Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

13. Übungsblatt

Ausgabe: 25.1.2016 Abgabe: Montag, 1.2.2016 Besprechung: 2.-4.1.2016

Aufgabe 35: $(6 + 4)$

Weiße Zwerge bestehen aus ionisierten Kernen und freien Elektronen. Die Fermi-Temperatur ist in der Größenordnung von einigen 10^9 K, so dass das Elektronengas stark entartet ist. Dem hohen Nullpunktsdruck des Elektronengases wirkt die Gravitationsanziehung der Kerne entgegen. Die Coulomb-Wechselwirkung ist bei den in weißen Zwergen vorliegenden sehr hohen Dichten vernachlässigbar; deshalb kann das Elektronengas als frei betrachtet werden. Bei hohen Temperaturen wird eine relativistische Behandlung erforderlich, d.h. die 1-Teilchenenergien sind dann durch $\epsilon_p = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2}$ gegeben. Die Zahl der Elektronen sei N. Man kann annehmen, dass die ionisierten Kerne praktisch alle Heliumkerne sind (also ist ihre Anzahl gleich $N/2$). Diese sollen als ruhend angenommen werden.

a) Berechnen Sie den Nullpunktsdruck für die Grenzfälle

$$x_F \ll 1 : \qquad P_0 = \frac{m_e c^2}{5v} x_F^2$$
$$x_F \gg 1 : \qquad P_0 = \frac{m_e c^2}{4v} x_F \left(1 - \frac{1}{x_F^2}\right)$$

mit $x_F = p_F/m_e c$, $v = V/N$. Wie hängt der Nullpunktsdruck vom Radius des Sterns ab (beachten Sie die Volumenabhängigkeit von p_F)?
Hinweise: Der erste Fall ($x_F \ll 1$) entspricht dem nicht-relativistischen Grenzfall. Für den relativistischen Fall $x_F \gg 1$ können die Formeln aus der Vorlesung (für das großkanonische Potential, die mittlere Energie, den Druck) *nicht* übernommen werden. Berechnen Sie zunächst das großkanonische Potential und zeigen Sie, dass es in der Form

$$\Phi(V, T, \mu) = -\frac{V}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^3 \frac{\mathrm{d}\epsilon_p}{\mathrm{d}p} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} \qquad (1)$$

geschrieben werden kann. Leiten Sie daraus den Ausdruck für den Druck P_0 bei der Temperatur $T = 0$ her. Begründen Sie, dass bei der Temperatur $T = 0$ der Zusammenhang zwischen chemischem Potential und Fermi-Impuls einfach durch $\mu = \epsilon_F := \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_F c)^2}$ gegeben ist. Sie können sich die Schreibarbeit ein wenig erleichtern, indem Sie vorübergehend $c = 1$ setzen.

b) Leiten Sie eine Beziehung zwischen der Masse M des Sterns und seinem Radius R für die beiden Fälle $x_F \ll 1$ und $x_F \gg 1$ her. Zeigen Sie, dass für $x_F \ll 1$ diese Beziehung in der Form

$$R = R_F N^{-1/3} \qquad (2)$$

geschrieben werden kann (Fowler-Gesetz). R_F ist eine nur aus Naturkonstanten gebildete Länge, $R_F = \beta\hbar^2 c^2/m_e m_p^2 G$, wobei β eine Zahl in der Größenordnung 1 ist. Zeigen Sie, dass ein weißer Zwerg keine größere Masse haben kann als

$$M_C = K \left(\frac{\hbar c}{\alpha G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2},$$

wobei K eine aus einfachen Zahlen und π gebildete Konstante ist (Chandasekhar-Grenze, S. Chandrasekhar, Nobelpreis 1983).
Hinweise: Wird ein Stern bei gegebener Masse $M = 2m_p N$ auf den Radius R komprimiert, so erniedrigt sich seine Energie um die Gravitationsenergie, die für eine homogene Massenverteilung die Form $E_g = -\alpha GM^2/R$ hat (α is eine Zahl der Größenordnung 1, $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^3/kg s^2 ist die Gravitationskonstante, $m_p = 1.7 \times 10^{-21}$ kg die Protonmasse). Die Bedingung für das Gleichgewicht zwischen Gravitationsenergie und der Grundzustandsenergie der Elektronengases kann in der Form

$$\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}V} + \frac{\mathrm{d}E_g}{\mathrm{d}V} = 0$$

geschrieben werden, wobei $\mathrm{d}E_0 = -P_0(V)\mathrm{d}V$ das Differential der Grundzustandsenergie bei Änderung des Volumens ist. Für einen weißen Zwerg großer Masse ist die Dichte so groß, dass der relativistische Fall untersucht werden muss.

Literatur: Diu, Guthmann, Lederer, Roulet, "Grundlagen der Statistischen Physik".

Bitte notieren Sie auf den Übungsblättern, wie viel Zeit Sie für die Ausarbeitung Ihrer Lösung benötigt haben.