimmte

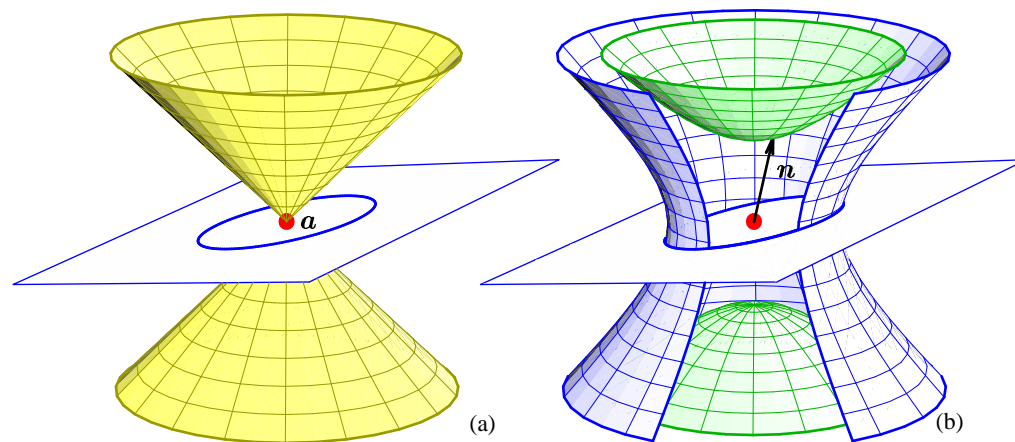


Abbildung 4.2: Eine raumartige Hyperebene $\mathcal{M}_n^\perp(\mathbf{a}) \subset \mathcal{M}$ scheidet den Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ nicht. Der Normalenvektor \mathbf{n} ist ein zeitartiger Einheitsvektor. Die Geometrie der Hyperebene ist die eines gewöhnlichen, dreidimensionalen Euklidischen Raumes mit Signatur $(0, 3)$. Die Vektoren gleicher Länge in $\mathcal{V}_n^\perp \subset \mathcal{V}$ liegen auf gewöhnlichen Kugeln, die sich als Schnittmengen der Hyperebene mit den raumartigen Hyperboloiden in \mathcal{V} ergeben.

räumliche Linie in einen festen Inertialsystem sein, also eine Gerade, die aus lauter gleichzeitigen Ereignissen besteht. Auf einer lichtartigen Geraden können wir dagegen weder Längen noch Zeiten messen. In gewissem Sinne vergeht dort keine Zeit, und es wird durch einen lichtartigen Vektor auch keine Länge dargestellt.

Das steht in Einklang mit der Tatsache, dass alle Vektoren auf dem Vorwärtslichtkegel gleichberechtigt sind. Man kann ihnen keine Länge oder Zeit zuordnen, und so zwischen längeren und kürzeren Abständen auf einer lichtartigen Geraden, also der Weltlinie eines Lichtstrahls unterschieden. Es steht auch in Einklang mit der Zeitdilatation und der Längenkontraktion. Wäre es tatsächlich möglich, eine Uhr auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, so würde sie, und damit die Zeit, sozusagen stehen bleiben, und die Länge eines jeden Maßstabs würde Null werden. Aber das ist natürlich nur ein formaler Grenzwert.

Als nächstes betrachten wir dreidimensionale affine Unterräume von \mathcal{M} , also *Hyperebenen*. Eine Hyperebene in \mathcal{M} wird durch eine Koordinatengleichung definiert, die von der folgenden Form ist

$$\mathcal{M}_n^\perp(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid (b^\mu - a^\mu) n_\mu = 0\}. \quad (4.65)$$

Der Vektor $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$ wird *Normalenvektor* der Hyperebene genannt, und $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ ist ein Ereignis,

durch das die Hyperebene verläuft. Der diesem affinen Unterraum zugeordnete Vektorraum ist natürlich der Orthogonalraum von \mathbf{n} , also

$$\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp} = \{\mathbf{w} \in \mathcal{V} \mid w^{\mu} n_{\mu} = 0\}. \quad (4.66)$$

Die geometrischen Eigenschaften der Hyperebene $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}^{\perp}(\mathbf{a})$ hängen nun offenbar davon ab, ob \mathbf{n} ein zeitartiger, ein raumartiger, oder ein lichtartiger Vektor ist. Es gibt also genau drei Arten von Hyperebenen im Minkowski-Raum, genau wie es drei Arten von Geraden gibt.

Betrachten wir zuerst den in Abbildung 4.2 dargestellten Fall, dass \mathbf{n} zeitartig ist. Wie wir weiter oben gezeigt haben, ist es dann stets möglich, ein kartesisches Koordinatensystem Σ so zu wählen, dass \mathbf{n} proportional zu \mathbf{e}_t ist. Ferner können wir \mathbf{n} normieren, ohne die Definition der Hyperebene (4.65) zu verändern. Wir können also annehmen, dass $\mathbf{n} = \mathbf{e}_t$. Dann aber wird der Orthogonalraum $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ durch die verbleibenden, raumartigen Basisvektoren $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_y$, und $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_z$ aufgespannt. Die auf der Hyperebene indizierte Metrik (4.64) ist

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Es handelt sich um einen gewöhnlichen, dreidimensionalen Euklidischen Raum mit der Signatur $(0,3)$. Das ist natürlich genau das, was wir zu erwarten haben, denn es handelt sich ja gerade um den Raum aller im Inertialsystem Σ mit \mathbf{a} gleichzeitigen Ereignisse.

Wir nennen eine solche Hyperebene *raumartig*. Wie wir in Abbildung 4.2(a) sehen, schneidet sie den Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ nicht. Alle Ereignisse auf einer raumartigen Hyperebene liegen zueinander raumartig. Der zugeordnete Vektorraum ist in Abbildung 4.2(b) als Unterraum von \mathcal{V} gezeigt. Er schneidet den raumartigen Hyperboloid aller Vektoren gleicher räumlicher Länge entlang einer Kugel, die wegen der fehlenden Dimension allerdings nur als Kreis erscheint. Daran erkennen wir die Euklidische Geometrie der Hyperebene, denn eine Kugel hat ihre gewöhnliche Form und ist nicht etwa ein Hyperboloid.

Nun betrachten wir den Fall, dass der Normalenvektor \mathbf{n} ein raumartiger Vektor ist. Auch dann können wir ihn normieren, und mit dem gleichen Argument wie eben können wir ein Inertialsystem Σ wählen, so dass $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$. Der Orthogonalraum $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ wird folglich durch die Basisvektoren $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_t$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_z$ aufgespannt. Die auf der Hyperebene induzierte Metrik ist

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Das ist eine dreidimensionale Lorentz-Metrik. Eine *zeitartige* Hyperebene, also eine Hyperebene deren Normalenvektor raumartig ist, ist selbst wieder ein Minkowski-Raum mit Signatur $(1,2)$. Eine solche Hyperebene ist in Abbildung 4.3(a) dargestellt. Sie schneidet den Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ in \mathcal{M} , und die Schnittmenge bildet den Lichtkegel in der Hyperebene $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}^{\perp}(\mathbf{a})$.

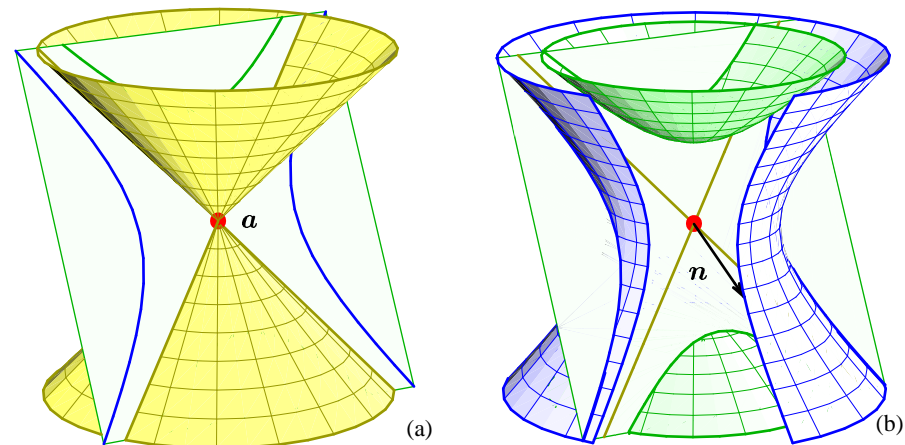


Abbildung 4.3: Eine zeitartige Hyperebene $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}^{\perp}(\mathbf{a}) \subset \mathcal{M}$ scheidet den Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$. Der Normalenvektor \mathbf{n} ist ein raumartiger Einheitsvektor. Die Geometrie der Hyperebene ist die eines dreidimensionalen Minkowski-Raumes mit Signatur $(1,2)$. Die raumartigen und zeitartigen Vektoren gleicher Länge in $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ liegen auf einschaligen bzw. zweisechaligen Hyperboloiden, die sich als Schnittmengen der Hyperebene mit den jeweiligen Hyperboloiden in \mathcal{V} ergeben.

Auch hier ist der zugeordnete Vektorraum wieder in Abbildung 4.3(b) als Unterraum von \mathcal{V} dargestellt. Jetzt schneidet dieser Unterraum sowohl das zeitartige als auch das raumartige Hyperboloid, und zwar jeweils so, dass die Schnittmenge wieder ein zweisechaliges bzw. einschaliges Hyperboloid ist. Eine zeitartige Hyperebene hat also wieder alle Eigenschaften des Minkowski-Raumes, nur dass sie statt vier- nur dreidimensional ist. Die Ereignisse auf einer solchen Hyperebene können zueinander raumartig, zeitartig, oder lichtartig liegen.

Schließlich gibt es noch den Fall, dass der Normalenvektor \mathbf{n} lichtartig ist. Nun ist es weder möglich, ihn zu normieren, noch können wir ein Inertialsystem wählen, so dass \mathbf{n} einer der Basisvektoren ist. Wir dürfen aber annehmen, dass er positiv lichtartig ist, sonst ersetzen wir einfach durch $-\mathbf{n}$. Wir wissen außerdem, dass alle positiven lichtartigen Vektoren gleichberechtigt sind. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen bestimmten auswählen. Sei also $\mathbf{n} = \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_x$.

Gesucht sind nun drei linear unabhängige, dazu orthogonale Vektoren, die den Untervektorraum $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ aufspannen. Da jeder lichtartige Vektor zu sich selbst orthogonal ist, wählen wir $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_x$. Zwei weitere sind $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_z$. Diese drei Vektoren bilden eine orthogonale Basis von $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$, aber keine Orthonormalbasis. Eine solche gibt es nämlich nicht, denn die

induzierte Metrik ist *entartet*,

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

In einer *lichtartigen* Hyperebene gibt es Vektoren, die zu allen anderen orthogonal sind. Das liegt daran, dass die Hyperebene ihren eigenen Normalenvektor \mathbf{n} als Tangentialvektor enthält. Wie in Abbildung 4.4(a) zu sehen ist, berührt eine lichtartige Hyperfläche den Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ entlang einer lichtartigen Geraden. Die durch diese Gerade vorgegebene Richtung ist diejenige Richtung, in der die induzierte Metrik entartet ist. Stellen wir zum Beispiel einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ als Linearkombination $\mathbf{w} = w^a \mathbf{n}_a$ dar, so gilt

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \eta_{ab} w^a w^b = w^2 w^2 + w^3 w^3. \quad (4.70)$$

Die Vektoren gleicher Länge liegen also auf Zylindern, die konzentrisch um die \mathbf{n}_1 -Achse angeordnet sind. Wie in Abbildung 4.4(b) zu sehen ist, ergeben sich diese Zylinder als die Schnittmengen des Unterraumes $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ mit den raumartigen Hyperboloiden. Bis auf eine Gerade liegt eine lichtartige Hyperebene vollständig außerhalb des Lichtkegels. Zwei Ereignisse auf einer solchen Hyperebene liegen also stets raumartig oder lichtartig zueinander, jedoch nie zeitartig. Lichtartige Hyperebenen haben also eine etwas eigentümliche Geometrie, analog zu den lichtartigen Geraden, auf denen die Metrik auch entartet ist.

Wir kennen also jetzt die eindimensionalen und die dreidimensionalen Unterräume des Minkowski-Raumes. Von beiden gibt es jeweils drei Klassen. Wie sieht es mit den zweidimensionalen aus? Hier sieht es zunächst etwas komplizierter aus, denn der Orthogonalraum eines zweidimensionalen Unterraumes ist wieder zweidimensional, so dass wir die Klassifizierung nicht auf etwas einfacheres zurückführen können, so wie wir gerade die Klassifizierung der dreidimensionalen Unterräume auf die der eindimensionalen zurückgeführt haben.

Es bleibt uns also nichts anderes übrig, als eine zweidimensionale Ebene in \mathcal{M} durch ein Ereignis $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ und zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ zu definieren,

$$\mathcal{M}_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{M} \mid (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = v^1 \mathbf{n}_1 + v^2 \mathbf{n}_2\}. \quad (4.71)$$

Der zugeordnete Vektorraum ist folglich der durch \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 aufgespannte,

$$\mathcal{V}_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} = v^1 \mathbf{n}_1 + v^2 \mathbf{n}_2\}. \quad (4.72)$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass stets \mathbf{n}_2 raumartig, und \mathbf{n}_1 dazu orthogonal gewählt werden kann. Nehmen wir zunächst an, \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 seien orthogonal. Dann können nicht beide zeitartig oder lichtartig sein.

Aufgabe 4.8 Es seien \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 zwei zeit- oder lichtartige Vektoren, die zueinander orthogonal sind. Man zeige, dass \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 lichtartig und zueinander proportional, also insbesondere nicht linear unabhängig sind.

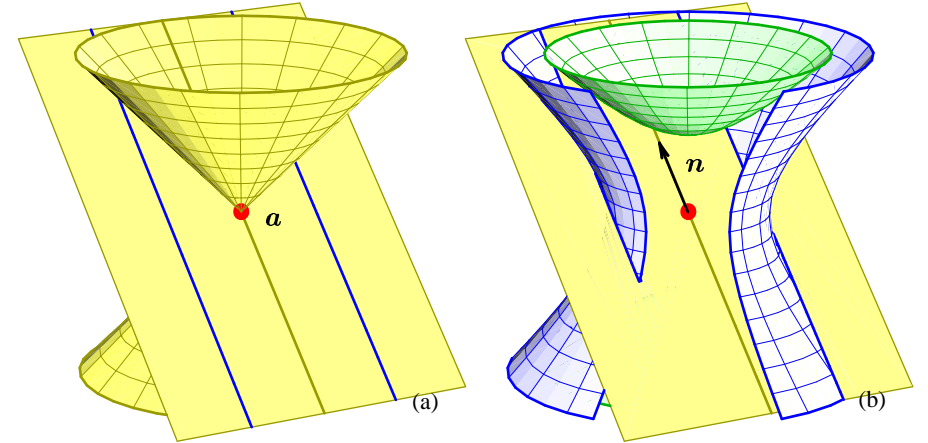


Abbildung 4.4: Eine lichtartige Hyperebene $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}^{\perp}(\mathbf{a}) \subset \mathcal{M}$ berührt den Lichtkegel $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ entlang genau einer lichtartigen Geraden. Der lichtartige Tangentialvektor dieser Geraden ist gleichzeitig der Normalenvektor \mathbf{n} , der nur bis auf eine Konstante bestimmt ist und nicht normiert werden kann. Die Metrik auf der Hyperfläche ist entartet. Die Vektoren gleicher Länge in $\mathcal{V}_{\mathbf{n}}^{\perp}$ liegen auf konzentrischen Zylindern, die sich als Schnittmengen der Hyperebene mit den raumartigen Hyperboloiden in \mathcal{V} ergeben.

Es genügt also zu zeigen, dass wir \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 zueinander orthogonal wählen können, dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass \mathbf{n}_2 raumartig und normiert ist. Um das zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle. Nehmen wir zuerst an, \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 sind beide lichtartig. Dann setzen wir

$$\mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}'_2 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}'_2 = 0. \quad (4.73)$$

Wenn dagegen mindestens einer von beiden nicht lichtartig ist, o.B.d.A. sei dies \mathbf{n}_1 , so setzen wir statt dessen

$$\mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}'_2 = \mathbf{n}_2 - \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1} \mathbf{n}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}'_2 = 0. \quad (4.74)$$

In jedem Fall erhalten wir zwei linear unabhängige und zudem senkrechte Vektoren \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 , die denselben Unterraum $\mathcal{V}_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}$ aufspannen.

Sei also im folgenden $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 1$, das heißt \mathbf{n}_2 ein raumartiger Einheitsvektor, und \mathbf{n}_1 dazu orthogonal, so dass $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$. Wir erhalten dann folgenden Matrixdarstellung der induzierten Metrik,

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

wobei $\alpha = 1$ für einen normierten raumartigen Vektor \mathbf{n}_1 , $\alpha = -1$ für einen normierten zeitartigen Vektor \mathbf{n}_2 , und $\alpha = 0$ für einen lichtartigen Vektor \mathbf{n}_1 . Offenbar gibt es auch hier wieder drei Klassen, nämlich raumartige, zeitartige und lichtartige Ebenen. Sie sehen genau so aus wie in den Abbildungen 4.2–4.4 dargestellt, wobei wir uns jetzt keine zusätzliche Dimension mehr dazu denken müssen.

Wenn \mathbf{n}_1 auch raumartig ist, erhalten wir eine raumartige Ebene mit Signatur $(0, 2)$, also eine gewöhnliche Euklidische Ebene, die den Lichtkegel nicht schneidet. Wenn \mathbf{n}_1 zeitartig ist, bekommen wir eine zeitartige Ebene mit Signatur $(1, 1)$, also einen zweidimensionalen Minkowski-Raum, mit genau den Eigenschaften, wie wir sie in Kapitel 2 hergeleitet hatten. Tatsächlich ist die in Abbildung 4.3 dargestellte Ebene genau die gleiche wie in Abbildung 2.8, nur dass sie jetzt in einen höherdimensionalen Raum eingebettet ist. Und schließlich gibt es auch lichtartige Ebenen, auf denen die Metrik entartet ist, und die den Lichtkegel entlang einer Geraden berühren.

Als Übersicht fassen wir die affinen Unterräume des Minkowski-Raumes in der folgenden Tabelle zusammen:

| Dimension | Signatur der induzierten Metrik | | |
|--------------|---------------------------------|---------------------|----------------------|
| 4 Raumzeit | $(1, 3)$ | | |
| 3 Hyperebene | raumartig: $(0, 3)$ | zeitartig: $(1, 2)$ | lichtartig: $(0, 2)$ |
| 2 Ebene | raumartig: $(0, 2)$ | zeitartig: $(1, 1)$ | lichtartig: $(0, 1)$ |
| 1 Gerade | raumartig: $(0, 1)$ | zeitartig: $(1, 0)$ | lichtartig: $(0, 0)$ |
| 0 Ereignis | $(0, 0)$ | | |

(4.76)

Wenn die Summe der Einträge in der Signatur, also die Anzahl der positiven und negativen einträge in der Metrik, von der Dimension abweicht, so bedeutet das, dass die Metrik entartet ist. Das ist stets für die lichtartigen Unterräume der Fall.

Aufgabe 4.9 Man zeige, dass die Isometriegruppe einer lichtartigen Hyperebene die Galilei-Gruppe ist, also die gleiche Gruppe, die sich als Symmetriegruppe für eine dreidimensionale Newtonsche Raumzeit ergeben würde.

Aufgabe 4.10 Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{M}$ drei Punkte im Minkowski-Raum, die zueinander raumartig, aber nicht auf einer Geraden liegen. Ferner seien $a = L(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, $b = L(\mathbf{z} - \mathbf{x})$ und $c = L(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ die Längen der Seiten des von den drei Punkten aufgespannten Dreiecks. Man zeige, dass die Dreiecksungleichungen genau dann erfüllt sind, wenn die durch die drei Punkte definierte Ebene raumartig ist.

Der Doppler-Effekt

Wir wollen nun, zum Abschluss dieses Kapitels über die Geometrie des Minkowski-Raumes, noch zwei physikalische Effekte der speziellen Relativitätstheorie diskutieren, die wir in Kapitel 2 noch

nicht angesprochen haben. Für diese Effekte ist es wesentlich, dass die Raumzeit vierdimensional ist, denn sei treten, von einem einfachen Spezialfall abgesehen, in der zweidimensionalen Raumzeit nicht auf.

Wir kommen noch einmal auf die Wellengleichung (4.6) zurück, die uns als eine vereinfachte Elektrodynamik dient. Wir wollen uns nun deren Lösungen genauer anschauen. Wir hatten bereits gesehen, dass wir sie als Tensorgleichung, also als eine offensichtlich vom Bezugssystem unabhängige Feldgleichung für ein skalares Feld $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben können,

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0. \quad (4.77)$$

Natürlich kennen wir auch die Lösungen dieser Wellengleichung bereits aus der Elektrodynamik. Es sind Überlagerungen aus ebenen Wellen. Jede Ebene Welle ist durch einen räumlichen Wellenvektor, eine Frequenz, sowie eine Phase und eine Amplitude charakterisiert. Es liegt nahe, den räumlichen Wellenvektor und die Frequenz zu einem Raumzeit-Vektor zusammenzufassen. Führen wir also einen Vektor $\mathbf{k} = k^\mu \mathbf{e}_\mu$ ein und machen den Ansatz

$$\phi(\mathbf{x}) = A \cos(k_\mu x^\mu + \varphi). \quad (4.78)$$

Tatsächlich ist das eine Lösung der Gleichung (4.77), aber nur wenn

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.79)$$

Der Wellenvektor $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$ muss also ein *lichtartiger* Vektor sein. Da wir in (4.78) \mathbf{k} durch $-\mathbf{k}$ ersetzen können, wenn wir gleichzeitig φ ebenfalls durch $-\varphi$ ersetzen, wollen wir annehmen, dass \mathbf{k} *positiv* lichtartig ist.

Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung ist also eine Überlagerung aus ebenen Wellen, wobei jede ebene Welle durch einen positiven lichtartigen Wellenvektor $\mathbf{k} \in \mathcal{L}^+$ charakterisiert ist. Die Amplituden und Phasen der Wellen spielen im folgenden keine besondere Rolle. Wir interessieren uns nur für die physikalische Bedeutung des Wellenvektors \mathbf{k} .

Wenn wir uns in ein bestimmtes Inertialsystem Σ begeben, so können wir den Wellenvektor nach seinen Raum- und Zeitkomponenten zerlegen. Wir schreiben also

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi). \quad (4.80)$$

Hier verwenden wir die folgende Notation. Wenn wir bezüglich eines fest gewählten Inertialsystems eine Raum-Zeit-Zerlegung durchführen, so können wir für die räumlichen Komponenten eines Vektors die gewöhnliche Vektornotation verwenden, denn die Metrik auf der raumartigen Hyperfläche, aufgespannt durch $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, ist, wie wir gerade gesehen haben, die gewöhnliche Euklidische Metrik.

Ganz allgemein gilt also, dass wir zwei gegebene 4-Vektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{V}$ stets in je eine Zeitkomponente und einen 3-Vektor zerlegen können,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p^t \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q^t \\ \vec{q} \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

und dann das Skalarprodukt wie folgt ausrechnen können,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \vec{p} \cdot \vec{q} - p^t q^t, \quad (4.82)$$

wobei $\vec{p} \cdot \vec{q}$ das gewöhnliche dreidimensionale Skalarprodukt von Vektoren im Raum ist. Auf diese Weise sparen wir uns das Ausschreiben der Indizes bei der Raum-Zeit-Zerlegung. Wir müssen nur bei der Vektor-Notation (4.81) stets darauf achten, dass die erste Komponente des 4-Vektors immer diejenige ist, bei der der Index t oben steht. Sonst kommt es beim Auswerten von Skalarprodukten wie in (4.82) zu Vorzeichenfehlern, denn es gilt $p_t = -p^t$ etc. Bei den räumlichen Komponenten besteht keine Gefahr, denn hier ist $p_x = p^x$, $p_y = p^y$, und $p_z = p^z$.

Nun haben wir diese Zerlegung also für den Wellenvektor \mathbf{k} und den "Ortsvektor" \mathbf{x} durchgeführt. Eigentlich sollten wir hier $\mathbf{x} - \mathbf{o}$ schreiben, wobei $\mathbf{o} \in \mathcal{M}$ ein als Ursprung dienendes Ereignis ist, aber an dieser Stelle wollen wir ausnahmsweise einmal den affinen Raum \mathcal{M} mit dem Vektorraum \mathcal{V} identifizieren. Jedenfalls sehen wir sofort, dass es sich bei (4.80) um eine Welle mit der Kreisfrequenz ω und der Ausbreitungsrichtung \vec{k} handelt. Allerdings gilt diese Aussage natürlich nur im Inertialsystem Σ . In einem anderen Inertialsystem sieht die Welle anders aus, denn es ergibt sich dann eine andere Raum-Zeit-Zerlegung.

Wir wollen nun versuchen, Größen wie Frequenzen, Ausbreitungsrichtungen etc. soweit möglich durch *Tensoren* zu erfassen. Mit anderen Worten, wir wollen typische physikalische Fragen stellen, wie zum Beispiel "Welche Frequenz hat das Licht?" oder "Aus welcher Richtung kommt das Licht?", deren Antwort zwar vom Beobachter abhängt, aber wir wollen die Antwort in einer Art und Weise geben, die nicht mehr Bezug nimmt auf ein bestimmtes Inertialsystem. Damit werden wir in der Lage sein, ohne viel zu rechnen, zwei wichtige relativistische Effekte zu berechnen. Wir beginnen mit dem *Doppler-Effekt*.

Stellen wir folgende einfache Frage. Gegeben sei eine Lichtwelle mit Wellenvektor \mathbf{k} und ein Beobachter, der sich gleichförmig entlang einer zeitartigen Weltlinie bewegt. Der Tangentialvektor an diese Weltlinie sei durch den positiven zeitartigen Einheitsvektor \mathbf{u} gegeben. Welche Frequenz misst dieser Beobachter? Um diese Frage ganz allgemein zu beantworten, benutzen wir unsere beiden leistungsfähigsten Werkzeuge, nämlich das Relativitätsprinzip und den Tensorkalkül. Das Relativitätsprinzip besagt, dass wir uns in ein beliebiges Inertialsystem setzen können, um die Frage zu beantworten.

Natürlich wählen wir dazu das Ruhesystem des Beobachters, also dasjenige Inertialsystem, in dem $\mathbf{u} = \mathbf{e}_t$. Wir wissen bereits, dass es so ein Inertialsystem stets gibt. Es gilt dann, wenn wir in *diesem* Inertialsystem eine Raum-Zeit-Zerlegung durchführen,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

und ω ist genau die gesuchte Frequenz. Das nützt uns aber noch nichts, denn wir wollen das Ergebnis ja auch dann geliefert bekommen, wenn wir nicht erst das passende Inertialsystem suchen. Nun folgt aber offenbar aus (4.83), dass

$$\omega = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}. \quad (4.84)$$

Auch das gilt zunächst nur in dem ausgesuchten Inertialsystem. Allerdings steht jetzt auf beiden Seiten ein *Skalar*. Sowohl das Produkt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$ ist ein Skalar, also auch die gesuchte Frequenz ω , denn sie ist ja durch eine eindeutige Messvorschrift definiert. Also ist (4.84) eine Tensorgleichung. Sie gilt genau so in jedem anderen Inertialsystem. Wir müssen nicht erst das Ruhesystem des Beobachters aufsuchen, um die Frage nach der von diesem Beobachter gemessenen Frequenz zu beantworten. Es genügt, das Skalarprodukt des Wellenvektors mit dem normierten Tangentialvektor der Weltlinie des Beobachters zu berechnen.

Aufgabe 4.11 *Man zeige, dass sich derselbe Wert für ω auch auf folgende Art ermitteln lässt. Gegeben seien die Komponenten von \mathbf{u} und \mathbf{k} in einem Inertialsystem Σ . Man suche zunächst eine geeignete Lorentz-Transformation in ein Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$, in dem der Beobachter ruht, und lese dann die Zeitkomponenten von \mathbf{k} in $\tilde{\Sigma}$ ab.*

Nun betrachten wir folgende Situation. Ein in einem Inertialsystem Σ sei eine Lichtwelle durch einen Wellenvektor

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \omega = |\vec{k}|, \quad (4.85)$$

gegeben. Wir können uns vorstellen, dass die Lichtwelle von einer sehr weit entfernten Lichtquelle stammt, die sich in Richtung des Vektors $-\vec{k}$ befindet und im Inertialsystem Σ ruht. Ein Beobachter bewegt sich nun relativ zum diesem Inertialsystem mit einer in Geschwindigkeit \vec{v} . Welche Frequenz ω' misst dieser Beobachter?

Dazu müssen wir zunächst den Tangentialvektor der Weltlinie des Beobachters ermitteln. Wenn \vec{v} seine Geschwindigkeit ist, dann muss im Inertialsystem Σ gelten

$$\mathbf{u} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

und der Normierungsfaktor $\gamma(\vec{v})$ ist so zu bestimmen, dass $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ ist. Das ergibt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \gamma^2(\vec{v}) (\vec{v}^2 - 1) = -1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}. \quad (4.87)$$

Auch hier tritt wieder der schon bekannte relativistische Gamma-Faktor auf. Nun brauchen wir nun noch das Skalarprodukt zu berechnen und erhalten

$$\omega' = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = \gamma(\vec{v}) (\omega - \vec{v} \cdot \vec{k}). \quad (4.88)$$

Man überlege sich, um wieviel mühsamer die Rechnung gewesen wäre, wenn wir zunächst eine Lorentz-Transformation gesucht hätten, um in das Ruhesystem des Beobachters zu wechseln!

Nun betrachten wir zwei Spezialfälle. Zunächst seien die Vektoren \vec{v} und \vec{k} parallel, das heißt der Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu oder von ihr weg. Dann ist $\vec{v} \cdot \vec{k} = v\omega$, wobei v die

Relativgeschwindigkeit von Quelle und Beobachter ist, und ein positives v bedeutet, dass sich der Beobachter von der Quelle entfernt. Die gemessene Frequenz ist dann

$$\omega' = \omega \gamma(v) (1 - v) = \omega \frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}. \quad (4.89)$$

Das ist der sogenannte *longitudinale Doppler-Effekt*. Offenbar erscheint die Frequenz höher, wenn sich der Beobachter der Quelle nähert, und niedriger, wenn er sich von der Quelle entfernt. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass das Verhältnis ω'/ω *nur* von der Relativbewegung von Beobachter und Quelle abhängt, während dasselbe Verhältnis zum Beispiel bei Schallwellen auch noch von der Bewegung der beiden relativ zum Medium abhängt. Da es ein solches Medium aber für Licht nicht gibt, kann auch seine Bewegung keine Rolle spielen.

Als weiteren Spezialfall betrachten wir eine Bewegung des Beobachters senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes. Er bewegt sich also quasi gerade an der Quelle vorbei. Es gilt dann $\vec{v} \cdot \vec{k} = 0$, und folglich

$$\omega' = \omega \gamma(v) = \omega \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4.90)$$

Was der Beobachter nun sieht, ist nicht der eigentliche Doppler-Effekt, sondern die Zeitdilatation. Trotzdem wird das Phänomen üblicherweise als *transversaler Doppler-Effekt* bezeichnet. Bei einer Schallwelle und einer Geschwindigkeit $v \ll 1$ würde gar kein Effekt auftreten, das heißt man würde genau die Frequenz hören, mit der die Quelle sendet.

Hier tritt aber trotzdem ein Effekt auf, weil die Zeit im Ruhesystem des Beobachters aus der Sicht der Quelle langsamer vergeht, und daher mehr Wellen pro Zeiteinheit gezählt werden als ausgesandt werden. Beim transversalen Dopplereffekt erscheint die Frequenz immer erhöht. Allerdings ist dieser Effekt von der Ordnung v^2 , im Gegensatz zum longitudinalen Doppler-Effekt, der von der Ordnung v ist. Der transversale Doppler-Effekt ist also bei kleinen Geschwindigkeiten nur schwer messbar. Durch eine kleine Abweichung von der exakten Orthogonalität der Bewegungsrichtung zur Ausbreitungsrichtung der Wellen würde es schon zu einem überlagerten longitudinalen Doppler-Effekt kommen.

Aberration

Während sich der bekannte Doppler-Effekt auf die Frequenz von Lichtwellen auswirkt, ist die *Aberration* ein vielleicht weniger bekanntes aber für Astronomen äußerst wichtiges Phänomen, das mit deren Ausbreitungsrichtung zu tun hat. Um das grundsätzliche Phänomen zu beschreiben, betrachten wir die folgende Situation. Es seien zwei Lichtwellen gegeben, mit zwei verschiedenen, positiven lichtartigen Wellenvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 .

Wir können uns dabei vorstellen, dass die Lichtwellen von zwei weit entfernten Sternen kommen, die relativ zueinander in Ruhe sind, wobei letzteres aber eigentlich keine Rolle spielt. Wichtig ist nur, dass die ankommenden Lichtwellen in dem Gebiet der Raumzeit, in dem wir uns befinden, als ebene Wellen beschrieben werden können. Das ist für Licht von anderen Sternen

sicher der Fall, solange wir uns innerhalb des Sonnensystems aufhalten, und unsere Experimente innerhalb eines kurzen Zeitraumes stattfinden, so dass sich die Positionen der Sterne am Himmel relativ zueinander nicht merklich verändern.

Wir haben es also mit der Überlagerung von zwei ebenen Lichtwellen zu tun. Es sei auch wieder ein Beobachter zugegen, zum Beispiel eine Astronautin auf dem Weg zum Mars. Die Triebwerke sind abgeschaltet, also bewegt sich das Raumschiff auf einer geraden Weltlinie, deren Tangentialvektor durch einen positiven zeitartigen Einheitsvektor \mathbf{u} gegeben ist. Wir können dann folgende Frage stellen. Wenn die Astronautin aus dem Fenster schaut und beide Sterne sieht, welchen Winkel θ sieht sie dann zwischen ihnen? Auch hier handelt es sich um eine genau definierte Messvorschrift. Man kann den Winkel θ zum Beispiel mit einem Sextanten messen, auch wenn moderne Weltraumfahrer so etwas vielleicht nicht immer bei sich haben.

Um das Problem zu lösen, gehen wir genau so vor wie eben. Zunächst begeben wir uns in ein bestimmtes Inertialsystem, nämlich das Ruhesystem des Raumschiffs. Es gilt dann

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Den Sichtwinkel können wir nun einfach mit Hilfe der Euklidischen Geometrie ausrechnen. Die Lichtwellen kommen aus den Richtungen der räumlichen Vektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 . Der Winkel θ zwischen diesen Vektoren ist folglich

$$\cos \theta = \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{|\vec{k}_1| |\vec{k}_2|} = \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{\omega_1 \omega_2}, \quad (4.92)$$

denn \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 sind lichtartig, daher ist $\omega_1 = |\vec{k}_1|$ und $\omega_2 = |\vec{k}_2|$. Nun ist θ und damit auch $\cos \theta$ eine wohldefinierte Messgröße und deshalb ein Skalar. Es sollte also möglich sein, die rechte Seite der Gleichung so umzuformen, dass auch dort wieder ein Skalar steht, der aus den Vektoren \mathbf{u} , \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 gebildet ist. Das ist tatsächlich möglich, denn es gilt

$$\cos \theta = 1 + \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 - \omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2} = 1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u})(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u})}. \quad (4.93)$$

Damit haben wir eine Formel für den Sichtwinkel θ gefunden, die wir in jedem beliebigen Inertialsystem auswerten können. Auf der rechten Seite steht eine Funktion von drei Skalaren, nämlich den Skalarprodukten der Vektoren \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 und \mathbf{u} .

Aus der Herleitung können wir sogar schließen, dass die rechte Seite nur Werte zwischen 1 und -1 annehmen kann. Außerdem wissen wir aus Aufgabe 4.8, dass keines der beiden Skalarprodukte im Nenner Null werden kann, und das Produkt $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2$ genau dann Null ist, wenn \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 zueinander proportional sind. Das muss auch so sein, denn genau dann ist $\theta = 0$, das heißt die Sterne stehen an derselben Stelle, und zwar für alle Beobachter unabhängig von deren Bewegungszustand.

In jedem anderen Fall, also wenn \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 linear unabhängig sind, ist der Sichtwinkel θ von \mathbf{u} abhängig. Allgemein kann man sagen, dass ein schnell an der Erde vorbei fliegender Astronaut die bekannten Sternbilder in einer verzerrten Form sieht. Und zwar auch dann, wenn er sich in unmittelbarer Nähe der Erde befindet. Der Effekt rührt also nicht daher, dass der Astronaut die Sterne aus einer anderen Perspektive sieht, weil er sich woanders befindet. Natürlich sieht der Große Wagen völlig anders aus, wenn man sich auf einem Planeten befindet, der einen Stern im kleinen Wagen umkreist.

Das hat aber mit der Aberration nichts zu tun. Sie resultiert einzig und allein aus dem Bewegungszustand des Beobachters. Obwohl sich zwei Beobachter in unmittelbarer Nähe befinden, sehen sie verschiedene Bilder der sie umgebenden Welt, wenn sie sich relativ zueinander bewegen. Das gilt natürlich nicht nur für weit entfernte Sterne, sondern auch für alle in der Nähe befindlichen Objekte. Dann wird die Rechnung aber komplizierter, denn nun können wir das von den Objekten in der Nähe ausgesandte Licht nicht mehr als ebene Welle betrachten.¹

Aufgabe 4.12 Ein superschnelles Raumschiff durchquert das Sonnensystem. Ein Astronaut schaut aus dem Fenster und sieht die Sternbilder Wassermann, Widder und Waage. Sie bilden auf der Himmelsphäre ein gleichseitiges sphärisches Dreieck mit der Seitenlänge 60° . Welche Geschwindigkeit hat das Raumschiff relativ zum Sonnensystem?

5 Relativistische Dynamik

Bis jetzt haben wir im wesentlichen nur die Geometrie der Raumzeit selbst betrachtet. Nun wollen wir richtige Physik betreiben. Das heißt, wir wollen physikalische Vorgänge und deren Gesetzmäßigkeiten in der Raumzeit beschreiben. Gesucht ist so etwas wie eine relativistische Verallgemeinerung der Mechanik, die im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten in die Newtonsche Mechanik über geht.

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Grundbegriffe der Mechanik, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Kraft etc., in einer vom Bezugssystem unabhängigen Weise zu definieren. Das hatten wir schon ansatzweise in Kapitel 1 für die klassischen Mechanik versucht. Wir wollen Bewegungsgleichungen aufstellen, zum Beispiel für ein einzelnes Punktteilchen, so dass sie dem Relativitätsprinzip genügen. Sie sollen für alle Beobachter in allen Bezugssystemen gleich aussehen. Mit anderen Worten, es soll sich dabei um *Tensorgleichungen* handeln, und die Größen, die in ihnen vorkommen, müssen Tensoren sein.

Wir sagen auch, dass wir die Dynamik eines Teilchens *kovariant* formulieren wollen. Kovariant heißt in diesem Zusammenhang nichts anderes, als dass alle Definitionen und Beziehungen zwischen physikalischen Größen als Tensorgleichungen formuliert sind, so dass sie automatisch dem Relativitätsprinzip genügen. Zuerst müssen wir und also darüber Gedanken machen, wie

¹Was man tatsächlich sieht, wenn man nahe an einem Objekt vorbei fliegt, lässt sich numerisch simulieren und als Film darstellen. Als Beispiel sei hier die Simulation eines Fluges durch Stonehenge genannt: <http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/Group.html>.

wir die oben genannten Größen, die die Bewegung eines einzelnen Teilchens in der Raumzeit beschreiben, als Tensoren definieren können.

Die Eigenzeit

Wie am Anfang von Kapitel 1 beginnen wir mit der Betrachtung einer Weltlinie eines punktförmigen Teilchens in der Raumzeit \mathcal{M} . Die ist im folgenden immer der Minkowski-Raum. Sei also $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ eine parametrisierte Kurve. Den Kurvenparameter nennen wir s . Damit dies die Weltlinie eines Teilchens ist, das sich langsamer als das Licht bewegt, muss der Tangentialvektor $d\lambda/ds$ stets positiv zeitartig sein. Positiv bedeutet in diesem Fall, dass wir den Parameter s stets so wählen, dass die Weltlinie in der korrekten Zeitrichtung durchlaufen wird. Wir sagen auch, die Parametrisierung sei *zukunftsgerichtet*.

Aufgabe 5.1 Es seien $\lambda(s_1)$ und $\lambda(s_2)$ zwei Ereignisse auf der Weltlinie, mit $s_2 > s_1$, und es sei $d\lambda/ds$ positiv zeitartig für alle s . Man zeige, dass $\lambda(s_2)$ in der Zukunft von $\lambda(s_1)$ liegt.

Wie wir bereits in Kapitel 1 gesehen haben, taugt der Tangentialvektor aber nicht zur Definition einer Geschwindigkeit. Denn unter einer Reparametrisierung der Kurve, das heißt unter einem Übergang zu einem neuen Kurvenparameter $s \mapsto \tilde{s}$ ist der Tangentialvektor nicht invariant,

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\tilde{s}}{ds} \frac{d\lambda}{d\tilde{s}}. \quad (5.1)$$

Das heißt nicht etwa, dass der Tangentialvektor kein 4-Vektor, also kein Tensor erster Stufe wäre. Das ist er schon, denn unter einer Koordinatentransformation im Minkowski-Raum transformieren sich seine Komponenten in der richtigen Art und Weise. Eine Reparametrisierung der Kurve hat aber mit einer solchen Koordinatentransformation nichts zu tun. Es ist zwar auch eine Art Koordinatentransformation, aber nicht in der Raumzeit, sondern gewissermaßen auf der Kurve selbst.

Wir müssen also diese zwei Dinge auseinander halten. Der Tangentialvektor ist ein Tensor, aber er ist nicht eindeutig als Funktion auf der Kurve gegeben, sondern hängt von deren Parametrisierung ab. Um jedem Ereignis auf der Weltlinie *eindeutig* einen Geschwindigkeitsvektor zuzuordnen, können wir den Tangentialvektor aber *normieren*. Das heißt, wir können zu einem positiven zeitartigen Einheitsvektor übergehen, der dann von der Parametrisierung unabhängig ist.

Eine besonders geschickte Möglichkeit, dies zu tun, ist, eine ganz spezielle Parametrisierung der Kurve zu wählen. Dazu führen wir einen speziellen Kurvenparameter ein, den wir τ nennen, und den wir wie folgt als Funktion des gegebenen Kurvenparameters s bestimmen. Bezüglich des neuen Parameters τ soll der Tangentialvektor ein zeitartiger Einheitsvektor sein, also

$$\frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} = -1. \quad (5.2)$$

Andererseits gilt auch hier

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\tau}{ds} \frac{d\lambda}{d\tau}. \quad (5.3)$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit sich selbst, so ergibt sich

$$\frac{d\lambda}{ds} \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} = -\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2. \quad (5.4)$$

Da $d\tau/ds$ positiv sein soll, denn die Richtung der Parametrisierung soll sich nicht ändern, können wir dies auflösen und erhalten

$$\frac{d\tau}{ds} = \sqrt{-\frac{d\lambda}{ds} \cdot \frac{d\lambda}{ds}} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d\lambda^\mu}{ds} \frac{d\lambda^\nu}{ds}}. \quad (5.5)$$

Diese Differentialgleichung können wir eindeutig lösen, indem wir an irgendeiner Stelle einen Wert für τ als Anfangswert vorgeben. Natürlich setzen wir voraus, dass die Weltlinie genügend glatt ist.

Der neue Kurvenparameter τ ist also bis auf eine konstante Verschiebung $\tau \mapsto \tau + \Delta\tau$ eindeutig als Funktion vom alten Kurvenparameter s festgelegt. Tatsächlich hat er eine sehr anschauliche Bedeutung. Betrachten wir dazu ein kurzes Stück der Weltlinie, sagen wir zwischen s_1 und s_2 . Und nehmen wir ferner an, dass das Stück genügend klein ist, so dass wir die Kurve zwischen s_1 und s_2 durch eine Gerade annähern können, also durch eine gleichförmige Bewegung. Dann lautet (5.5) in linearer Näherung

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{s_2 - s_1} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\lambda^\mu(s_2) - \lambda^\mu(s_1)}{s_2 - s_1} \frac{\lambda^\nu(s_2) - \lambda^\nu(s_1)}{s_2 - s_1}}, \quad (5.6)$$

also

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} (\lambda^\mu(s_2) - \lambda^\mu(s_1)) (\lambda^\nu(s_2) - \lambda^\nu(s_1))}. \quad (5.7)$$

Diese Formel kennen wir aber schon. Was dort steht, ist der *zeitliche Abstand* zwischen den Ereignissen $\lambda(s_1)$ und $\lambda(s_2)$, gemessen von einer *mitbewegten* Uhr. Dieser zeitliche Abstand ist also gleich der Differenz der Parameter τ_1 und τ_2 .

Aber das bedeutet nichts anderes, als dass der neue Parameter τ sozusagen die Zeigerstellung einer Uhr definiert, die sich entlang der Weltlinie mitbewegt. Wenn wir die Weltlinie in viele kleine Stücke zerlegen, dann gilt auf jedem kleinen Stück die lineare Näherung, und die gesamte Zeitspanne entlang eines längeren Stückes der Weltlinie ergibt sich durch Aufsummieren der Teilstücke. Genauer, die Differenz zwischen dem Parameter τ an zwei verschiedenen Stellen auf der Weltlinie ist durch das folgende Integral gegeben,

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{-\frac{d\lambda}{ds} \cdot \frac{d\lambda}{ds}} = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d\lambda^\mu}{ds} \frac{d\lambda^\nu}{ds}}. \quad (5.8)$$

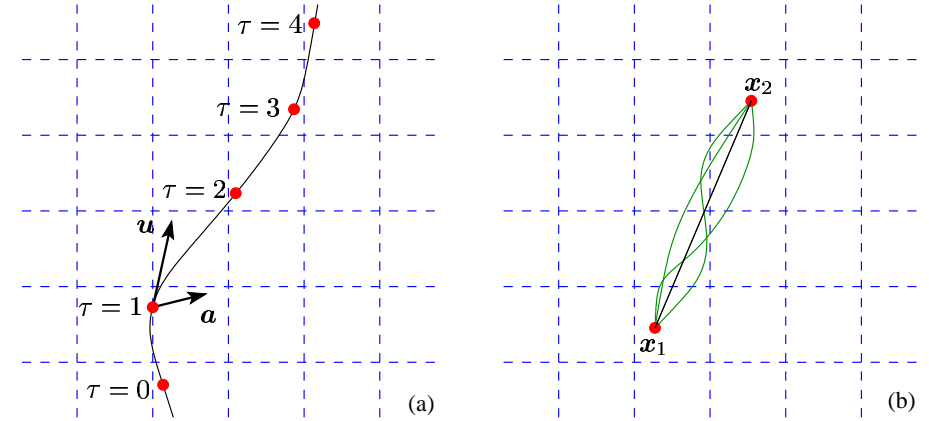


Abbildung 5.1: Die Eigenzeit τ einer Weltlinie (a) repräsentiert die von einer mitbewegten Uhr angezeigte Zeit, misst also die laufende Länge der Weltlinie. Die 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} und die dazu senkrecht stehende 4-Beschleunigung \mathbf{a} sind als die Ableitungen der Weltlinie nach der Eigenzeit τ definiert. Eine zeitartige Gerade (b), die zwei Ereignisse \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 verbindet, ist diejenige Weltlinie, für die die Eigenzeit extremal wird (b).

Dieser Ausdruck sollte uns an etwas erinnern. Denken wir uns das Minuszeichen weg, und die Lorentz-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ ersetzt durch die dreidimensionale Euklidische Metrik δ_{mn} . Dann wird durch das Integral gerade die *Kurvenlänge* von λ zwischen s_1 und s_2 definiert.

Demnach ist der neue Kurvenparameter τ so gewählt, dass er in gewisser Weise die laufende Länge der Kurve misst. Solche Kurvenparameter kennen wir zum Beispiel als die Kilometersteine neben einer Landstraße oder Bahnstrecke. Der einzige Unterschied ist, dass τ hier nicht eine räumliche Länge misst, sondern, wie in Abbildung 5.1(a) angedeutet, die entlang der Weltlinie vergehende Zeit. Der Kurvenparameter τ wird deshalb auch die *Eigenzeit* der Weltlinie genannt.

Wir wissen nun also auch, wie sich Uhren verhalten, die sich nicht gleichförmig bewegen. Sie zeigen die Eigenzeit τ ihrer Weltlinie an, und diese Eigenzeit ist, in eine geometrische Sprache übersetzt, die *zeitliche Länge* der Weltlinie. Uhren messen also letztlich Längen in den Raumzeit. Diese Aussage wird üblicherweise als *Uhrenhypothese* bezeichnet. Hypothese deshalb, weil man dazu annehmen muss, dass reale Uhren nicht in irgendeiner Weise durch Beschleunigungen in ihrem Gang beeinflusst werden.

Wir sprechen also hier stets über ideale Uhren. Eine ideale Uhr hat folgende Eigenschaft. Wenn sie sich gleichförmig bewegt, dann zeigt sie genau die in ihrem Ruhesystem Σ geltende Zeitkoordinate t an, möglicherweise bis auf eine Verschiebung. Wenn sie dagegen beschleunigt wird,

dann verhält sie sich in jedem Moment genau so wie ein Uhr in dem Inertialsystem, bezüglich dessen sie sich gerade in diesem Moment in Ruhe befindet. Anders ausgedrückt, wenn sich eine gleichförmig bewegte und eine beschleunigte ideale Uhr so begegnen, dass sie im Moment der Begegnung relativ zueinander in Ruhe sind, dann kann ein zufällig vorbeischauender Beobachter in diesem Moment keinen Gangunterschied feststellen.

Eine **ideale Uhr** zeigt die Eigenzeit ihrer eigenen Weltlinie an.

Für eine reale Uhr kann diese Annahme natürlich nur gelten, wenn die Beschleunigungen klein genug sind. Keine reale Uhr übersteht beliebig große Beschleunigungen. Das heißt, es wird immer Beschleunigungen geben, die die Uhr zwar noch nicht zerstören, sich aber auf ihren Gang auswirken. Außerdem ist eine reale Uhr ein räumlich ausgedehntes Objekt, das zu Beispiel auch rotieren kann. Ihr Bewegungszustand wird also allein durch die Weltlinie gar nicht vollständig erfasst. Entscheidend ist jedoch, dass sich jede Uhr für genügend kleine Beschleunigungen wie ein ideale Uhr verhalten muss, wenn wir sie für Experimente im Rahmen der Relativitätstheorie verwenden wollen.

Aufgabe 5.2 Warum wäre eine Pendeluhr denkbar ungeeignet?

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Kommen wir nun zurück zur Definition der Geschwindigkeit. Wenn wir als Kurvenparameter die Eigenzeit τ wählen, dann ist der Tangentialvektor stets ein positiver zeitartiger Einheitsvektor,

$$\mathbf{u} = \frac{d\lambda}{d\tau} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1. \quad (5.9)$$

Diesen Vektor \mathbf{u} nennen wir die *4-Geschwindigkeit*. Er ist an jedem Ereignis auf der Weltlinie definiert, und zwar als 4-Vektor unabhängig vom Bezugssystem, und außerdem unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Kurve.

Wie in Abbildung 5.1(a) angedeutet, ist \mathbf{u} der eindeutig bestimmte zeitartige Einheitsvektor, der zur Weltlinie tangential ist. Denn die einzige Freiheit, die wir bei der Definition der Eigenzeit durch die Differentialgleichung (5.5) oder das Integral (5.8) noch haben, ist eine Verschiebung $\tau \mapsto \tau + \Delta\tau$ um eine Konstante. Diese wirkt sich aber auf die Ableitung und damit auf \mathbf{u} nicht aus. Wir sagen auch, dass (5.9) eine *kovariante* Definition von Geschwindigkeit ist, denn auf beiden Seiten der Gleichung steht ein Tensor, und somit ist die Definition vom Bezugssystem unabhängig.

Die **4-Geschwindigkeit** eines Teilchens beim Durchlaufen eines Ereignisses ist der normierte zeitartige Tangentialvektor der Weltlinie an diesem Ereignis.

Wie hängt nun die 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} mit der in einem ausgewählten Inertialsystem Σ gemessenen *3-Geschwindigkeit* \vec{v} des Teilchens zusammen? Dazu führen wir wieder eine Raum-Zeit-Zerlegung bezüglich des festgelegten Inertialsystems aus, das heißt wir schreiben für die Weltlinie

und die daraus abgeleitete 4-Geschwindigkeit

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^t \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^t \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \lambda^t \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow u^t u^t - \vec{u} \cdot \vec{u} = 1, \quad (5.10)$$

wobei letzteres die an \mathbf{u} gestellte Normierungsbedingung ist. Die 3-Geschwindigkeit \vec{v} relativ zu Σ ist wie üblich definiert als die Ableitung des *Ortes* $\vec{\lambda}$ nach der *Zeit* λ^t in diesem Inertialsystem, also

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\lambda}}{d\lambda^t} = \frac{d\vec{\lambda}}{d\tau} / \frac{d\lambda^t}{d\tau} = \frac{\vec{u}}{u^t}. \quad (5.11)$$

Aus dieser Gleichung und der Normierungsbedingung für \mathbf{u} ermitteln wir leicht folgende Beziehung zwischen dem 4-Vektor \mathbf{u} und dem 3-Vektor \vec{v} ,

$$\mathbf{u} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \gamma(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}. \quad (5.12)$$

Offenbar tritt auch hier wieder der relativistische Gamma-Faktor auf. Die räumlichen Komponenten der 4-Geschwindigkeit sind durch die 3-Geschwindigkeit gegeben, multipliziert mit genau diesem Faktor. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit (1.55), also der analogen Definition einer 4-Geschwindigkeit in der Newtonschen Raumzeit. Offenbar unterscheiden sich die Vektoren nun in ihrer Länge. Oder genauer, es ist die unterschiedliche Norm, die zu einer unterschiedliche Darstellung eines Einheitsvektors führt.

Aufgabe 5.3 Die Weltlinie eines Teilchens sei in einem Inertialsystem Σ durch die folgenden Koordinatengleichungen definiert,

$$x = \sqrt{\rho^2 + t^2}, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (5.13)$$

wobei $\rho > 0$ eine Konstante ist. Man bestimme eine Eigenzeit-Parameterdarstellung $\lambda(\tau)$ der Weltlinie.

Aufgabe 5.4 Ein Teilchen bewegt sich in einem Inertialsystem Σ auf einer Kreisbahn mit Radius r und Kreisfrequenz ω . Seine Weltlinie ist demnach durch die folgenden Koordinatengleichungen definiert,

$$x = r \cos(\omega t), \quad y = r \sin(\omega t), \quad z = 0. \quad (5.14)$$

Man bestimme eine Eigenzeit-Parameterdarstellung $\lambda(\tau)$ der Weltlinie. Welche Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$ misst eine mitbewegte Uhr?

Als nächstes wollen wir die *Beschleunigung* definieren. Natürlich soll auch das wieder ein Tensor sein, das heißt die Definition soll kovariant sein. Die naheliegende Definition ist die zweite Ableitung der Weltlinie nach dem Kurvenparameter, von dem wir wieder annehmen, dass er durch die Eigenzeit τ gegeben ist, also

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d^2\lambda}{d\tau^2}. \quad (5.15)$$

Die *4-Beschleunigung* \mathbf{a} ist also die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Eigenzeit. Aus der Definition folgt sofort und ohne weitere Rechnung, dass auch \mathbf{a} ein 4-Vektor ist, denn \mathbf{u} ist einer und die Eigenzeit ist unabhängig vom Bezugssystem, also ein Skalar.

Die Komponenten des Vektors \mathbf{a} sind nicht alle unabhängig, denn die Länge von \mathbf{u} ist konstant gleich Eins. Folglich gilt

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (5.16)$$

Die 4-Beschleunigung steht also senkrecht auf der 4-Geschwindigkeit. Damit hat \mathbf{a} nur drei unabhängige Komponenten. Da \mathbf{u} ein zeitartiger Vektor ist, ist \mathbf{a} immer raumartig.

Auch die 4-Beschleunigung \mathbf{a} hängt natürlich in einer bestimmten Art und Weise mit der in einem ausgewählten Inertialsystem Σ gemessenen *3-Beschleunigung* \vec{b} zusammen, welche als die zweite Ableitung der 3-Geschwindigkeit \vec{v} nach der Zeitkoordinate λ^t definiert ist. Um die Beziehung zu finden, leiten wir die Gleichung (5.12) nochmal nach der Eigenzeit τ ab,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \frac{d\gamma(\vec{v})}{d\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 0 \\ d\vec{v}/d\tau \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Dann benutzen wir $d\lambda^t/d\tau = u^t = \gamma(\vec{v})$. Also gilt

$$\mathbf{a} = \gamma(\vec{v}) \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda^t} = \gamma(\vec{v}) \frac{d\gamma(\vec{v})}{d\lambda^t} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma^2(\vec{v}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{b} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Die 4-Beschleunigung \mathbf{a} besitzt also einen Anteil, der in Richtung der 3-Beschleunigung \vec{b} zeigt, und einen Anteil, der in Richtung der 3-Geschwindigkeit \vec{v} zeigt. Für den Vorfaktor gilt

$$\gamma(\vec{v}) \frac{d\gamma(\vec{v})}{d\lambda^t} = \gamma^4(\vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{b}, \quad (5.19)$$

wie man durch Einsetzen der Definition (5.12) leicht nachprüfen kann. Für die 4-Beschleunigung erhalten wir also den etwas komplizierteren Ausdruck

$$\mathbf{a} = \gamma^4(\vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma^2(\vec{v}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{b} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Damit können wir so nicht viel anfangen. Es gibt aber eine spezielle Situation, in der sich der Ausdruck für \mathbf{a} erheblich vereinfacht. Und zwar geschieht dies dann, wenn wir uns im *momentanen Ruhesystem* des Teilchens befinden, also in dem Inertialsystem, in dem für ein bestimmtes Ereignis auf der Weltlinie $\vec{v} = 0$ gilt. Dann ist $\gamma(\vec{v}) = 1$ und folglich

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{b} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Im momentanen Ruhesystem stellen die räumlichen Komponenten der 4-Beschleunigung also die gewöhnliche 3-Beschleunigung dar. Da \mathbf{a} ein Tensor ist, können wir auch sagen, dass sich der etwas kompliziertere 4-Vektor (5.20) im Bezugssystem eines beliebigen Beobachters aus dem einfachen 4-Vektor (5.21) durch eine Lorentz-Transformation aus dem momentanen Ruhesystem des Teilchens in das gewünschte Bezugssystem ergibt, also durch eine Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Der etwas komplizierte Ausdruck (5.20) ergibt sich also aus der Forderung, dass \mathbf{a} ein Tensor erster Stufe sein soll.

Nun ist der Ausdruck (5.20) für die 4-Beschleunigung aber gar nicht weiter interessant. Viel interessanter ist die Tatsache, dass wir aus dem stets raumartigen Vektor \mathbf{a} einen Skalar bilden können, nämlich

$$g = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \Rightarrow g = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = |\vec{b}| \quad \text{für } \vec{v} = 0. \quad (5.22)$$

Der Skalar g ist also der Betrag der 3-Beschleunigung \vec{b} im momentanen Ruhesystem. Ihm kommt eine besondere physikalische Bedeutung zu.

Nehmen wir an, wir selbst bewegen uns entlang der Weltlinie in einem Raumschiff, das hin und wieder seine Triebwerke einschaltet und beschleunigt. Dann spüren wir natürlich die Beschleunigung als eine Trägheitskraft. Da wir uns andererseits stets in unserem eigenen Ruhesystem befinden, für uns also in jedem Moment $\vec{v} = 0$ ist, ist es genau die 3-Beschleunigung \vec{b} in diesem Ruhesystem, die wir spüren, und deren Betrag durch den Skalar g gegeben ist. Also ist der Skalar g genau die Beschleunigung, die ein mitbewegter Beobachter *spürt*.

Die **4-Beschleunigung** ist ein raumartiger Vektor, der senkrecht auf der 4-Geschwindigkeit steht. Sein Betrag gibt die Beschleunigung an, die ein mitreisender Beobachter als Trägheitskraft spürt.

Um einem Skalar eine physikalische Bedeutung zuzuordnen, sind wir hier genauso vorgegangen wie bereits bei der Definition von Längen und Zeitspannen, sowie der Herleitung des Dopplereffektes. Da wir wissen, dass die Größe g ein Skalar ist, können wir sie in jedem Inertialsystem auswerten. Indem wir dies in einem speziellen Inertialsystem tun, nämlich dem momentanen Ruhesystem, erhalten wir einen speziellen Ausdruck für g , den wir physikalisch interpretieren können. Auf diese Weise haben wir dem Skalar g eine physikalische Messgröße zugeordnet, in diesem Fall die von einem mitbewegten Beobachter festgestellte Beschleunigung, die er mit einem geeigneten, ebenfalls mitbewegten Messgerät jederzeit messen kann.

Aufgabe 5.5 Wir nennen eine Bewegung *gleichmäßig beschleunigt*, wenn die Bewegung in eine Raumrichtung erfolgt und g konstant ist. Man bestimme die Weltlinie $\lambda(\tau)$, parametrisiert durch die Eigenzeit τ , eines in x -Richtung gleichmäßig beschleunigten Teilchens.

Aufgabe 5.6 Eine ringförmige Raumstation mit Radius r rotiert mit der Kreisfrequenz ω , wobei beides in einem Inertialsystem Σ gemessen wurde. Welche Beschleunigung g spürt ein Astronaut, wenn er auf der Außenwand des Ringes steht? Was passiert im Limes $r\omega \rightarrow 1$?

Das freie Teilchen

Wir wollen nun die Bewegung eines *freien Teilchens* in der Raumzeit beschreiben. Ein freies Teilchen ist eines, auf das keine Kraft wirkt, und das sich deshalb auf einer geraden Weltlinie bewegt. Wir wollen diese Tatsache aus einer geeignet gewählten Bewegungsgleichung ableiten, die wir später verallgemeinern können. Das klingt zunächst trivial, und das ist es auch, aber es ist eine sehr nützliche Vorüberlegung, um später die Bahnen von Teilchen im elektromagnetischen Feld, und noch später im Gravitationsfeld berechnen zu können.

Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Gerade zu definieren, und es ist nicht auf Anhieb offensichtlich, dass beide immer äquivalent sind. Einerseits können wir das Wort "Gerade" wörtlich nehmen. Eine Gerade ist eine Kurve, die geradeaus verläuft. Das klingt zunächst tautologisch, ist aber eine mathematisch wohldefinierte Aussage. Geradeaus heißt, dass sich die Richtung, also der normierte Tangentialvektor der Kurve, entlang der Kurve nicht ändert.

Sei also $\mathbf{x}(\tau)$ eine Eigenzeit-Parameterdarstellung einer zeitartigen Weltlinie, also das, was wir bis jetzt immer $\lambda(\tau)$ genannt haben. Wir ändern die Bezeichnung nur, damit später die Formeln so ähnlich aussehen wie die in der klassischen Mechanik. Dann bewegt sich das Teilchen gleichförmig genau dann, wenn

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = 0. \quad (5.23)$$

Eine zeitartige Gerade ist also die Weltlinie eines gleichförmig, mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Teilchens. Wir können (5.23) als die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen betrachten. Wir geben $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ als Anfangsbedingungen vor, wobei $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}$ ein positiver zeitartiger Einheitsvektor sein muss, und $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ ein beliebiges Ereignis ist. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.23) gegeben durch

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{u}_0. \quad (5.24)$$

Es gibt aber noch eine ganz andere Möglichkeit, eine Gerade zu definieren. Im Euklidischen Raum ist eine Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Wegen der anderen Signatur der Lorentz-Metrik ist es zunächst alles andere als offensichtlich, dass das gleiche auch im Minkowski-Raum gilt. Wir wollen aber nun zeigen, dass dem im wesentlichen so ist.

Es seien also $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ zwei Ereignisse, die zueinander zeitartig liegen. Es gibt dann, wie man sich leicht klar machen kann, mehr als eine, und sogar unendlich viele zeitartige Kurven, die \mathbf{x}_1 mit \mathbf{x}_2 verbinden. Ein paar solcher Kurven sind in Abbildung 5.1(b) dargestellt. Jede dieser Kurven können wir durch eine Funktion $\mathbf{x}(s)$ so parametrisieren, dass $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2$, wobei $s \in [s_1, s_2]$ ein festes Intervall ist. Natürlich ist der Kurvenparameter s dann nicht die Eigenzeit, denn die ist ja nicht für alle Kurven gleich, aber das ist im Moment auch nicht nötig.

Wir können nämlich trotzdem die Eigenzeit für jede einzelne Kurve $\mathbf{x}(s)$ berechnen, also die Zeitspanne, die eine Uhr messen würde, wenn sie sich entlang genau dieser Kurve von \mathbf{x}_1 nach \mathbf{x}_2 bewegen würde. Genau das hatten wir in (5.8) getan. Die Eigenzeit ist also ein *Funktional* \mathcal{S}

der Kurve $\mathbf{x}(s)$, und zwar

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}(\cdot)] = \alpha \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{-\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}} = \alpha \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}. \quad (5.25)$$

Da wir dies später benötigen, haben wir hier ein Konstante α eingeführt, von der wir aber im Moment annehmen können, sie sei gleich Eins. Dann definiert \mathcal{S} die Kurvenlänge, ansonsten ein Vielfaches davon. Das ändert nichts daran, dass die Kurven extremaler Länge genau diejenigen sind, für die das Funktional \mathcal{S} *stationär* ist.

Da es sich dabei um ein Standardproblem aus der klassischen Mechanik handelt, brauchen wir nicht näher darauf eingehen, wie es zu lösen ist. Wir können die *Wirkung* (5.25) als ein *Zeitintegral* einer *Lagrange-Funktion* auffassen, wobei Wirkung jetzt für Kurvenlänge, Zeit für Kurvenparameter steht, und die Lagrange-Funktion durch folgenden Ausdruck als Funktion des Ereignisses $\mathbf{x}(s)$ und seiner Ableitung $\dot{\mathbf{x}}(s) = d\mathbf{x}/ds$ nach dem Kurvenparameter gegeben ist,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \alpha \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \alpha \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}. \quad (5.26)$$

Der Punkt bezeichnet im folgenden immer die Ableitung nach dem Kurvenparameter, und wir kehren an dieser Stelle zur Indexnotation zurück, denn diese erweist sich gleich als ein wenig nützlicher als die abstrakte Vektornotation.

Gesucht sind jetzt diejenigen Kurven, für die das gegebene Funktional extremal wird. Natürlich wissen wir, dass das genau dann der Fall ist, wenn die *Euler-Lagrange-Gleichungen* erfüllt sind, also

$$\frac{d}{ds} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}^\mu} = \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}. \quad (5.27)$$

Hier ist die Indexnotation nützlich, denn das Funktional muss bezüglich aller vier Koordinatenfunktionen $x^\mu(s)$ stationär sein. Setzen wir die Lagrange-Funktion (5.26) ein, so wird die rechte Seite Null, denn \mathcal{L} hängt gar nicht explizit von x^μ ab, sondern nur von der Ableitung \dot{x}^μ . Auf der linken Seite ergibt sich

$$-\alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} \right) = 0. \quad (5.28)$$

In der Klammer steht offenbar ein Vektor, der proportional zum Tangentialvektor \dot{x}^μ ist. Solange dieser Vektor zeitartig ist, ist die Wurzel eine positive reelle Zahl. Andererseits sehen wir leicht, dass es sich um einen Einheitsvektor handelt, denn

$$\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\rho \dot{x}_\rho}} = \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu} = -1. \quad (5.29)$$

Nun gibt es aber nur genau einen solchen Einheitsvektor, der proportional zum Tangentialvektor der Weltlinie ist. Es ist die 4-Geschwindigkeit u^μ . Offenbar können wir sie, ohne vorher die

Eigenzeit τ als Kurvenparameter einzuführen, auch ganz allgemein durch die Formel

$$u^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} \quad (5.30)$$

definieren, wobei \dot{x}^μ die Ableitung der Weltlinie nach irgendeinem Kurvenparameter s ist. Für $s = \tau$ stimmt das offenbar mit der Definition (5.9) überein. Andererseits folgt aus (5.1) sofort, dass sich die rechte Seite von (5.30) unter eine Reparametrisierung der Kurve nicht ändert. Also wird durch diese Formel stets derselbe 4-Vektor u^μ definiert, unabhängig vom der Parametrisierung.

Aus dem *Wirkungsprinzip* $\delta S[\mathbf{x}(\cdot)] = 0$ folgt also dieselbe Bewegungsgleichung wie aus der Definition (5.23) eine Geraden. In beiden Fällen muss die 4-Geschwindigkeit entlang der Weltlinie konstant sein, also das Teilchen in der Raumzeit geradeaus fliegen. Und was die Geometrie der Raumzeit betrifft, so können wir den Schluss ziehen, dass auch im Minkowski Raum die zeitartigen Geraden diejenigen Kurven sind, für die die Kurvenlänge extremal wird.

Freie Teilchen bewegen sich auf zeitartigen Geraden durch die Raumzeit, und dies sind die Kurven **extremaler Eigenzeit**.

Aufgabe 5.7 Wird die Eigenzeit für eine zeitartige Gerade minimal oder maximal? Wie hängt diese Tatsache mit dem Zwillingsparadoxon aus Abbildung 2.4 zusammen? Gilt ein ähnliches Extremalprinzip auch für raumartige Geraden? Und für lichtartige? Und wenn ja, sind die Geraden dann Minima oder Maxima?

Aufgabe 5.8 Man zeige, dass das Funktional (5.25) von der gewählten Parametrisierung der Kurve unabhängig ist, sich sein Wert also nicht ändert, wenn wir $\mathbf{x}(s)$ durch $\mathbf{x}(\tilde{s})$ ersetzen, wobei \tilde{s} eine genügend glatte, umkehrbare Funktion von s ist. Das gleiche zeige man für die rechte Seite der Gleichung (5.30).

Aufgabe 5.9 Zwei Uhren treffen sich. Beim Vorbeiflug werden beide auf Null gestellt. Später treffen sie sich noch einmal. Die eine Uhr hat sich in der Zwischenzeit gleichförmig bewegt, die andere wurde hin und wieder beschleunigt. Auf welcher Uhr ist mehr Zeit vergangen?

Das Wirkungsprinzip

Wir können also die Bewegungsgleichungen eines freien Teilchens als diejenigen Kurven identifizieren, für die ein bestimmtes Funktional stationär ist. Genau so sind auch die Bewegungsgleichungen von Teilchen im *Lagrange-Formalismus* der klassischen Mechanik definiert. Gibt es da einen Zusammenhang? Das ist nicht sofort offensichtlich, denn in der klassischen Mechanik ist das Wirkungsfunktional gewöhnlich als das Zeitintegral über die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie definiert. Hier dagegen haben wir es als Kurvenlänge in der Raumzeit eingeführt, also als ein geometrisches Objekt.

Wir werden aber nun zeigen, dass es sich tatsächlich um dasselbe Wirkungsprinzip handelt. Wir müssen nur die Wirkung ein wenig umschreiben, um die Beziehung zu erkennen. Zunächst machen wir von der Tatsache Gebrauch, dass das Funktional (5.25) von der gewählten Parametrisierung der Kurve unabhängig ist. Wir können also für jede Kurve, die wir in das Funktional einsetzen, eine beliebige Parametrisierung wählen.

Sei nun Σ ein festes Inertialsystem und t die Zeitkoordinate in Σ . Dann können wir $s = t$ setzen, also die Zeitkoordinate in Σ als Kurvenparameter verwenden. Wenn wir eine Raum-Zeit-Aufspaltung vornehmen, und die Ereignisse an den Endpunkten der Kurve mit $\mathbf{x}_1 = (t_1, \vec{x}_1)$ und $\mathbf{x}_2 = (t_2, \vec{x}_2)$ bezeichnen, so gilt für die Weltlinie

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\vec{x}}(t) \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ und $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$. Der Punkt bezeichnet nun die gewöhnliche Zeitableitung im Inertialsystem Σ . Neben die Eigenzeit ist dies eine andere spezielle Wahl des Kurvenparameters. Allerdings ist eine solche Wahl immer nur bezüglich eines fest gewählten Inertialsystems möglich, während die Eigenzeit ein Parameter ist, der unabhängig vom Bezugssystem definiert ist.

Was nun folgt, gilt so also nur für einen bestimmten Beobachter, nämlich für einen, der relativ zu Σ ruht. Ein solcher Beobachter sieht, dass sich das Teilchen auf einer Bahn $\vec{x}(t)$ bewegt, das heißt für ihn ist einfach der Ort als eine Funktion der Zeit vorgegeben. Wenn wir diese Parametrisierung verwenden, um das Funktional (5.25) zu berechnen, so erhalten wir

$$S[\vec{x}(\cdot)] = \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t)}. \quad (5.32)$$

Das ist aber fast schon das gewöhnliche, aus der Mechanik bekannte Wirkungsfunktional. Es ist jetzt ein normales Zeitintegral, und der Integrand ist eine Funktion des Ortes und der Geschwindigkeit, oder genau genommen in diesem Fall nur der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ des Teilchens. Interessant ist nun der Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten, also der Fall eines Teilchens, das sich relativ zum Inertialsystem Σ nur langsam bewegt, im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Dann können wir die Lagrange-Funktion entwickeln und erhalten

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = \alpha \sqrt{1 - \vec{v}^2} \approx \alpha - \frac{\alpha}{2} \vec{v}^2, \quad (5.33)$$

wobei wir Terme der Ordnung v^4 vernachlässigt haben. Jetzt brauchen wir nur noch über die Konstante α zu verfügen, um daraus die bekannte Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen zu machen. Setzen wir nämlich $\alpha = -m$, wobei m die Masse des Teilchens ist, so folgt

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = -m \sqrt{1 - \vec{v}^2} \approx \frac{m}{2} \vec{v}^2 - m. \quad (5.34)$$

Das ist bis auf eine Konstante die klassische *kinetische Energie* des Teilchens. Wenn wir wollen, können wir sogar die Konstante m als die *potentielle Energie* des Teilchens interpretieren. Sie hat natürlich, da sie konstant ist, keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichung.

Die relativistische **Wirkung** eines freien Teilchens ist die Eigenzeit seiner Weltlinie, multipliziert mit der negativen Masse des Teilchens.

Wenn allerdings die Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar ist, dann ist die Lagrange-Funktion nicht mehr durch den klassischen Ausdruck für die kinetische Energie gegeben. Der Grund für diese Abweichung ist, dass eine solche Lagrange-Funktion nicht dem Relativitätsprinzip genügen würde. Sie wäre nicht in jedem Inertialsystem von der gleichen Form.

Aufgabe 5.10 Aus der Darstellung (5.25) ist das sofort evident, denn dort steht auf der rechten Seite das Integral über einen Skalar entlang der Kurve. Diese Definition ist also offenbar in allen Bezugssystemen die gleiche. Nun haben wir aber auch die äquivalente Definition (5.32), die sich explizit auf ein bestimmtes Inertialsystem bezieht. Kann man dieser Definition auch ansehen, dass sie in jedem Inertialsystem gleich lautet? Man vergleiche zum Beispiel die Lagrange-Funktion (5.33) in irgendeinem Inertialsystem mit der entsprechenden Definition im momentanen Ruhesystem des Teilchens. Warum ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Wirkung?

Impuls und Energie

Wir wollen nun noch kurz in dem festen Inertialsystem Σ bleiben, bezüglich dessen wir die Raum-Zeit-Aufspaltung durchgeführt haben, und ein paar andere Grundbegriffe der Mechanik einführen. Wir können dabei zunächst völlig vergessen, was es mit der Raumzeit und dem Minkowski-Raum auf sich hat. Wir betrachten einfach die Funktion (5.34),

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = -m \sqrt{1 - \vec{v}^2}, \quad (5.35)$$

als eine "vom Himmel gefallene" Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen im dreidimensionalen Raum. Damit \mathcal{L} definiert ist, muss natürlich die Geschwindigkeit \vec{v} kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein. Wir lassen also nur solche Bahnen zu.

Ansonsten behandeln wir die gegebene Lagrange-Funktion jetzt wie eine gewöhnliche, nicht-relativistische. Zum Beispiel können wir sie verwenden, um den *Impuls* des Teilchens zu definieren. Der ist wie gewohnt gegeben durch

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} = m \gamma(\vec{v}) \vec{v}. \quad (5.36)$$

Der Impuls eines freien Teilchens ist also nicht, wie in der Newtonschen Mechanik, durch $m \vec{v}$ gegeben. Statt dessen tritt noch ein Gamma-Faktor auf, der bewirkt, dass der Impuls beliebig groß

wird, wenn sich die Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens der Lichtgeschwindigkeit nähert. Offenbar ist das also der Grund dafür, dass wir ein Teilchen nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen können. Wir würden dafür unendlich viel Impuls benötigen.

Wir können auch die *Energie* eines freien Teilchens ausrechnen. Auch die leitet sich nämlich aus der Lagrange-Funktion ab. Sie ist durch die *Hamilton-Funktion* definiert, und für die wiederum gilt

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{m \vec{v}^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + m \sqrt{1 - \vec{v}^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} = m \gamma(\vec{v}). \quad (5.37)$$

Um zu sehen, dass für kleine Geschwindigkeiten wieder die bekannte Formel gilt, entwickeln wir diesen Ausdruck wieder in \vec{v} , und vernachlässigen Terme der Ordnung v^4 und höher,

$$E \approx m + \frac{m}{2} \vec{v}^2. \quad (5.38)$$

Auch hier tritt wieder m als konstante potentielle Energie auf, und zusätzlich erhalten wir die bekannte nicht-relativistische kinetische Energie. Man beachte, dass das relative Vorzeichen von (5.34) abweicht, was in der klassischen Mechanik gerade den Unterschied zwischen kinetischer und potentieller Energie definiert, wie sie üblicherweise in der Lagrange- und der Hamilton-Funktion auftreten.

Diese Näherung gilt natürlich nur für kleine Geschwindigkeiten. Wenn sich \vec{v} der Lichtgeschwindigkeit nähert, wird nicht nur der Impuls, sondern auch die Energie beliebig groß. Um ein Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, bräuchten wir demnach auch unendlich viel Energie. Außerdem folgt aus (5.36) und (5.37) noch folgende Beziehung zwischen Energie und Impuls,

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \gamma^2(\vec{v}) - m^2 \gamma^2(\vec{v}) \vec{v}^2 = m^2. \quad (5.39)$$

Auch diese Beziehung geht für kleine Impulse wieder in die bekannte Relation über, nämlich

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \approx m + \frac{1}{2m} \vec{p}^2. \quad (5.40)$$

Aufgabe 5.11 Man setze in den Gleichungen (5.35-5.40) die Lichtgeschwindigkeit c wieder ein, so dass die Größen in den üblichen physikalischen Einheiten dargestellt werden. Wie groß ist die Energie eines ruhenden Teilchens der Masse m ?

Wir können uns nun folgende Frage stellen. Haben die Größen \vec{p} und E , die wir unter Bezugnahme auf das Inertialsystem Σ definiert haben, auch irgendeine *kovariante*, also vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung? Ist vielleicht E ein Skalar? Oder ist der 3-Vektor \vec{p} die räumliche Komponente eines 4-Vektors, also eines Tensors erster Stufe?

Sicher ist E kein Skalar, denn der Wert von E hängt von der Relativbewegung des Teilchens zum Inertialsystem Σ ab, also nimmt E in verschiedenen Inertialsystemen verschiedene Werte

an. Betrachten wir aber die Gleichungen (5.36) und (5.37) genauer, und erinnern wir uns an die Definition der 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} in (5.12), so finden wir, dass durch

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = m \mathbf{u}, \quad (5.41)$$

ein 4-Vektor definiert ist. Denn \mathbf{u} ist ein 4-Vektor und m ist ein Skalar. Und was schließen wir daraus? Die in einem Inertialsystem Σ gemessene *Energie* E eines Teilchens, sowie dessen 3-*Impuls* \vec{p} , bilden die Komponenten des 4-*Impulses* \mathbf{p} . Zudem ist dieser 4-Impuls auch durch Masse mal 4-Geschwindigkeit gegeben, also völlig analog zum Impuls in der Newtonschen Mechanik.

Wir können also das Inertialsystem Σ wieder verlassen, denn wir haben jetzt eine *kovariante* Definition der Begriffe Impuls und Energie. Sie sind in einem einzigen Objekt vereint, nämlich dem 4-Impuls \mathbf{p} , und dies ist wieder ein Tensor. Und in diesem Zusammenhang wird auch die Beziehung (5.39) zu einer geometrischen Eigenschaft des 4-Vektors \mathbf{p} . Dieselbe Beziehung folgt auch aus (5.41) und der Tatsache, dass \mathbf{u} ein positiver zeitartiger Einheitsvektor ist. Es gilt nämlich

$$\mathbf{p} = m \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2. \quad (5.42)$$

In der relativistischen Physik ist der Impuls eines Teilchens also genau wie die Geschwindigkeit ein 4-Vektor, und als solcher ohne Bezugnahme auf eine spezielles Inertialsystem als Tensor definiert.

Der **4-Impuls** setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie und dem 3-Impuls und ergibt sich aus dem Produkt von Masse und 4-Geschwindigkeit.

Tatsächlich können wir den 4-Impuls auch direkt aus der kovarianten Lagrange-Funktion (5.26) ableiten. Wenn wir dies nämlich als eine gewöhnliche Lagrange-Funktion auffassen, und den Kurvenparameter s also die "Zeitvariable" interpretieren, dann ergibt sich der Impuls in der kanonischen Art und Weise als die Ableitung der Lagrange-Funktion nach der "Geschwindigkeit", also

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} = m u_\mu \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m \mathbf{u}. \quad (5.43)$$

Hier haben wir die Formel (5.30) für die 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} verwendet. Der 4-Impuls \mathbf{p} ist also der kanonische Impuls des Teilchens, der sich aus der Lagrange-Funktion (5.26) ergibt. Auch das ist natürlich wieder nichts anderes als die *kovariante* Formulierung unserer ursprünglichen Definition (5.36) des 3-Impulses, bei der wir uns explizit auf ein bestimmtes Inertialsystem bezogen haben.

Das interessante an dieser kovarianten Definition ist nun, dass sie als vierte Komponente des Impulses die Energie liefert, also die Hamilton-Funktion. Wie können wir das verstehen? Wir erinnern uns, dass in der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik Ort und Impuls zueinander kanonisch konjugiert sind. Nun kann sich *Ort* aber immer nur auf ein bestimmtes Inertialsystem beziehen. Eine Aussage wie die eben gemachte kann also nicht unabhängig vom Bezugssystem

sein. Wenn wir eine Aussage über *Orte* machen, und diese unabhängig vom Bezugssystem formulieren wollen, dann, so wissen wir inzwischen, müssen wir zuerst ein passende Aussage finden, in der des Wort *Zeit* vorkommt.

Wenn wir Glück haben, können wir die beiden Aussagen dann zu einer *kovarianten* Aussage kombinieren. Im Grunde war das die Philosophie in Kapitel 2, als wir die Grundideen der Relativitätstheorie herausgearbeitet haben. Eine Aussage wie "das Licht hat 300km zurück gelegt" hat keine vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung, ebensowenig wie "es ist 1/1000sec vergangen". Die kombinierte Aussage "in 1/1000sec hat das Licht 300km zurück gelegt" ist aber eine, die vom Bezugssystem unabhängig ist. Sie ist in jedem Inertialsystem richtig.

Genau so ist es hier. In der klassischen Mechanik sind Ort und Impuls zueinander konjugierte Größen, das heißt zum Beispiel, dass für sie die kanonischen Poisson-Klammern gelten, oder dass in der Quantenmechanik die kanonischen Vertauschungsrelationen gelten. Andererseits sind aber auch Zeit und Energie zueinander konjugiert. Die Zeitentwicklung wird durch die Hamilton-Funktion generiert, so wie die räumlichen Verschiebungen durch den Impuls generiert werden. In der Quantenmechanik kennen wir die Energie-Zeit-Unschärfe. Wenn also Ort und Zeit zu einem Begriff *Ereignis* vereint sind, kommen wir gar nicht umhin, auch die Begriffe Impuls und Energie zu einem Begriff zu vereinen, den *4-Impuls*.

Es taucht dabei aber noch ein anderes Problem auf. In der Hamiltonschen oder Lagrangeschen Formulierung der Mechanik spielt die Zeitkoordinate eine besondere Rolle. Der *Zustand* eines Teilchens wird durch Ort und Impuls *zu einer gegebenen Zeit* bestimmt, und die Wirkung ist das *Zeitintegral* einer Lagrange-Funktion, die wiederum von Ort und Geschwindigkeit abhängt. Um zu einer kovarianten Formulierung der Mechanik zu gelangen, müssen wir diese Ungleichbehandlung von Ort und Zeit zunächst auflösen. Und wie das geht, haben wir bereits gesehen.

Wie schrieben das Wirkungsfunktional, aus dem wir alles ableiten, gar nicht als ein Integral über eine *Zeitkoordinate* t in einem Inertialsystem, sondern in (5.25) als ein Integral über einen willkürlich gewählten *Kurvenparameter* s . In der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik übernimmt dieser Parameter die Rolle der *kanonischen Zeit*, während die eigentlich Zeitkoordinate $t(s) = x^t(s)$ zu einer Funktion davon wird, die den räumlichen Koordinaten $\vec{x}(t) = x^m(s) \vec{e}_m$ völlig gleichberechtigt ist. Daraus ergibt sich dann ganz automatisch eine kovariante Definition der Wirkung, der Lagrange-Funktion, und schließlich auch des 4-Impulses (5.43).

Um diesen Umstand deutlich zu machen, verwenden wir auch den Punkt, um die Ableitung nach dem Kurvenparameter s zu bezeichnen. In einer relativistischen Hamiltonschen Mechanik ist also der Zustand eines Teilchens nicht durch Ort $\vec{x}(t)$ und 3-Impuls $\vec{p}(t)$ zu einer bestimmten *Zeit* t gegeben, sondern durch das Ereignis $\mathbf{x}(s)$ und den 4-Impuls $\mathbf{p}(s)$, an einer bestimmten Stelle s auf der Weltlinie. Und das, was wir in der klassischen Mechanik die *Zeitentwicklung* nennen, die durch die Bewegungsgleichungen bestimmt wird, ist nun die Evolution der Funktionen $\mathbf{x}(s)$ und $\mathbf{p}(s)$ als Funktion von s . Was das genau heißt, und was es bedeutet, dass s ja nur ein Parameter ist, der gar keine physikalische Bedeutung hat, werden wir gleich noch ein wenig genauer diskutieren.

In einem relativistischen Wirkungsprinzip übernimmt der **Kurvenparameter** die Rolle der kanonischen Zeitkoordinate, und die physikalische **Zeit** wird zu einer dem **Ort**

gleichgestellten dynamischen Variablen.

Das Einbein

Bevor wir diesen Zusammenhang näher untersuchen, wollen wir noch eine kleine Vereinfachung vornehmen, die uns den Umgang mit der relativistischen Lagrange-Funktion etwas erleichtert. Für ein freies Teilchen der Masse m gilt also

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -m \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}, \quad (5.44)$$

wobei der Punkt die Ableitung nach einem frei wählbaren Kurvenparameter s bezeichnet. Das Wirkungsfunktional erhalten wir, wenn wir diese Lagrange-Funktion entlang der Weltlinie, also über s integrieren. Das Auftauchen der Wurzel macht den Umgang mit dieser Funktion oft ein wenig unhandlich. So ist es zum Beispiel nicht möglich, die Wirkung für eine Kurve zu berechnen, die nicht überall zeitartig ist. Wir müssen also, wenn wir die Bewegungsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip ableiten wollen, *a priori* annehmen, dass nur zeitartige Weltlinien in Frage kommen.

Wir können dies aber mit einem kleinen Trick vermeiden. Der Trick stammt übrigens aus der *Stringtheorie*, auf die wir hier aber verständlicherweise nicht näher eingehen wollen. Jedenfalls erlaubt er es dort überhaupt erst, in unkomplizierter Weise Bewegungsgleichungen aufzustellen. Genau diesen Zweck erfüllt er auch hier. Die Idee ist, zusätzlich zu der eigentlichen Weltlinie, gegeben durch eine Funktion $\mathbf{x}(s)$, noch eine weitere *Hilfsvariable* $\zeta(s)$ einzuführen, die auch eine Funktion des Kurvenparameters s ist.

Wir wollen für diese Hilfsvariable die etwas merkwürdige und an dieser Stelle völlig unmotivierte Bezeichnung *Einbein* benutzen. Die Bezeichnung ergibt sich aus einer Analogie in der allgemeinen Relativitätstheorie, auf die wir hier auch verständlicherweise noch nicht eingehen können. Wir könnten ζ auch *Skalierungsfaktor* oder *Multiplikator* nennen, aber warum nicht einfach ein neues Wort erfinden, auch wenn wir dessen tieferen Sinn erst sehr viel später erfassen werden.

Der Trick besteht nun darin, dass wir durch Einführung einer zusätzlichen Variablen die Wurzel aus (5.44) eliminieren können. Betrachten wir dazu die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\zeta, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\zeta} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \frac{\zeta}{2} m^2, \quad (5.45)$$

wobei wie den Wertebereich von ζ auf die positive reelle Achse einschränken. Es gilt also stets $\zeta > 0$. Die Wirkung ist noch immer als das Integral der Lagrange-Funktion gegeben, wird jetzt aber zu einem Funktional sowohl der Weltlinie $\mathbf{x}(s)$ als auch des Einbeins $\zeta(s)$,

$$S[\zeta(\cdot), \mathbf{x}(\cdot)] = \int_{s_1}^{s_2} ds \mathcal{L}(\zeta(s), \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) \quad (5.46)$$

Um zu zeigen, dass dieses Wirkungsprinzip zu dem vorher definierten äquivalent ist, müssen wir zeigen, dass wir die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen für $\zeta(s)$ lösen können, und wenn wir die Lösung dann wieder in das Funktional einsetzen, muss sich das ursprüngliche Funktional wieder ergeben, das nur von der Weltlinie $\mathbf{x}(s)$ abhängt.

Das ist nicht schwierig, denn die Lagrange-Funktion hängt diesmal nur von $\zeta(s)$ und nicht von $\dot{\zeta}(s)$ ab. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet demnach

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \zeta^2 m^2 = 0. \quad (5.47)$$

Offenbar besitzt diese Gleichung genau dann eine positive Lösung, wenn \dot{x}^μ zeitartig ist, und in diesem Fall ist die Lösung sogar eindeutig, nämlich

$$\zeta = \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = \frac{1}{m} \dot{\tau}. \quad (5.48)$$

Das Einbein ist also, bis auf einen Faktor $1/m$, durch die Ableitung der Eigenzeit nach dem Kurvenparameter s gegeben. Wir können sagen, dass das Einbein angibt, *wie schnell* die Weltlinie als Funktion des Kurvenparameters s durchlaufen wird. Wir werden diese Bedeutung von ζ später noch näher erläutern.

Wenn wir das Ergebnis wieder in (5.45) einsetzen, und vorsichtig mit den Vorzeichen umgehen, dann erhalten wir

$$\mathcal{L}(\zeta, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\zeta} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \frac{\zeta}{2} m^2 = \frac{m}{2} \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} - \frac{m}{2} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = -m \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}. \quad (5.49)$$

Das ist aber wieder die ursprüngliche Lagrange-Funktion, womit der Beweis erbracht wäre, dass das neue Wirkungsprinzip, mit dem Einbein als Hilfsfunktion, zu dem vorher definierten äquivalent ist.

Der Vorteil des modifizierten Wirkungsprinzip ist offenbar, dass keine lästige Wurzel mehr vorkommt. Das Funktional selbst ist also jetzt für beliebige Kurven $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ und beliebige Einbeine $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert. Die resultierenden *Lösungen* der Bewegungsgleichungen sind aber noch immer nur die zeitartigen Geraden. Denn wir müssen nun sowohl die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{x}(s)$, also auch die für $\zeta(s)$ lösen. Letztere haben wir gerade hergeleitet, und sie ergab sich zu (5.47). Offenbar fixiert diese Gleichung nicht nur den Wert von ζ , sondern verlangt auch, dass die Kurve $\mathbf{x}(s)$ zeitartig ist, denn sonst hat die Gleichung keine Lösung.

Zusätzlich müssen wir die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{x}(s)$ lösen, die wir unmittelbar aus (5.45) ablesen können,

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{\zeta} \right) = 0. \quad (5.50)$$

Es treten also auch in der Bewegungsgleichungen keine lästigen Wurzeln mehr auf. Wir erhalten dafür ein System von gekoppelten Differentialgleichungen, nämlich

$$\dot{x}^\mu = \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} \dot{x}^\mu, \quad \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -\zeta^2 m^2 \quad (5.51)$$

Wir können das aber noch vereinfachen, indem wir auch hier wieder den kanonischen Impuls einführen. Er ist jetzt wie folgt gegeben

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\dot{x}_\mu}{\zeta}, \quad (5.52)$$

was aber wegen der zweiten Gleichung in (5.51) das gleiche ist wie (5.43), wenn wir das Einbein ζ eliminieren. Das muss natürlich so sein, denn dann wird ja aus der neuen Lagrange-Funktion wieder die alte.

Wenn wir nun $x^\mu(s)$, $p^\mu(s)$ und $\zeta(s)$ als insgesamt neun unabhängige Funktionen des Kurvenparameters s betrachten, dann können wir die Bewegungsgleichungen für das freie Teilchen schließlich wie folgt schreiben,

$$\dot{x}^\mu = \zeta p^\mu, \quad \dot{p}^\mu = 0, \quad p^\mu p_\mu = -m^2. \quad (5.53)$$

Wir können diese sogar wie auch als Hamiltonsche Bewegungsgleichungen schreiben, wenn die die Hamilton-Funktion wie üblich definieren. Dabei müssen wir aber beachten, dass das, was normalerweise die Zeitkoordinate ist, jetzt der Kurvenparameter s ist. Es gilt also

$$\mathcal{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \frac{\zeta}{2} (p^\mu p_\mu + m^2). \quad (5.54)$$

Die ersten beiden Gleichungen in (5.53), welche die Entwicklung der Variablen x^μ und p^μ nach dem Kurvenparameter s definieren, lauten dann

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} = \zeta p^\mu, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (5.55)$$

Wie wir bereits weiter oben argumentiert hatten, sind also x^μ und p_μ , also die Koordinaten des Ereignisses und die Komponenten des 4-Impulses, zueinander kanonisch konjugierte Variable. Zusätzlich zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen muss aber noch eine *Nebenbedingung* erfüllt sein, nämlich

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0. \quad (5.56)$$

Diese hat die merkwürdige Konsequenz, dass der Wert der Hamilton-Funktion \mathcal{H} für jeden physikalisch realisierbaren Zustand gleich Null ist. Die Hamilton-Funktion \mathcal{H} stellt also nicht, wie in der klassischen Mechanik, die Energie eines Zustands dar. Denn die ist ja, wie wir schon wissen, als eine der Komponenten des 4-Impulses gegeben und hängt vom Bezugssystem ab.

Eichfreiheit

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.55) haben aber noch eine weitere Eigenschaft, die wir aus der klassischen Mechanik nicht kennen. Dort tritt an einer Stelle noch immer das Einbein auf, aber sonst nirgends mehr. Auch die Hamilton-Funktion \mathcal{H} hängt von ζ ab. Offenbar ist es

so, dass die Bewegungsgleichungen allein die Entwicklung der Funktionen $x^\mu(s)$ und $p^\mu(s)$ gar nicht festlegen. Das ist erst dann der Fall, wenn wir zusätzlich die Funktion $\zeta(s)$ vorgeben, und dabei unterliegen wir keinen Einschränkungen, außer dass $\zeta(s)$ positiv sein muss und genügend glatt.

Mit anderen Worten, der Impuls p^μ legt zwar die Richtung der Weltlinie fest, aber nicht, wie schnell diese, als Funktion des Kurvenparameters s , durchlaufen wird. Offenbar korrespondiert die Freiheit, das Einbein $\zeta(s)$ als Funktion von s vorzugeben, mit der Freiheit, die Weltlinie als Funktion von s zu reparametrisieren. Die Bewegungsgleichungen bestimmen die Evolution der dynamischen Variablen x^μ und p^μ nur unvollständig, und zwar bis auf eine Transformation, die physikalisch redundant ist. Denn die Weltlinie selbst ist ja unter einer Reparametrisierung invariant.

Wenn eine solche Situation vorliegt, sprechen wir von einer *Eichfreiheit*. Wir kennen ein solches Phänomen aus der Elektrodynamik. Auch dort ist es so, dass die Zeitentwicklung der Potentiale sich nicht eindeutig aus den Anfangsbedingungen ergibt, sondern nur bis auf eine *Eichtransformation*. Die Reparametrisierungen der Weltlinie sind also in diesem Sinne Eichtransformationen. Dieselbe physikalische Weltlinie wird durch verschiedene Funktionen $x^\mu(s)$ beschrieben, genau wie in der Elektrodynamik dieselben Felder durch verschiedene Potentiale beschrieben werden können.

In den Bewegungsgleichungen äußert sich eine solche Eichfreiheit darin, dass dort eine frei wählbare Funktion, hier das Einbein $\zeta(s)$, vorkommt, deren Wahl die Parametrisierung der Weltlinie, aber nicht deren physikalische Eigenschaften beeinflusst. Unabhängig von der Wahl von $\zeta(s)$ ergibt sich immer dieselbe Weltlinie, nämlich eine durch die Anfangsbedingungen eindeutig festgelegte Gerade. Explizit lautet die Lösung der Gleichungen (5.53)

$$x^\mu(s) = x_0^\mu + f(s) p_0^\mu, \quad p^\mu(s) = p_0^\mu, \quad (5.57)$$

wobei x_0^μ und p_0^μ die Anfangswerte bei $s = 0$ sind, und die Funktion $f(s)$ durch $f(0) = 0$ und $\dot{f}(s) = \zeta(s)$ eindeutig fest liegt. Es besteht also ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Parametrisierung der Weltlinie, also der Funktion $f(s)$ und dem Einbein $\zeta(s)$. Die Parametrisierung der Weltlinie ist bis auf eine Verschiebung um eine Konstante durch das Einbein festgelegt.

In der Hamiltonschen Mechanik wird eine solche Eichfreiheit stets dadurch repräsentiert, dass die Hamiltonfunktion \mathcal{H} von einem oder mehreren freien Parameter abhängt. Hier ist das natürlich auch wieder das Einbein, das in (5.54) auf der rechten Seite erscheint. Der freie Parameter bewirkt, dass die Evolution, also hier die Entwicklung der dynamischen Variablen nach dem Kurvenparameter, nicht eindeutig fest liegt. Offenbar ist das Auftreten einer solchen Eichfreiheit der Preis, den wir dafür zahlen müssen, dass die das Wirkungsprinzip kovariant formulieren können.

Dann haben wir nämlich nur den Kurvenparameter s als Integrationsvariable zur Verfügung, um das Wirkungsfunktional zu definieren. Wir können nicht auf eine physikalische Variable, wie etwa die Zeitkoordinate t in einem festen Inertialsystem, zurück greifen. Wir können auch nicht die Eigenzeit wählen, denn diese wird ja durch die Wirkungsfunktion erst definiert. In einer relativistischen Mechanik treten deshalb Eichfreiheitsgrade dieser Art sehr häufig auf. Bei einer

genaueren Analyse¹ stellt man außerdem fest, dass zusammen mit solchen Eichfreiheiten immer auch Nebenbedingungen auftreten, dass also die dynamischen Variablen zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen noch weiteren Einschränkungen unterliegen.

Hier ist das die Bedingung, dass der 4-Impuls p^μ ein positiver zeitartiger Vektor der Länge m sein muss. Wir können aber hier nicht weiter auf diesen sehr allgemeinen Zusammenhang eingehen. Wichtig ist nur, uns zu merken, dass in einer relativistischen Mechanik eines Punktteilchen der Kurvenparameter s die Rolle der kanonischen Zeitvariablen, also der Integrationsvariablen in der Definition der Wirkung übernimmt, und dass wir dies bei den üblichen Definitionen von kanonischen Impulsen, der Hamilton-Funktion etc. berücksichtigen müssen, wenn wir die Bewegungsgleichungen kovariant formulieren müssen.

Natürlich können wir uns auch jederzeit in ein festes Inertialsystem begeben, und Impuls und Hamilton-Funktion in der üblichen Art und Weise definieren, wie in (5.36) und (5.37) dargestellt. Dann aber verlieren wir nicht nur die geometrische Interpretation dieser Größen, sondern müssen auch, wenn wir die Bewegungsgleichungen modifizieren und zum Beispiel Wechselwirkungen zwischen Teilchen beschreiben wollen, im Einzelfall nachprüfen, ob die Gleichungen noch immer dem Relativitätsprinzip genügen. Das ist nicht nötig, wenn wir bei der kovarianten Formulierung bleiben.

Aufgabe 5.12 *Wie muss das Einbein in (5.55) gewählt werden, damit der Kurvenparameter s zur Eigenzeit τ auf der Weltlinie wird? Wenn Σ ein Inertialsystem ist, wie muss das Einbein gewählt werden, damit der Kurvenparameter s mit der Zeitkoordinate t in Σ übereinstimmt?*

Masselose Teilchen

Schreiben wir noch einmal die kovariante Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen der Masse m auf,

$$\mathcal{L}(\zeta, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\zeta} \dot{\mathbf{x}}^\mu \dot{\mathbf{x}}_\mu - \frac{\zeta}{2} m^2, \quad (5.58)$$

sowie die sich daraus ergebenden Bewegungsgleichungen,

$$\dot{\mathbf{x}}^\mu = \zeta p^\mu, \quad \dot{p}^\mu = 0, \quad p^\mu p_\mu = -m^2. \quad (5.59)$$

Was daran auffällt ist, dass beides offenbar auch dann wohldefiniert ist, wenn wir $m = 0$ setzen. Das ist für die ursprüngliche Lagrange-Funktion (5.44) nicht der Fall, denn diese wäre identisch gleich Null. Es bereitet also jetzt gar keine Schwierigkeit, ein Teilchen mit der Masse $m = 0$ zu beschreiben. Seine Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\mathbf{x}}^\mu = \zeta p^\mu, \quad \dot{p}^\mu = 0, \quad p^\mu p_\mu = 0. \quad (5.60)$$

Alles, was wir bisher über die Bewegung des Teilchens gesagt haben, gilt noch immer, bis auf einen kleinen Unterschied. Die Weltlinie des Teilchens ist noch immer eine Gerade, aber der

Impuls p^μ ist jetzt *lichtartig*. Die Weltlinie ist demnach eine lichtartige Gerade. In der Relativitätstheorie ist es also möglich, dass ein Teilchen masselos ist. Und ein solches Teilchen hat eine besondere Eigenschaft.

Ein **masseloses** Teilchen bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit.

Kennen wir solche Teilchen vielleicht? Schließlich bewegt sich das Licht mit Lichtgeschwindigkeit, und aus der Quantenphysik wissen wir, dass es aus Teilchen besteht, den *Photonen*. Können wir also im Rahmen der Relativitätstheorie ein Photon auch als klassisches, punktförmiges Teilchen beschreiben? Um zu sehen, dass das tatsächlich sinnvoll ist, führen wir wieder ein Raum-Zeit-Aufspaltung durch und betrachten ein masseloses Teilchen aus der Sicht eines festen Inertialsystems. Dann gilt für den 4-Impuls offenbar

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad E = |\vec{p}|, \quad (5.61)$$

also die Energie durch den Betrag des Impulses gegeben ist. Das ist auch genau die Beziehung (5.40), wenn wir dort $m = 0$ setzen. Es gibt allerdings keine Beziehung mehr zwischen Energie, 3-Impuls, und der 3-Geschwindigkeit des Teilchens. Die ist nämlich immer gleich der Lichtgeschwindigkeit. Und es gibt auch keine wohldefinierte 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} mehr, denn ein lichtartiger Vektor kann nicht normiert werden. Der 3-Impuls \vec{p} ist aber noch immer definiert, und er gibt die Bewegungsrichtung des Teilchens an.

Wenn wir zur Quantenmechanik übergehen, also die Energie $E = \hbar\omega$ durch die Frequenz, und den Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ durch den Wellenvektor der Wellenfunktion ausdrücken, dann wird aus (5.61) genau die Beziehung (4.85) zwischen der Frequenz und der Wellenlänge einer Lichtwelle,

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \omega = |\vec{k}|. \quad (5.62)$$

Wenn wir also ein relativistisches Teilchen der Masse $m = 0$ quantisieren, so ist seine Wellenfunktion eine sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitende Welle. Zwischen dem 4-Impuls \mathbf{p} und dem 4-Wellenvektor \mathbf{k} besteht der Zusammenhang $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

Wenn wir die Quantenphysik außen vor lassen, besteht Licht also im wesentlichen aus masselosen Teilchen, die sich stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Jedem solchen Teilchen können wir einen lichtartigen 4-Vektor zuordnen, der dann im jeweiligen Inertialsystem eines Beobachters die Energie und den 3-Impuls des Photons darstellt. Und wenn wir dieses Teilchen dann doch quantisieren, wird daraus der 4-Wellenvektor, der im jeweiligen Inertialsystem aus der Frequenz und dem gewöhnlichen 3-Wellenvektor besteht.

Aufgabe 5.13 *Es gibt Elementarteilchen, die nach einer gewissen mittleren Zeit, der Halbwertszeit, ohne äußeren Anlass zerfallen. Es gibt aber keine masselosen solchen Teilchen. Das Photon zerfällt nicht ohne äußeren Anlass, also ohne zum Beispiel die Kollision mit einem Teilchen. Warum ist das so?*

¹Es sei hier das sehr schöne und kompakte Buch von P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, empfohlen.

Kraft und Leistung

Jetzt wollen wir uns überlegen, wie wir Teilchen beschreiben können, die nicht frei sind. Wir wollen uns zunächst keine Gedanken darüber machen, ob auch für solche Teilchen die Bewegungsgleichungen aus einer Wirkung abgeleitet werden können, sondern uns auf die Frage beschränken, wie wir die Bewegungsgleichungen (5.53) modifizieren müssen, um ein Teilchen zu beschreiben, auf das eine *Kraft* wirkt. In der klassischen Mechanik ist die Kraft die Ableitung des Impulses nach der Zeitkoordinate, also

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.63)$$

Andererseits ist die Kraft in der klassischen Mechanik auch Masse mal Beschleunigung. Es liegt deshalb nahe, eine *4-Kraft* einzuführen, so dass

$$\mathbf{K} = m \mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}. \quad (5.64)$$

Aus dieser Definition entnehmen wir sofort, dass \mathbf{K} ein Tensor ist, die Definition also unabhängig vom Bezugssystem ist. Außerdem ist (5.64) offenbar die kovariante Version der Definition (5.63) einer Kraft in der klassischen Mechanik.

Um eine Bewegungsgleichung für ein Teilchen aufzustellen, auf das eine Kraft wirkt, müssen wir also den 4-Vektor \mathbf{K} vorgeben, zum Beispiel als eine Funktion des Ereignisses, an dem sich das Teilchen befindet, also von Ort und Zeit. Und natürlich darf die 4-Kraft auch von der 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} des Teilchens, oder von dessen 4-Impuls \mathbf{p} abhängen. Sie muss es sogar, wie wir leicht feststellen können, denn es gilt

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{K} = 0. \quad (5.65)$$

Die Kraft \mathbf{K} muss also stets auf \mathbf{p} senkrecht stehen, und wir können daher nur drei unabhängige Komponenten frei vorgeben. Um zu sehen, dass diese drei Komponenten im wesentlichen die der 3-Kraft (5.63) sind, führen wir wieder eine Raum-Zeit-Aufspaltung durch. Es folgt dann aus der Darstellung (5.41) des 4-Impulses, dass

$$\mathbf{K} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} P \\ \vec{F} \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

wobei \vec{F} die in (5.63) definierte 3-Kraft und $P = dE/dt$ die im selben Inertialsystem gemessene *Leistung* ist. Dabei haben wir benutzt, dass die Ableitung $dt/d\tau = u^t$ gerade die Zeitkomponente der 4-Geschwindigkeit, also der Gamma-Faktor ist.

Wir können diesen Gamma-Faktor auch durch die Energie und die Masse ausdrücken. Es gilt nämlich laut (5.37) $E = m \gamma(\vec{v})$, also

$$\mathbf{K} = \frac{E}{m} \begin{pmatrix} P \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Aus der Tatsache, dass \mathbf{K} zu \mathbf{p} , und damit auch zu \mathbf{u} senkrecht steht, folgt nun außerdem

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \gamma^2(\vec{v}) \begin{pmatrix} P \\ \vec{F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma^2(\vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{F} - P) = 0. \quad (5.68)$$

Für die Leistung gilt demnach der übliche Zusammenhang

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}. \quad (5.69)$$

Um ein Teilchen zu beschreiben, auf das eine Kraft wirkt, können wir also die drei räumlichen Komponenten der 4-Kraft frei wählen, indem wir eine 3-Kraft \vec{F} vorgeben, die beliebig von Ort \vec{x} und Zeit x^t , sowie von der Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens abhängen kann. Die Zeitkomponente von \mathbf{K} ist dann durch die Leistung festgelegt.

Die **4-Kraft** setzt sich zusammen aus der 3-Kraft und der Leistung, multipliziert mit einem Gamma-Faktor.

Wie müssen wir nun die Bewegungsgleichungen (5.53) modifizieren, wenn auf das Teilchen eine Kraft wirkt? Offenbar muss die 4-Kraft auf der rechten Seite der zweiten Gleichung erscheinen, denn die definiert die Ableitung des 4-Impulses. Allerdings ist sie definiert als die Ableitung nach der *Eigenzeit* τ , nicht nach dem frei wählbaren Kurvenparameter s . Um das zu berücksichtigen, müssen wir wieder das Einbein an der richtigen Stelle einfügen.

Wir erinnern uns dazu an (5.48), wonach das Einbein angibt, wie schnell sich die Eigenzeit als Funktion des Kurvenparameters s entwickelt. Es gilt demnach

$$\zeta \mathbf{K} = \frac{1}{m} \frac{d\tau}{ds} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{m} \frac{d\mathbf{p}}{ds}. \quad (5.70)$$

Die modifizierten Bewegungsgleichungen lauten also

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \zeta \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \zeta m \mathbf{K}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2, \quad (5.71)$$

wobei die letzte Gleichung wieder als Nebenbedingung zu erfüllen ist. Wenn wir wollen, können wir statt \mathbf{p} auch die 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} als Hilfsvariable verwenden. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \zeta m \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \zeta \mathbf{K}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1. \quad (5.72)$$

In jedem Fall müssen wir die 4-Kraft \mathbf{K} so als Funktion von \mathbf{x} und \mathbf{p} , oder \mathbf{x} und \mathbf{u} vorgeben, und zwar so dass \mathbf{K} immer auf \mathbf{p} bzw. \mathbf{u} senkrecht steht. Damit stellen wir sicher, dass die Nebenbedingung erhalten bleibt, wenn wir die Bewegungsgleichungen integrieren. Wie wir das am besten tun, hängt natürlich von dem konkret gegebenen Kraftgesetz ab. Ein spezielles werden wir uns im nächsten Kapitel anschauen.

Um den Kreis zu schließen, wollen wir zum Schluss noch einmal kurz zeigen, wie wir von den kovarianten Bewegungsgleichungen wieder auf die bekannten, nicht-relativistischen Bewegungsgleichungen zurück kommen. Dazu zerlegen wir alle vorkommenden Größen in ihre Raum- und Zeitkomponenten,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{E}{m} \begin{pmatrix} P \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Dann zerlegen wir die Bewegungsgleichungen (5.71) entsprechend. Die Zeitkomponenten der ersten beiden Gleichungen lauten

$$\frac{dt}{ds} = \zeta E, \quad \frac{dE}{ds} = \zeta E P, \quad (5.74)$$

und die räumlichen Komponenten sind

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \zeta \vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{ds} = \zeta E \vec{F}. \quad (5.75)$$

Interessanterweise ist die Masse m nun vollständig aus diesen Gleichungen verschwunden. Das stimmt aber nicht ganz, denn wir haben ja noch die Nebenbedingung, die jetzt wieder die Beziehung zwischen Energie und 3-Impuls liefert,

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (5.76)$$

Wir haben dann auch noch die Eichfreiheit, das Einbein frei zu wählen. Geschickterweise wählen wir es so, dass der Kurvenparameter s mit der Zeitkoordinate t in dem Inertialsystem zusammen fällt, in dem die die Zerlegung gerade durchführen. Es soll also gelten $t = s$, jedenfalls bis auf eine Konstante. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\zeta = 1/E$ ist, wie man aus der ersten Gleichung in (5.74) entnimmt. Die Zweite Gleichung in (5.74) wird dann redundant, denn es handelt sich nur wieder um die Definition der Leistung. Was bleibt, sind die räumlichen Komponenten der Bewegungsgleichungen und die Nebenbedingung, also

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{p}}{E}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{wobei} \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (5.77)$$

Bis auf das Erscheinen der Energie E im Nenner der ersten Gleichung sind das die üblichen nicht-relativistischen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen. An dieser Stelle besteht die einzige Modifikation der Relativitätstheorie also darin, dass wir die Masse m des Teilchens, die in der klassischen Mechanik dessen *Trägheit* definiert, durch die Energie E ersetzen müssen. Da die Energie mit zunehmendem Impuls größer wird, wird auch die Trägheit größer, und das verhindert schließlich, dass die Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit überschreitet.

In der Relativitätstheorie ist **Trägheit** eine Eigenschaft der **Energie**, nicht der Masse.

Die Größe E wird deshalb, vor allem in älteren Abhandlungen über die Relativitätstheorie, auch *effektive Masse* oder *träge Masse* genannt und mit m oder $m(\vec{v})$ bezeichnet. Für das, was wir hier einfach Masse nennen und mit m bezeichnen, ist dann die Bezeichnung *Ruhemasse* und das Symbol m_0 üblich. In einem modernen geometrischen Zugang zur Relativitätstheorie sind solche Begriffe aber eher verwirrend. Masse ist eine Eigenschaft des Teilchens an sich, sollte also ein Skalar und damit unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein. Kinetische Energie dagegen ist eine Eigenschaft des Bewegungszustands des Teilchens und daher eine vom Bezugssystem abhängige Größe.

Aufgabe 5.14 Wenn m die effektive Masse eines Teilchens ist, und E die Energie, beides im selben Inertialsystem gemessen, welcher Zusammenhang besteht dann zwischen E und m , wenn c nicht gleich Eins gesetzt ist?

Abschließend können wir sagen, dass wir, um ein konkretes physikalischen Problem zu lösen, und zwar hier im speziellen die Bewegung eines Punktteilchens in einem Kraftfeld, wahlweise die kovarianten Bewegungsgleichungen (5.71) mit Nebenbedingung, oder die Bewegungsgleichungen (5.77) ohne Nebenbedingungen lösen können, die speziell auf ein bestimmtes Inertialsystem zugeschnitten sind. Welche Methode günstiger ist, hängt von dem jeweils vorgegebenen Kraftgesetz ab. Bisher haben wir noch keines festgelegt. Im nächsten Kapitel werden wir aber ein spezielles solches Kraftgesetz formulieren.

Aufgabe 5.15 Man löse die Bewegungsgleichungen (5.77) für eine konstante 3-Kraft $\vec{F} = m g \vec{e}_z$, mit den Anfangsbedingungen $\vec{x} = 0$ und $\vec{v} = 0$ bei $t = 0$. Man zeige, dass sich eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ergibt, wie sie in Aufgabe 5.5 definiert wurde. Alle Angaben beziehen sich dabei auf ein festes Inertialsystem Σ .

Aufgabe 5.16 Es sei Σ ein Inertialsystem, und in diesem Inertialsystem ist durch $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ein Kraftgesetz durch ein Potential V gegeben, das beliebig von Ort und Zeit abhängt. Das Potential V ist also eine reelle Funktion auf dem Minkowski-Raum \mathcal{M} . Man zeige, dass V kein skalares Feld ist, sondern die Zeitkomponente eines Tensors erster Stufe, dessen räumliche Komponenten in Σ verschwinden.

6 Elektrodynamik – Teil II

In diesem letzten Kapitel des ersten Teils wollen wir nochmal auf die Theorie zurück kommen, die wir in einer vereinfachten Version an den Anfang der Relativitätstheorie gestellt hatten, nämlich Maxwells Elektrodynamik. Ziel dieses Kapitels ist es, die vollen Maxwell-Gleichungen und die Ankopplung der elektrischen und magnetischen Felder an die Ladungen so zu beschreiben, dass die Theorie mit dem Relativitätsprinzip in Einklang steht.

Die Lorentz-Kraft

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, können wir die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen entweder *kovariant* als Tensorgleichungen (5.71) formulieren, wobei wir die 4-Kraft \mathbf{K} vorgeben müssen, oder unter Bezugnahme auf ein festes Inertialsystem in der üblichen Form (5.77), wie wir sie aus der klassischen Mechanik kennen. Dann können wir die 3-Kraft \vec{F} beliebig vorgeben, müssen aber im einzelnen nachweisen, dass das so definierte Kraftgesetz im Einklang mit dem Relativitätsprinzip steht.

Aus Ausgangspunkt wählen wir hier die zweite Variante, dass heißt wir begeben uns in ein festes Inertialsystem Σ und geben die Kraft \vec{F} als Funktion von Ort, Zeit und Geschwindigkeit des Teilchens vor. Und zwar soll die Kraft genau durch die aus der Elektrodynamik bekannte *Lorentz-Kraft* gegeben sein,

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (6.1)$$

wobei \vec{E} und \vec{B} beliebige, als Funktionen von Ort und Zeit vorgegebene Felder sind, und q die Ladung des Teilchens ist.

Dass wir gerade dieses Kraftgesetz wählen, hat natürlich einen besonderen Grund. Genau diese Kraft stand ja am Anfang von Einsteins Herleitung der speziellen Relativitätstheorie in Kapitel 2. Außerdem ist genau dies die Schnittstelle zwischen der Maxwellschen Elektrodynamik und der Newtonschen Mechanik, also der beiden Theorien, aus deren Spannungsfeld die speziellen Relativitätstheorie gewissermaßen heraustreten soll. Die Lorentz-Kraft stellt nämlich die Beziehung her zwischen den elektrischen und den mechanischen Eigenschaften eines geladenen, massiven Teilchens.

Wenn wir es also schaffen, die aus der Lorentz-Kraft resultierenden Bewegungsgleichungen als Tensorgleichungen zu schreiben, dann sind wir am Ziel. Wir haben die Dynamik von geladenen Teilchen so formuliert, dass sie dem Relativitätsprinzip genügt. Der scheinbare Widerspruch, den wir, Einstein zitierend, an den Anfang von Kapitel 2 gestellt hatten, löst sich auf. Wenn die Lorentz-4-Kraft ein Tensor ist, dann sind die resultierende Bewegungsgleichungen für die Elektronen in einem Leiter kovariant, also unabhängig vom Bezugssystem. Deren Verhalten *kann* folglich nur von der Relativbewegung von Leiter und Magnet abhängen.

Wir versuchen nun, die aus (6.1) resultierende Bewegungsgleichung in eine Tensorgleichung zu übersetzen. Wie das geht, wissen wir bereits. Wir müssen die 3-Kraft \vec{F} durch eine 4-Kraft \mathbf{K} ersetzen, die durch (5.66) gegeben ist, also

$$\mathbf{K} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} P \\ \vec{F} \end{pmatrix} = q \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Als Zeitkomponente von \mathbf{K} ergibt sich dabei die elektrische Leistung $P = q \vec{v} \cdot \vec{E}$, und als Raumkomponente die 3-Kraft \vec{F} , alles multipliziert mit einem Gamma-Faktor. Jetzt müssen wir das nur noch kovariant, also als eine Tensorgleichung schreiben. Denn noch bezieht sich alles auf der rechten Seite auf ein bestimmtes Inertialsystem, in dem die Felder \vec{E} und \vec{B} als 3-Vektoren, sowie die 3-Geschwindigkeit \vec{v} definiert sind.

Natürlich liegt es nahe zu vermuten, dass, genau wie \vec{v} der räumliche Anteil eines 4-Vektors \mathbf{u} ist, auch \vec{E} und \vec{B} die räumlichen Anteile von geeignet gewählten 4-Vektoren sind. Um zu testen, ob dies tatsächlich der Fall ist, ist es zunächst einmal nützlich, statt der Vektorschreibweise wieder die Indexnotation zu verwenden. Wir schrieben also $\vec{v} = v^m \vec{e}_m$, $\vec{E} = E^m \vec{e}_m$, $\vec{B} = B^m \vec{e}_m$, und folglich

$$K^t = q \gamma(\vec{v}) E^n v_n, \quad K^m = q \gamma(\vec{v}) (E^m + \varepsilon^{mnp} v_n B_p), \quad (6.3)$$

wobei ε^{mnp} der durch $\varepsilon^{xyz} = 1$ definierte vollständig antisymmetrische räumliche Levi-Civita-Tensor ist, wir wie ihn in Kapitel 3 eingeführt haben.

Um den Gamma-Faktor zu eliminieren, schreiben wir das ein wenig um, indem wir statt der 3-Geschwindigkeit $v^m = v_m$ die Komponenten $u^t = -u_t = \gamma(\vec{v})$ und $u^m = u_m = \gamma(\vec{v}) v_m$ der 4-Geschwindigkeit verwenden,

$$K^t = q E^n u_n, \quad K^m = q (-E^m u_t + \varepsilon^{mnp} u_n B_p). \quad (6.4)$$

Offenbar sind die rechten Seiten linear in u^μ . Wir können also schreiben

$$K^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} p_\nu, \quad (6.5)$$

wobei die Komponenten der Matrix $F^{\mu\nu}$ wie folgt gegeben sind

$$F^{tt} = 0, \quad F^{tn} = E^n, \quad F^{mt} = -E^m, \quad F^{mn} = \varepsilon^{mnp} B_p. \quad (6.6)$$

Explizit heißt das

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} F^{tt} & F^{tx} & F^{ty} & F^{tz} \\ F^{xt} & F^{xx} & F^{xy} & F^{xz} \\ F^{yt} & F^{yx} & F^{yy} & F^{yz} \\ F^{zt} & F^{zx} & F^{zy} & F^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Hier haben wir verwendet, dass wir die räumlichen Indizes x , y und z beliebig nach oben oder unten schreiben können. Also ist $F^{\mu\nu}$ eine antisymmetrische 4×4 -Matrix. Sie hat sechs unabhängige Komponenten, genau wie die Felder \vec{E} und \vec{B} . Die in (6.5) definierte 4-Kraft steht, wie es sein muss, immer senkrecht auf dem 4-Impuls, denn es gilt

$$K^\mu p_\mu = q F^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0, \quad (6.8)$$

weil $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch, $p_\mu p_\nu$ aber symmetrisch in μ und ν ist.

Wir können aber noch mehr über die Matrix $F^{\mu\nu}$ sagen. In (6.5) sind K^μ und p_ν , sowie q und m Tensoren, nämlich Vektoren bzw. Skalare. Dann muss aber auch $F^{\mu\nu}$ ein Tensor sein denn sonst würde diese Gleichung so nicht in *jedem* Inertialsystem gelten. Die elektrischen und magnetischen Felder bilden also nicht, wie angenommen, die räumlichen Anteile von je einem 4-Vektor, sondern die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe, des sogenannten *Feldstärketensors* $F^{\mu\nu}$. Da die Felder im allgemeinen räumlich und zeitlich veränderlich sind, handelt es sich natürlich genau genommen um ein Tensorfeld.

Elektrisches und magnetisches Feld bilden die Komponenten eines **Feldstärketensors**.

Zusammenfassend können wir nun die kovarianten Bewegungsgleichungen (5.71) für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld sehr einfach wie folgt schreiben,

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \zeta p^\mu, \quad \frac{dp^\mu}{ds} = \zeta m K^\mu = \zeta q F^{\mu\nu} p_\nu, \quad p^\mu p_\mu = -m^2 \quad (6.9)$$

Hier tritt wieder das Einbein ζ als freier Parameter auf, mit dem wir bestimmen können, wie schnell die Weltlinie als Funktion des Parameters s durchlaufen wird, und die Masse des Teilchens geht durch die Nebenbedingung ein. Um diese Gleichungen zu lösen, müssen wir das Ereignis x und den Impuls p für irgendeinen Parameter s als Anfangsbedingung vorgeben, und die Funktion $\zeta(s)$, die wir frei wählen können. Der Impuls muss dabei der Nebenbedingung genügen, die dann für alle s erfüllt ist. Denn laut (6.8) steht die Kraft senkrecht auf dem Impuls, also ist die Länge des Impulses konstant.

Wenn wir die Weltlinie durch die Eigenzeit parametrisieren wollen, müssen wir $\zeta = 1/m$ setzen. Wenn wir dann zusätzlich noch den Impuls p^μ durch die Geschwindigkeit u^μ als Hilfsvariable ersetzen, dann vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu, \quad \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (6.10)$$

Es geht dann offenbar nur das Verhältnis q/m ein. Teilchen mit dem gleichen Verhältnis aus Ladung und Masse verhalten sich im elektromagnetischen Feld gleich.

Damit haben wir eine kovariante Formulierung für die Dynamik eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld gefunden. Solange wir uns nur auf ein festes Inertialsystem beziehen, gilt immer noch die übliche Formel (6.1) für die Lorentz-Kraft. Die einzige relativistische Korrektur tritt dann sozusagen auf der mechanischen Seite der Bewegungsgleichung auf. Die Lorentz-Kraft ist dieselbe, die wir aus der klassischen Theorie kennen, aber anstelle der Masse m bestimmt die Energie E die Trägheit des Teilchens. In einem homogenen elektrischen Feld wirkt also immer noch eine konstante Kraft, aber trotzdem kann das Teilchen nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden.

Etwas neues lernen wir aber, wenn wir jetzt von einem Inertialsystem in ein anderes wechseln. Dann transformieren sich nämlich die elektrischen und magnetischen Felder in einer nicht-trivialen Art und Weise, und mischen dabei auch miteinander. Denn sie sind die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe. Was ein Beobachter als elektrisches Feld sieht, sieht ein anderer Beobachter als magnetisches Feld und umgekehrt. Das ist genau die am Anfang von Kapitel 2 geschilderte Situation. Ein Leiter bewegt sich relativ zu einem Magneten. Im Ruhesystem des Magneten existiert nur das magnetische Feld. Die Kraft resultiert aus dem Term $q \vec{v} \times \vec{B}$. Im Ruhesystem des Leiters dagegen verschwindet dieser Term, denn es ist $\vec{v} = 0$. Trotzdem ist eine Kraft $q \vec{E}$ vorhanden, denn in diesem Inertialsystem existiert ein elektrisches Feld.

Aufgabe 6.1 Das Coulomb-Feld einer im Koordinatenursprung ruhenden Ladung q ist

$$\vec{E} = \frac{q \vec{x}}{r^3}, \quad \vec{B} = 0, \quad \text{mit } r = |\vec{x}|. \quad (6.11)$$

Man berechne das Magnetfeld einer Ladung q , die sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, in dem Moment, in dem sie gerade den räumlichen Koordinatenursprung passiert.

Aufgabe 6.2 Durch $\vec{B} = B \vec{e}_z$ sei in einem Inertialsystem Σ ein homogenes und zeitunabhängiges Magnetfeld gegeben. Ein Inertialsystem Σ' bewegt sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$. Man zeige, dass ein Beobachter in Σ' dasselbe Magnetfeld $\vec{B}' = B \vec{e}_z'$ misst, und dass auch in diesem Inertialsystem das elektrische Feld verschwindet.

Aufgabe 6.3 Bekanntlich bewegt sich ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B \vec{e}_z$ auf einer Spiralbahn. Es sei v die Geschwindigkeit des Teilchens in \vec{e}_z -Richtung, ω die Kreisfrequenz (Zyklotronfrequenz) und r der Radius der Kreisbahn in der \vec{e}_x - \vec{e}_y -Ebene, alles bezüglich eines Inertialsystems Σ . Dann ist die Weltlinie des Teilchens gegeben durch

$$\vec{x}(t) = vt \vec{e}_z + r \cos(\omega t) \vec{e}_x + r \sin(\omega t) \vec{e}_y, \quad (6.12)$$

wobei als Kurvenparameter die Zeitkoordinate t in Σ gewählt wurde. Man gebe die Weltlinie $\mathbf{x}(\tau)$ als Funktion der Eigenzeit τ an und bestimme die 4-Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\tau)$ sowie die 4-Beschleunigung $\mathbf{a}(\tau)$. Dann zeige man, dass zwischen den Bahndaten und dem Magnetfeld der folgende Zusammenhang besteht:

$$\omega = \frac{qB \sqrt{1-v^2}}{\sqrt{m^2 + q^2 B^2 r^2}} \approx \frac{qB}{m}, \quad (6.13)$$

wobei die Näherung für kleine Geschwindigkeiten des Teilchens gilt.

Aufgabe 6.4 Unter denselben Bedingungen wie in Aufgabe 6.3, welche Zyklotronfrequenz ω' und welchen Bahnradius r' misst ein Beobachter, der sich relativ zum Inertialsystem Σ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$ bewegt, so dass für ihn das Teilchen nicht auf einer Spiralbahn, sondern auf einer geschlossenen Kreisbahn läuft? Was hat die Beziehung zwischen ω und ω' mit der Zeitdilatation zu tun?

Aufgabe 6.5 Unter denselben Bedingungen wie in Aufgabe 6.3, welche Zyklotronfrequenz $\tilde{\omega}$ misst ein mit dem Teilchen mitbewegter Beobachter? Welche Beschleunigung g spürt er? Warum kann $\tilde{\omega}$ und g nicht von v abhängen?

Die Maxwell-Gleichungen

Ein elektromagnetisches Feld in der Raumzeit wird also durch ein antisymmetrisches Tensorfeld zweiter Stufe $F^{\mu\nu}$ beschrieben. Wir wollen nun zeigen, dass auch die Maxwell-Gleichungen eine kovariante Formulierung zulassen. Mit anderen Worten, die Feldgleichungen, denen das elektromagnetische Feld genügt, lassen sich ebenfalls als Tensorgleichungen schreiben.

Wir schreiben die Maxwell-Gleichungen zunächst in der gewohnten Form auf, wie wir sie aus der Elektrodynamik kennen. Es gibt die *homogenen* Maxwell-Gleichungen, die keine Ladungen enthalten,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.14)$$

sowie die inhomogenen Gleichungen, die die Kopplung der Felder an die Ladungen beschreiben,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho. \quad (6.15)$$

Hier ist $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$ der übliche räumliche Ableitungsoperator, ρ die räumliche Ladungsdichte und \vec{j} die Stromdichte. Auch hier haben wir natürlich $c = 1$ gesetzt, so dass keine dimensionsbehafteten Naturkonstanten mehr auftreten. Insbesondere haben die Felder \vec{E} und \vec{B} dieselben natürlichen Einheiten.

Nun müssen wir diese Gleichungen irgendwie durch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ausdrücken. Dazu schrieben wir noch einmal seine Komponenten auf, nun aber mit den Indizes nach unter gezogen,

$$F_{tt} = 0, \quad F_{tn} = -E_n, \quad F_{mt} = E_m, \quad F_{mn} = \varepsilon_{mnp} B^p, \quad (6.16)$$

oder als Matrix,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} F_{tt} & F_{tx} & F_{ty} & F_{tz} \\ F_{xt} & F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yt} & F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zt} & F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

In den Maxwell-Gleichungen tritt immer genau eine Ableitung auf, entweder nach den Raumkoordinaten oder nach der Zeitkoordinate. Es liegt also nahe, den Tensor $\partial_\mu F_{\nu\rho}$ dritter Stufe genauer zu betrachten.

Versuchen wir zuerst, die homogenen Maxwell-Gleichung daraus abzuleiten. Es gibt insgesamt vier unabhängige Komponenten dieser Gleichungen, denn in (6.14) ist die erste eine Vektorgleichung und die zweite eine skalare Gleichung. Der Tensor $\partial_\mu F_{\nu\rho}$ hat aber, wie man sich leicht überlegt, 24 unabhängige Komponenten, denn $F_{\nu\rho}$ hat sechs unabhängige Komponenten und der Ableitungsoperator ∂_μ vier. Betrachten wir jedoch die zyklische Kombination

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}, \quad (6.18)$$

so hat diese nur vier unabhängige Komponenten. Der so gebildete Tensor ist nämlich total antisymmetrisch. Es ergibt sich nur dann ein von Null verschiedener Ausdruck, wenn alle drei Indizes (μ, ν, ρ) verschiedene Werte annehmen. Da nur vier Werte (t, x, y, z) zur Verfügung stehen, gibt es genau drei Möglichkeiten, drei davon auszuwählen. Berechnen wir zum Beispiel

$$\partial_x F_{yz} + \partial_y F_{zx} + \partial_z F_{xy} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (6.19)$$

Jede andere Permutation der Indizes ergibt dasselbe bis auf eventuell ein Vorzeichen. Das ist aber genau $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, also die linke Seite der zweiten homogenen Maxwell-Gleichung in (6.14). Die anderen drei Möglichkeiten sind

$$\begin{aligned} \partial_y F_{zt} + \partial_z F_{ty} + \partial_t F_{yz} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \partial_z F_{xt} + \partial_x F_{tz} + \partial_t F_{zx} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \partial_x F_{yt} + \partial_y F_{tx} + \partial_t F_{xy} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Offenbar sind das genau die drei Komponenten der ersten homogenen Maxwell-Gleichung (6.14). Die vier unabhängigen Komponenten der homogenen Maxwell-Gleichungen bilden also zusammen genau eine Tensorgleichung,

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (6.21)$$

Um diese Gleichung ein wenig kompakter aufzuschreiben, führen wir folgende Notation ein. Wenn zum Beispiel $T_{\mu\nu}$ ein Tensor zweiter Stufe ist, dann definieren wir den *symmetrisierten* bzw. *antisymmetrisierten* Tensor als

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (6.22)$$

Für einen Tensor, der bereits antisymmetrisch ist, wie zum Beispiel den Feldstärketensor, gilt dann $F_{[\mu\nu]} = F_{\mu\nu}$ und $F_{(\mu\nu)} = 0$. Und umgekehrt, für einen symmetrischen Tensor wie etwa die Metrik gilt $\eta_{(\mu\nu)} = \eta_{\mu\nu}$ und $\eta_{[\mu\nu]} = 0$. Wir sagen deshalb auch, $T_{(\mu\nu)}$ sei der symmetrische und $T_{[\mu\nu]}$ sei der antisymmetrische *Anteil* des Tensors $T_{\mu\nu}$.

Die Symmetrisierung und Antisymmetrisierung können wir auf Tensoren beliebiger Stufe anwenden. Sei zum Beispiel $H_{\mu\dots\nu}$ ein Tensor der Stufe m , dann definieren wir

$$H_{(\mu\dots\nu)} = \frac{1}{m!}(H_{\mu\dots\nu} + \text{alle Permutationen} + H_{\nu\dots\mu}), \quad (6.23)$$

und entsprechend

$$H_{[\mu\dots\nu]} = \frac{1}{m!}(H_{\mu\dots\nu} \pm \text{alle Permutationen} \pm H_{\nu\dots\mu}), \quad (6.24)$$

wobei das Vorzeichen durch die Signatur der jeweiligen Permutation gegeben ist. Das Ergebnis ist in jedem Fall ein vollständig symmetrischer Tensor $H_{(\mu\dots\nu)}$ bzw. ein vollständig antisymmetrischer Tensor $H_{[\mu\dots\nu]}$. Für einen Tensor dritter Stufe gilt zum Beispiel

$$H_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{6}(H_{\mu\nu\rho} + H_{\rho\mu\nu} + H_{\nu\rho\mu} - H_{\nu\mu\rho} - H_{\rho\nu\mu} - H_{\mu\rho\nu}), \quad (6.25)$$

Aufgabe 6.6 Wieviele unabhängige Komponenten hat ein vollständig (anti)symmetrischer Tensor der Stufe m , wenn der zu Grunde liegende Vektorraum die Dimension d hat?

Mit dieser Schreibweise lassen sich nun die homogenen Maxwell-Gleichungen kurz und bündig aufschreiben. Sie lauten

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (6.26)$$

Dass sich hier nur drei statt der sechs Summanden in (6.25) ergeben, liegt daran, dass $F_{\mu\nu}$ bereits antisymmetrisch ist, so dass wir durch nochmaliges Vertauschen der Indizes jeweils zwei Terme zusammenfassen können und so auf den Ausdruck (6.21) kommen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen die Komponenten einer Tensorgleichung sind. Auch diese bestehen aus vier unabhängigen Komponenten, denn wieder ist eine der Gleichungen in (6.15) eine Vektorgleichung, die andere eine skalare Gleichung. Und tatsächlich können wir aus dem Tensor $\partial_{\mu} F_{\nu\rho}$ noch ein anderes Objekt bilden, das vier Komponenten hat. Nämlich einen 4-Vektor, indem wir zwei der Indizes kontrahieren.

Betrachten wir also den Vektor $\partial_{\mu} F^{\mu\nu}$. Zuerst setzen wir $\nu \rightarrow t$, berechnen also die Zeitkomponente dieses Vektors. Das ergibt

$$\partial_{\mu} F^{\mu t} = \partial_x F^{xt} + \partial_y F^{yt} + \partial_z F^{zt} + \partial_t F^{tt} = -\left(\frac{\partial E^x}{\partial x} + \frac{\partial E^y}{\partial y} + \frac{\partial E^z}{\partial z}\right). \quad (6.27)$$

Das ist bis auf ein Vorzeichen die linke Seite der zweiten inhomogenen Maxwell-Gleichung (6.15). Bilden wir statt dessen die räumlichen Komponenten desselben Vektors, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F^{\mu x} &= \partial_x F^{xx} + \partial_y F^{yx} + \partial_z F^{zx} + \partial_t F^{tx} = -\left(\frac{\partial B^z}{\partial y} - \frac{\partial B^y}{\partial z} - \frac{\partial E^x}{\partial t}\right), \\ \partial_{\mu} F^{\mu y} &= \partial_x F^{xy} + \partial_y F^{yy} + \partial_z F^{zy} + \partial_t F^{ty} = -\left(\frac{\partial B^x}{\partial z} - \frac{\partial B^z}{\partial x} - \frac{\partial E^y}{\partial t}\right), \\ \partial_{\mu} F^{\mu z} &= \partial_x F^{xz} + \partial_y F^{yz} + \partial_z F^{zz} + \partial_t F^{tz} = -\left(\frac{\partial B^y}{\partial x} - \frac{\partial B^x}{\partial y} - \frac{\partial E^z}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Wieder bis auf ein Vorzeichen sind das die Komponenten der rechten Seite der ersten inhomogenen Maxwell-Gleichung (6.15). Um auch die linken Seiten zu bekommen, müssen wir offenbar die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte \vec{j} zu einem 4-Vektor kombinieren,

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen können dann ebenso kurz und bündig geschrieben werden wie die homogenen, und auch sie werden zu Tensorgleichungen,

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -4\pi j^{\nu}. \quad (6.30)$$

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass der in (6.29) definierte Vektor \mathbf{j} auch wirklich ein 4-Vektor ist, sich seine Komponenten also wie die eines Tensors erster Stufe verhalten. Wir können das am besten an einem Beispiel klar machen.

Ladungen und Ströme

Wir betrachten dazu ein einzelnes Teilchen mit der Ladung q , das sich gleichförmig durch den Raum bewegt, und zwar mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Zur Zeit t , wobei dies die Zeitkoordinate in einem Inertialsystem Σ ist, befindet sich also eine Ladung q am Ort $\vec{x} = \vec{v}t$. Die Ladungsdichte und die resultierende Stromdichte in Raum und Zeit ist demnach

$$\rho(t, \vec{x}) = q \delta(\vec{x} - \vec{v}t), \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = q \vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{v}t). \quad (6.31)$$

Dabei ist $\delta(\vec{x})$ die gewöhnliche dreidimensionale Deltafunktion im Raum, definiert durch die Eigenschaft

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y}). \quad (6.32)$$

Um zu zeigen, dass \mathbf{j} ein Tensor ist, schreiben wir (6.31) wie folgt um. Wir führen künstlich eine Integration über die Weltlinie des Teilchens ein,

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= q \int dt' \delta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{v}t'), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= q \int dt' \vec{v} \delta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{v}t'). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dann ersetzen wir die Integrationsvariable t' durch die Eigenzeit $\tau = t'/\gamma(\vec{v})$ entlang der Weltlinie,

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= q \int d\tau \gamma(\vec{v}) \delta(t - \gamma(\vec{v})\tau) \delta(\vec{x} - \gamma(\vec{v})\vec{v}\tau), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= q \int d\tau \gamma(\vec{v}) \vec{v} \delta(t - \gamma(\vec{v})\tau) \delta(\vec{x} - \gamma(\vec{v})\vec{v}\tau). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Und schließlich ersetzen wir die Geschwindigkeit \vec{v} und den Gamma-Faktor durch die räumlichen und zeitlichen Komponenten der 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} ,

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= q \int d\tau u^t \delta(t - u^t \tau) \delta(\vec{x} - \vec{u}\tau), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= q \int d\tau \vec{u} \delta(t - u^t \tau) \delta(\vec{x} - \vec{u}\tau). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Jetzt können wir beide Gleichung zu einer vierkomponentigen Gleichung kombinieren,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int d\tau q \mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}\tau), \quad (6.36)$$

wobei $\delta(\mathbf{x}) = \delta(t)\delta(\vec{x})$ die vierdimensionale Deltafunktion ist, definiert durch die Eigenschaft

$$\int d^4x f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}). \quad (6.37)$$

In Aufgabe 3.19 wurde gezeigt, dass durch diese Deltafunktion ein skalares Feld definiert ist. Wir wissen außerdem, dass die Ladung q und die Eigenzeit τ Skalare sind. Sie sind also invariant unter Lorentz-Transformationen. Da \mathbf{u} ein 4-Vektor ist, folgt daraus, dass auch \mathbf{j} ein 4-Vektor ist.

Aufgabe 6.7 Man verifiziere, dass \mathbf{j} auch dann ein 4-Vektor ist, wenn sich die Ladung q nicht gleichförmig bewegt, sondern entlang irgendeiner zeitartigen Weltlinie.

Damit werden die Maxwell-Gleichungen in ihrer endgültigen Form zu Tensorgleichungen,

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0, \quad \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -4\pi j^{\nu}. \quad (6.38)$$

Wir können aus dieser Darstellung sofort die *Kontinuitätsgleichung* für die Stromdichte herleiten. Wenn wir von der inhomogenen Gleichung, bei der auf beiden Seiten ein 4-Vektor steht, die 4-Divergenz bilden, so erhalten wir wieder eine Tensorgleichung, nämlich

$$\partial_{\nu} \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = -4\pi \partial_{\nu} j^{\nu} \Rightarrow \partial_{\nu} j^{\nu} = 0. \quad (6.39)$$

Wegen der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ und der Symmetrie der zweiten Ableitung ist die linke Seite nämlich gleich Null. Ausgeschrieben in Komponenten ergibt sich die Kontinuitätsgleichung in ihrer bekannten Form

$$\partial_t j^t + \partial_m j^m = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (6.40)$$

Wie wir wissen, wird dadurch die Ladungserhaltung ausgedrückt.

Aufgabe 6.8 Man verifiziere die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte (6.36).

Das Vektorpotential

Wir können hier natürlich nicht die gesamte Elektrodynamik wiederholen. Wir wollen aber zum Abschluss noch einige Aspekte diskutieren, die vor allem deshalb von Interesse sind, weil sie eine besonders anschauliche *geometrische* Interpretation zulassen, die ohne eine kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen nicht möglich ist.

Wie wir wissen, lässt sich die allgemeine Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen leicht angeben. Betrachten wir zuerst wieder die Formulierung (6.14), die auf ein festes Inertialsystem Bezug nimmt. Als Parameter müssen wir ein *elektrisches Potential* ϕ und ein *Vektorpotential* \vec{A} einführen. Beide können beliebig als Funktion von Ort und Zeit vorgegeben werden. Die homogenen Maxwellgleichungen sind dann durch die folgenden Felder identisch erfüllt,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (6.41)$$

Wir wollen nun zeigen, dass auch diese Parametrisierung der Lösungen eine kovariante Formulierung zulässt. Dazu kombinieren wir zuerst das elektrische Potential ϕ und Vektorpotential \vec{A} zu einem 4-Vektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Die Behauptung ist nun, dass die Darstellung (6.41) äquivalent ist zu folgender Tensorgleichung,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (6.43)$$

Das ist folglich die allgemeine Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen, parametrisiert durch ein 4-Potential A_{μ} . Dass (6.43) eine Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen ist, lässt sich unmittelbar verifizieren, denn

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 2 \partial_{[\mu} \partial_{\nu} A_{\rho]} = 0. \quad (6.44)$$

Dass die Darstellung (6.43) zu (6.41) äquivalent ist, lässt sich am besten wieder durch komponentenweises Ausschreiben verifizieren. Die Gleichung (6.43) hat sechs unabhängige Komponenten, denn auf beiden Seiten steht ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe. Betrachten wir zuerst die räumlichen Komponenten, so finden wir zum Beispiel

$$B_z = F_{xy} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (6.45)$$

Das ist die z -Komponente der ersten Gleichung (6.41). Die anderen ergeben sich ebenso. Entsprechend gilt für die Zeitkomponenten

$$E_z = F_{zt} = \partial_z A_t - \partial_t A_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (6.46)$$

Hier müssen wir ein wenig mit den Vorzeichen aufpassen, denn es gilt laut (6.42) $A^t = \phi$, also $A_t = -\phi$. Wir bekommen also die z -Komponente der zweiten Gleichung (6.41), und entsprechend ergeben sich auch die anderen Komponenten.

Eine andere Eigenschaft der Potentiale, die wir ebenfalls aus der Elektrodynamik kennen, ist die *Eichinvarianz* der Felder. Die Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichungen werden durch die Potentiale zwar vollständig, aber nicht eindeutig parametrisiert. Wenn wir in (6.41) folgende *Eichtransformation* durchführen,

$$\phi \mapsto \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad (6.47)$$

wobei Λ ein reellwertiges Feld auf der Raumzeit ist, so ändern sich die Felder \vec{E} und \vec{B} nicht. Offenbar können wir auch diese Tatsache kovariant formulieren. Wenn nämlich Λ ein skalares Feld ist, so wird durch

$$A_{\mu} \mapsto A_{\mu} + \partial_{\mu} \Lambda \Rightarrow F_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} \Lambda - \partial_{\nu} \partial_{\mu} \Lambda = F_{\mu\nu}, \quad (6.48)$$

eine Transformation des 4-Vektors A_{μ} definiert, die sich aber auf den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ nicht auswirkt. Das Vektorpotential A_{μ} ist also durch die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ nur bis auf den Gradienten $\partial_{\mu} \Lambda$ eines skalaren Feldes bestimmt.

Aufgabe 6.9 Mit Hilfe des 4-Vektorpotentials lässt sich für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld auch eine kovariante Wirkung angeben. Man zeige, dass die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\zeta, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\zeta} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + q A_\mu(\mathbf{x}) \dot{x}^\mu - \frac{\zeta}{2} m^2, \quad (6.49)$$

genau auf die Bewegungsgleichungen (6.9) führt, also die Kopplung des Teilchen an das Feld richtig beschreibt. Ist die Wirkung dann noch immer invariant unter Reparametrisierungen der Kurve? Und wie wirkt sich eine Eichtransformation (6.48) des Vektorpotentials auf die Wirkung aus?

Retardierte Potentiale

Zum Schluss wollen wir auch noch schnell einen Blick auf die Lösungen der inhomogenen Maxwell-Gleichungen werfen. Auch hier ermöglicht die kovariante Formulierung einen interessanten geometrischen Einblick in die Eigenschaften der elektromagnetischen Felder. Da wir die homogenen Maxwell-Gleichungen bereits gelöst haben, können wir die inhomogenen Gleichungen nun durch A_μ statt $F_{\mu\nu}$ ausdrücken. Es ergibt sich

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -4\pi j^\nu. \quad (6.50)$$

Nun können wir noch folgenden Trick benutzen, um die Gleichungen zu vereinfachen. Wegen der Eichfreiheit können wir an das Vektorpotential A_μ weitere Bedingungen stellen, solange wir dadurch nicht die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ einschränken. Solche Einschränkungen werden als *Eichbedingungen* bezeichnet und sind ebenfalls aus der Elektrodynamik bekannt. Wir werden deshalb hier nicht weiter darauf eingehen, sondern einfach eine solche Eichbedingung stellen. Wir wählen die sogenannte *Lorentz-Eichung*, die sich auch wieder als eine Tensorgleichung formulieren lässt, nämlich

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (6.51)$$

Wenn wir diese zusätzliche Bedingung an A_μ stellen, dann vereinfachen sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen zu

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -4\pi j^\nu. \quad (6.52)$$

Wir erhalten also separate Differentialgleichungen für die vier Komponenten A^μ des Vektorpotentials, und diese enthalten die jeweilige Komponente j^μ des Stromes als *Quelle*. Wenn keine Quellen vorhanden sind, und wir den Vektor A_μ durch ein skalares Feld ϕ ersetzen, erhalten wir sogar genau die Wellengleichung, die wir in Kapitel 2 als vereinfachte Version der Elektrodynamik betrachtet haben. Damit wäre auch diese Annahme gerechtfertigt.

Hier interessieren uns aber nicht die wellenartigen Lösungen der Gleichungen (6.52) ohne Quellen, sondern die Felder, die durch die Ladungen und Ströme erzeugt werden. Wir suchen also eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichungen mit gegebenen Quellen, zu der wir dann eine beliebige Lösung der quellenfreien Gleichungen, also ein Welle, addieren können.

Auch für dieses Standardproblem der Elektrodynamik gibt es eine Lösung. Wir spalten die zu lösenden Gleichungen (6.52) zunächst wieder in ihre Raum- und Zeitanteile auf, um sie so auf eine vielleicht besser bekannte Form zu bringen. Sie lauten dann

$$\Delta\phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -4\pi\rho, \quad \Delta\vec{A} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -4\pi\vec{j}, \quad (6.53)$$

wobei $\Delta = \vec{\nabla}^2$ der räumliche Laplace-Operator in einem festen Inertialsystem Σ ist. Wie man eine solche Gleichung mit Hilfe von *Greenschen Funktionen* löst, setzen wir als bekannt voraus. Als Lösungen findet man¹

$$\phi(t, \vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \int d^3y \frac{\vec{j}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (6.54)$$

Die Integration erfolgt dabei über den dreidimensionalen Raum, wobei für die Zeitkoordinaten jeweils die *retardierte Zeit* einzusetzen ist, also der Zeitpunkt, an dem ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit am Ort \vec{y} loslaufen muss, um zur Zeit t bei \vec{x} anzukommen. Wenn $|\vec{x} - \vec{y}|$ der räumliche Abstand ist, und $c = 1$ gesetzt ist, ergibt sich dieser Zeitpunkt zu $t - |\vec{x} - \vec{y}|$. Es folgt also unmittelbar aus den Maxwell-Gleichungen, dass sich Signale in der Elektrodynamik grundsätzlich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Wir wollen nun zeigen, dass sich dieser Sachverhalt im Rahmen der Relativitätstheorie in einer sehr eleganten, geometrischen Art und Weise ausdrücken lässt. Zunächst fassen wir, wie gehabt, Ladung und Strom wieder zu einem 4-Vektor zusammen, und ebenso die Potentiale,

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (6.55)$$

Dann wird aus (6.54)

$$\mathbf{A}(t, \vec{x}) = \int d^3y \frac{\mathbf{j}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (6.56)$$

Das ist aber noch keine Tensorgleichung, denn integriert wird auf der rechten Seite noch immer über einen dreidimensionalen Raum, und die Integrationsvariablen sind die Koordinaten eines bestimmten Inertialsystems Σ . Zunächst ist also gar nicht offensichtlich, wie wir daraus einen kovarianten Ausdruck machen sollen.

Wenn wir aber genauer hinschauen, dann erkennen wir, dass die Integration eigentlich gar nicht über den dreidimensionalen Raum in einem bestimmten Inertialsystem erfolgt, sondern wegen der retardierten Zeitkoordinate über den *Rückwärtslichtkegel*. Wenn wir das Ereignis $\mathbf{x} = (t, \vec{x})$ auf der linken Seite festhalten, dann integrieren wir auf der rechten Seite über alle Ereignisse $\mathbf{y} = (t', \vec{y})$ mit $t - t' = |\vec{x} - \vec{y}|$, also alle Ereignisse $\mathbf{y} \in \mathcal{L}^-(\mathbf{x})$, die zu \mathbf{x} lichtartig und in der Vergangenheit liegen.

¹Siehe z.B. *Greiner, Band 3: Elektrodynamik*.

Da nun aber der Rückwärtslichtkegel $\mathcal{L}^-(\mathbf{x})$ eine Teilmenge der Raumzeit ist, die nur vom Ereignis \mathbf{x} , nicht aber vom Bezugssystem abhängt, sollte es möglich sein, auch das Integral unabhängig vom Bezugssystem zu formulieren. Auch das ist allerdings nicht sofort offensichtlich. Wie, zum Beispiel, sollen wir den Abstand $|\vec{x} - \vec{y}|$ ausdrücken, wo wir doch auf dem Lichtkegel gar keine Entfernungen messen können?

Um zu zeigen, dass es trotzdem geht, verwenden wir nochmal den Trick, den wir schon bei der Berechnung der Stromdichte eines einzelnen Teilchens benutzt haben. Wir führen zusätzlich eine Zeitintegration ein, entfernen diese aber gleich wieder durch eine Deltafunktion. Wir schreiben also

$$\mathbf{A}(t, \vec{x}) = \int dt' d^3y \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \mathbf{j}(t', \vec{y}). \quad (6.57)$$

Ausführen der t' -Integration führt dann sofort zurück auf (6.56). Jetzt benutzen wir noch, dass

$$\frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 2 \delta((t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2) \Theta(t - t'), \quad (6.58)$$

wobei Θ die Stufenfunktion ist, mit $\Theta(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$. Das folgt aus einer allgemeinen Eigenschaft der Deltafunktion, nämlich

$$\delta(f(x)) = \sum_{f(x_n)=0} \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad (6.59)$$

wobei die Summe über alle Nullstellen der Funktion f erfolgt. Die Stufenfunktion in (6.58) sorgt dafür, dass nur eine der beiden Nullstellen der quadratischen Funktion zur Summe über die Nullstellen beiträgt, nämlich die mit $t' < t$. Aus (6.57) wird also

$$\mathbf{A}(t, \vec{x}) = 2 \int dt' d^3y \delta((t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2) \Theta(t - t') \mathbf{j}(t', \vec{y}). \quad (6.60)$$

Nun brauchen wir nur noch die Raum-Zeit-Aufspaltung wieder rückgängig zu machen. Wir schreiben also \mathbf{x} statt (t, \vec{x}) , \mathbf{y} statt (t', \vec{y}) und $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$ statt $(t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$. Dann erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 2 \int d^4\mathbf{y} \delta((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2) \Theta(x^t - y^t) \mathbf{j}(\mathbf{y}). \quad (6.61)$$

Das ist aber offenbar wieder eine Tensorgleichung. Die Integration erfolgt jetzt über die ganze Raumzeit, das Integrationsmaß $d^4\mathbf{y}$ ist unter Poincaré-Transformationen invariant, das gleiche gilt für das Argument der Deltafunktion, das genau dann verschwindet, wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} zueinander lichtartig liegen, und schließlich ist $\mathbf{j}(\mathbf{y})$ ein 4-Vektor genau wie $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Einzig problematisch ist die Stufenfunktion. Aber auch sie ist ein Skalar. Denn wir wissen, dass für zeitartige und lichtartige Vektoren das Vorzeichen der Zeitkomponente in allen Bezugssystemen gleich ist. Es unterscheidet zwischen positiven und negativen zeitartigen bzw. lichtartigen

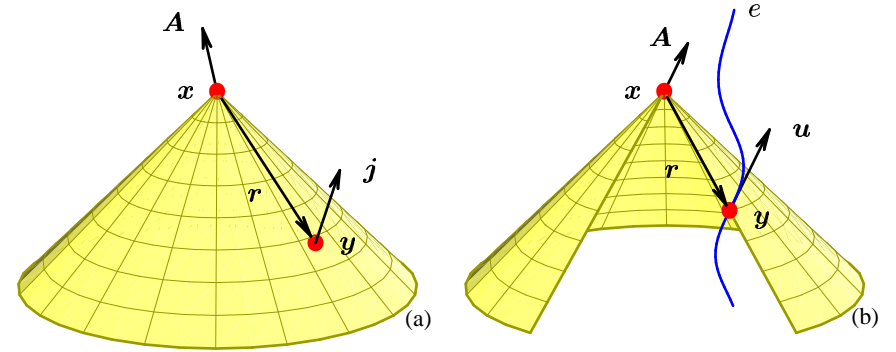


Abbildung 6.1: Das Vektorpotential \mathbf{A} an einem Ereignis \mathbf{x} ergibt sich durch Integration der 4-Stromdichte \mathbf{j} über den Rückwärtslichtkegel von \mathbf{x} , also über alle Ereignisse \mathbf{y} mit $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathcal{L}^-$. Ist nur ein einziges Teilchen mit der Ladung q vorhanden, so ist das Vektorpotential \mathbf{A} am Ereignis \mathbf{x} proportional zur 4-Geschwindigkeit \mathbf{u} des Teilchens an demjenigen Ereignis \mathbf{y} , an dem es von \mathbf{x} aus gesehen wird, wo also seine Weltlinie den Lichtkegel schneidet.

Vektoren. Da die Deltafunktion nur für lichtartige Abstandsvektoren $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ einen Beitrag liefert, schränkt die Stufenfunktion die Integration auf negative lichtartige Vektoren \mathbf{r} ein, also auf den Rückwärtslichtkegel von \mathbf{x} . Wir können auf den Abstandsvektor \mathbf{r} als Integrationsvariable verwenden, um das deutlich zu machen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 2 \int d^4\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \Theta(-r^t) \mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{r}). \quad (6.62)$$

Eine graphische Darstellung dieses Sachverhaltes finden wir in Abbildung 6.1(a). Dort ist ein Ereignis \mathbf{x} gezeigt, an dem das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ermittelt werden soll. Dieses Vektorpotential *sieht* alles, was auf dem Rückwärtslichtkegel $\mathcal{L}^-(\mathbf{x})$ passiert, oder genauer, welche Ströme durch diesen hindurchfließen. Genau das drückt das Integral (6.62) aus. Es wird über alle Ereignisse auf dem Rückwärtslichtkegel integriert, und die Ströme werden sozusagen aufgesammelt.

Das Verblüffende an diesem Ergebnis ist, dass das Integral (6.62) nicht nur diese einfache geometrische Interpretation hat, sondern dass dort überhaupt keine *Abstände* mehr eine Rolle spielen, denn solche gibt es auf dem Lichtkegel ja nicht. Die Eigenschaft der Potentiale, mit $1/r$ abzufallen, die in (6.57) noch offensichtlich war, scheint nun auf eine merkwürdig implizite Art und Weise in der vierdimensionalen Deltafunktion kodiert zu sein, die das Integrationsmaß auf dem Lichtkegel definiert.

Aufgabe 6.10 Man zeige, dass das Vektorpotential (6.62) die Lorentz-Eichung (6.51) erfüllt.

Um zu sehen, wie der Abstand letztlich doch in des Integral eingeht, betrachten wir zum Schluss als Beispiel ein Feld, das durch ein einziges Teilchen erzeugt wird. Das Teilchen habe die Ladung q und bewege sich auf einer Weltlinie $\lambda(\tau)$, wobei τ die Eigenzeit ist. Wir können dann die Formel (6.36) leicht verallgemeinern, und erhalten folgende Stromdichte,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = q \int d\tau \mathbf{u}(\tau) \delta(\mathbf{x} - \lambda(\tau)), \quad \text{wobei} \quad \mathbf{u}(\tau) = \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}. \quad (6.63)$$

Wenn wir diese Stromdichte in das Integral (6.62) einsetzen, erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 2q \int d\tau \int d^4\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \Theta(-r^t) \mathbf{u}(\tau) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \lambda(\tau)). \quad (6.64)$$

Jetzt können wir die zweite Deltafunktion verwenden, um das Integral über \mathbf{r} auszuführen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 2q \int d\tau \delta((\lambda(\tau) - \mathbf{x})^2) \Theta(x^t - \lambda^t(\tau)) \mathbf{u}(\tau). \quad (6.65)$$

Die verbleibende Deltafunktion ist eine eindimensionale Deltafunktion, denn das Argument ist eine reelle Zahl. Wir können sie deshalb verwenden, um die Integration über τ auszuführen. Sie liefert einen Beitrag genau dann, wenn die Ereignisse \mathbf{x} und $\lambda(\tau)$ zueinander lichtartig liegen, und die Stufenfunktion sorgt dafür, dass nur genau das Ereignis beiträgt, das auf dem Rückwärtslichtkegel von \mathbf{x} liegt.

Da es nur einen solchen Schnittpunkt der Weltlinie mit dem Rückwärtslichtkegel geben kann, gibt es auch nur eine Stelle $\tau = \tau_0$, an der die Deltafunktion einen Beitrag zum Integral liefert. Es gilt also

$$\delta((\lambda(\tau) - \mathbf{x})^2) \Theta(x^t - \lambda^t(\tau)) = \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{2|\mathbf{u}(\tau_0) \cdot (\lambda(\tau_0) - \mathbf{x})|}, \quad (6.66)$$

denn für das Argument der Deltafunktion gilt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\lambda(\tau) - \mathbf{x})^2 = 2 \mathbf{u}(\tau) \cdot (\lambda(\tau) - \mathbf{x}). \quad (6.67)$$

Damit können wir das Integral schließlich auswerten. Bezeichnen wir, wie in Abbildung 6.1(b) dargestellt, das Ereignis, an dem die Weltlinie des Teilchens den Rückwärtslichtkegel von \mathbf{x} schneidet, mit \mathbf{y} , sowie den Abstandsvektor mit $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ und die momentane Geschwindigkeit des Teilchens an dieser Stelle mit \mathbf{u} , so wird

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}. \quad (6.68)$$

Den Betrag im Nenner können wir weglassen, denn das Produkt eines positiven zeitartigen Vektors \mathbf{u} mit einem negativen lichtartigen Vektor \mathbf{r} ist stets positiv.

Wir erhalten also ein verblüffend einfaches Ergebnis, das zudem auch noch offensichtlich kovariant ist. Und wir sehen auch andeutungsweise das “ $1/r$ ”-Verhalten des Potentials wieder auftauchen. Da \mathbf{u} die 4-Geschwindigkeit des Teilchens ist, wird der räumliche Abstand r offenbar im Ruhesystem des Teilchens gemessen, also $r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$

Als einfachstes Beispiel können wir ein gleichförmig bewegtes Teilchen betrachten, und uns in das Ruhesystem des Teilchens begeben. Die Weltlinie des Teilchens sei also gegeben durch $\lambda^t(\tau) = \tau$ und $\vec{\lambda}(\tau) = 0$, so dass $u^t(\tau) = 1$ und $\vec{u}(\tau) = 0$. Wenn \mathbf{x} irgendein Ereignis ist, mit Zeitkoordinate t und Ortsvektor \vec{x} , so finden wir den Vektor \mathbf{r} als denjenigen zur Weltlinie zeigenden Vektor, der negativ lichtartig ist. Es muss also gelten $\vec{r} = -\vec{x}$ und folglich $r^t = -|\vec{x}|$. Daraus wiederum folgt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = -u^t r^t = |\vec{x}|$, und das können wir in (6.68) einsetzen. Das Ergebnis ist

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x}|}, \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = 0. \quad (6.69)$$

Das ist aber genau das bekannte Coulomb-Potential einer im Koordinatenursprung ruhenden Ladung.

Aufgabe 6.11 Man leite aus (6.68) den Feldstärke-Tensor her und zeige, dass das elektromagnetische Feld einer Punktladung aus zwei Anteilen besteht. Einer davon fällt mit $1/r^2$ ab (statisches Feld), der andere ist proportional zur Beschleunigung des Teilchens und fällt mit $1/r$ ab (Strahlungsfeld). Dabei ist r der Abstand zur Weltlinie, gemessen in einem Inertialsystem Σ , in dem sich das Teilchen für immer in einem endlichen Raumgebiet aufhält.

Index Teil I

- Aberration, 51
- absolute Zeit, 7
- Abstand
 - auf dem Lichtkegel, 45, 71
 - räumlicher
 - in der klassischen Mechanik, 8
 - in der Relativitätstheorie, 17, 38
 - Messung, 18
 - zeitlicher
 - in der klassischen Mechanik, 7
 - in der Relativitätstheorie, 20, 37
 - Messung, 14
- Abstandsvektor
 - im affinen Raum, 1
- affiner Raum, 1
 - zugeordneter Vektorraum, 1
- affiner Unterraum, 46
- Alibi, 24
- antiorthochrone Lorentz-Transformation, 42
- antisymmetrischer Tensor, 26, 67
- Äther, 10

- Basis
 - duale, 24
 - eines Vektorraumes, 1
 - Orthonormal-, 23, 29, 36
- Beschleunigung
 - im momentanen Ruhesystem, 55
 - kovariante Definition, 54
- Bilinearform, 3, 25, 26

- dimensionslos, 14
- Doppler-Effekt, 49
- Drehmatrix
 - der Signatur (p, q) , 32
 - räumliche, 3
 - verallgemeinert, 5
 - verallgemeinerte, 30

- dual
 - Basis, 24
 - Vektorraum, 24

- Ebene, 48
- Eichbedingung, 70
- Eichfreiheit, 61, 69
- Eichtransformation
 - für das freie Teilchen, 61
 - in der Elektrodynamik, 69
- eigentliche Lorentz-Transformation, 42
- Eigenzeit, 52
- Einbein, 60
- Einheit
 - natürliche, 14
- Einheitskugel
 - im Minkowski-Raum, 39
 - in der zweidimensionalen Raumzeit, 23
 - raumartig und zeitartig, 40
- Einheitsvektor
 - raumartig, zeitartig, 29
- elektrisches Potential, 9, 69
- Elektrodynamik
 - kovariante Formulierung, 65
 - vereinfachte, 9
- entartet, 7, 48
- Ereignis, 1
- Euklidische Metrik, 3
- Euler-Lagrange-Gleichungen, 56

- Feldstärketensor, 65
- freies Teilchen, 56

- Galilei-Gruppe, 6
- Gamma-Faktor, 12, 54
- Gegenwart, 24, 39
- Geometrie
 - des dreidimensionalen Raumes, 3

- des Minkowski-Raumes, 45
- Gerade, 56
- Geschwindigkeit, 2
 - Additionstheorem, 14
 - der Signalausbreitung, 19
 - kovariante Definition, 52
- gleichzeitig, 45
 - in der klassischen Mechanik, 7
 - in der Relativitätstheorie, 15
- Grenzgeschwindigkeit, 19
- Gruppe
 - Galilei-, 6
 - $GL(d)$, 33
 - $ISO(p, q)$, 32
 - $ISO(1, 3)$, 42
 - Lorentz-, Poincaré-, 42
 - $O(p, q)$, 30
 - $O(1, 3)$, 42
- Halbwertszeit, 62
- Hyperbel, 23
- Hyperboloid
 - einschalig, 39
 - zweischalig, 40
- Hyperebene, 46
- ideale Uhr, 54
- Index, 1
 - hoch und runter ziehen, 29
 - Position, 25
- Indexnotation, 25
- Inertialsystem
 - in der klassischen Mechanik, 5
 - in der Relativitätstheorie, 36
- Integral, 35
- Interferometer, 10
- Invariante, 42
- Invarianzgruppe, 30
- Isometriegruppe, 31
 - $ISO(d)$, $ISO(p, q)$, 32
 - $ISO(1, 3)$, 42
- Matrixdarstellung, 32
- kartesische Koordinaten, 31, 36
- kausale Struktur, 39, 45
- Kausalitätsprinzip, 19
- klassische Mechanik, 5
- Kontinuitätsgleichung, 69
- Kontraktion
 - Index-, 25
- konvex, 38
- Koordinaten, 1
- Koordinatensystem
 - kartesisch, 31, 36
 - räumliches, 3
- kovariant, 52
- Kraft
 - kovariante Definition, 63
 - Lorentz-, 65
- Kronecker-Symbol, 3
- Kronecker-Tensor, 26
- Kurvenlänge, 56
- Lagrange-Formalismus, 57
- Länge, 3, 22
- Längeneinheit, 13
- Längenkontraktion, 18
- Laufzeit, 11
- Leistung, 63
- Levi-Civita-Tensor, 34
- lichtartig
 - Ebene, 48
 - Hyperebene, 46
 - positiv, negativ, 22
 - Vektor, 22, 38
- Lichtgeschwindigkeit
 - als Naturkonstante, 9
 - “gleich Eins”, 13
 - Messung, 10
 - Richtungsabhängigkeit, 10
 - Unabhängigkeit vom Bezugssystem, 13
- Lichtkegel, 23, 38

- Lorentz-Eichung, 70
- Lorentz-Gruppe, 42
- Lorentz-Kraft, 65
- Lorentz-Metrik, 36
- Lorentz-Transformation
 - antiorthochron, 42
 - eigentlich, 42
 - graphische Darstellung, 13
 - in zwei Dimensionen, 13
 - orthochron, 42
 - uneigentlich, 42
- Masse
 - effektive, 64
 - Ruhe-, 64
 - träge, 64
- masselos, 62
- Maxwell-Gleichungen, 66
- Mechanik
 - klassische, 5
 - relativistische, 52
- Medium, 10
- Metrik
 - als Diagonalmatrix, 29
 - der zweidimensionalen Raumzeit, 20
 - des Raumes, 3
 - entartet, 28
 - Euklidische, 3
 - Index hoch und runter ziehen, 29
 - Invarianzgruppe, 30
 - inverse, 28
 - invertierbar, 28
 - Lorentz-, 36
 - positiv, 29
 - Signatur, 30
 - als Tensor, 28
- Minkowski-Raum, 36
- Multilinearform, 25
- Naturkonstante, 9
- natürliche Einheit, 14
- Norm, 7
- Nullvektor, 22, 29
- Orbit, 42
- orthochrone Lorentztransformation, 42
- orthogonal
 - Raum und Zeit, 23
 - Vektoren, 29
- orthogonale Gruppe
 - Matrixdarstellung, 31
 - $O(d)$, $O(p, q)$, 30
 - $O(1, 1)$, 32
 - $O(1, 3)$, 42
 - Signatur, 30
 - Zusammenhangskomponenten, 31
- Orthogonalraum, 29
- Orthonormalbasis, 23, 29, 36
- parametrisierte Kurve, 2
- Photon, 62
- Poincaré-Gruppe, 42
- Potential
 - elektrisches, 9
 - elektromagnetisches Vektor-, 69
- Pseudotensor, 33
- Rapidität, 33
- Raum-Zeit-Aufspaltung, 5, 36
- raumartig
 - Ebene, 48
 - Ereignisse, 45
 - Hyperebene, 46
 - in der klassischen Mechanik, 7
 - Vektor, 21, 38
- räumlicher Abstand
 - in der klassischen Mechanik, 8
 - in der Relativitätstheorie, 17, 38
 - Messung, 18
- Raumspiegelung, 33
- Raumzeit
 - allgemein, 1

- in der klassischen Mechanik, 5
- Minkowski-Raum, 36
- Vektor, 1
- Relativität
 - der Gleichzeitigkeit, 17
 - des Raumes, 17
- Relativitätsprinzip
 - in der klassischen Mechanik, 5
 - räumliches, 4
 - von Poincaré und Einstein, 11
- Reparametrisierung
 - als Eichfreiheit, 61
 - einer Weltlinie, 2, 52
- Ruhemasse, 64
- Ruhesystem
 - des Äthers, 11
- Scherung, 6
- Signalgeschwindigkeit, 19
- Signatur, 30, 45
- Skalar, 25
- Skalarprodukt, 25
- Spiegelung, 33
- Summenkonvention, 1, 25
- Symmetrie
 - der klassischen Raumzeit, 5
 - des Minkowski-Raumes, 40
 - des Raumes, 3
- symmetrischer Tensor, 26, 67
- synchronisieren, 16
- Tangentenvektor
 - einer Weltlinie, 2
- Tangentialvektor
 - normierter, 8, 52
- Teilchen
 - freies, 56
 - geladenes, 65
 - masseloses, 62
- Tensor
 - antisymmetrisch, 26
 - antisymmetrisieren, 67
 - Kontraktion, 28
 - als Multilinearform, 25
 - n -ter Stufe, 25
 - nullter Stufe, 26
 - Pseudo-, 33
 - der Stufe (m, n) , 26
 - symmetrisch, 26
 - symmetrisieren, 67
 - als Tabelle, 25
 - Transformationsverhalten, 25
 - Verjüngung, 28
 - Verknüpfung, 27
- Tensorfeld
 - Ableitung, 28
 - auf der Raumzeit, 27
 - Verhalten unter Koordinatentransformationen, 27
- Tensorkalkül, 24
- Transformationsverhalten
 - von Tensoren, 25
 - von Vektoren, 25
- Trägheit, 64
- Überlichtgeschwindigkeit, 19
- Uhr
 - ideale, 54
 - synchronisieren, 16
- Uhrenhypothese, 53
- uneigentliche Lorentz-Transformation, 42
- Unterraum
 - affiner, 46
- Vektor
 - 3-Vektor, 4-Vektor, 5
 - Einheits-, 29
 - Null-, 22, 29
 - orthogonal, 29
 - Transformationsverhalten, 25
- Vektorpotential, 69
- Vektorraum
 - Basis, 1, 24

- dualer, 24
 - einem affinen Raum zugeordneter, 1
- Vergangenheit, 23, 39
- Volumenform, 36

Wellengleichung, 9, 37, 70

Weltlinie

- Koordinatengleichung, 2
 - als Kurve in der Raumzeit, 2
- Reparametrisierung, 2

Weltraumreisen, 40

Winkel, 3

Zeit

- absolute, 7
- Messung, 14

zeitartig

- Ebene, 48
- Ereignisse, 45
- Hyperebene, 46
- in der klassischen Mechanik, 7
- positiv, negativ, 21
- Vektor, 21, 37

Zeitdilatation

- auf dem Mondflug, 16
- graphische Darstellung, 15

Zeiteinheit, 13

zeitlicher Abstand

- in der klassischen Mechanik, 7
- in der Relativitätstheorie, 20, 37
- Messung, 14

Zeitspiegelung, 33

zugeordneter Vektorraum, 1

Zukunft, 23, 39

Zwillingsparadoxon, 16