

**Theoretische Physik 4**  
**Statistische Physik und Thermodynamik**  
H. Spiesberger

**12. Übungsblatt**

Ausgabe: 18.1.2016

Abgabe: Montag, 25.1.2016

Besprechung: 26.-28.1.2016

---

**Aufgabe 34:** (3 + 1 + 2 + 3)

In dieser Aufgabe sollen Sie einige Rechnungen aus der Vorlesung für ein ideales Quantengas von  $N$  identischen, nicht-relativistischen Teilchen mit Spin  $s$  auf den Fall eines quaderförmigen Volumens der Seitenlänge  $L$  in  $D$  Dimensionen verallgemeinern. Für verschwindendes äußeres Magnetfeld ergeben sich mit periodischen Randbedingungen die spinunabhängigen Einteilchenenergien dann aus  $D$ -dimensionalen Impulsen,

$$\epsilon_{\mathbf{a}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} (n_1, n_2, \dots, n_D).$$

Hier ist mit  $\mathbf{a} = (n_1, n_2, \dots, n_D; \lambda)$  die Liste der Quantenzahlen bezeichnet:  $n_i \in \mathbb{Z}$  für den Impuls,  $\lambda = -s, -s+1, \dots, +s$  für die Spinorientierung. Da die  $N$ -Teilchenzustände entweder vollständig symmetrisch oder vollständig antisymmetrisch sind, können sie vollständig durch Besetzungszahlen  $\{n_{\mathbf{a}}\}$  mit  $\sum_{\mathbf{a}} n_{\mathbf{a}} = N$  bestimmt werden.

- a) Berechnen Sie analog zur Vorlesung das großkanonische Potential  $\Phi(L, T, \mu)$  für großes Volumen, indem Sie die Summe über Zustände als Integral im Impulsraum schreiben.
- b) Zeigen Sie, dass die Beziehung zwischen Energie und Druck von der Dimension des Volumens ( $V = L^D$ ) abhängt:

$$E = \frac{D}{2} PV.$$

- c) Für halbzahligen Spin gilt das Pauliprinzip und bei der Temperatur  $T = 0$  ist der Grundzustand des  $N$ -Teilchensystems derjenige, in dem die  $N$  1-Teilchenzustände mit der niedrigsten Energie besetzt sind,  $\epsilon_{\mathbf{a}} \leq \epsilon_F$ . Berechnen Sie die Fermi-Energie  $\epsilon_F$  und den Fermi-Impuls  $p_F$ .
- d) Berechnen Sie das chemische Potential  $\mu(T, N/V)$  für  $T \rightarrow 0$  einschließlich des Termes der Ordnung  $T^2$  und vergleichen Sie mit dem Fall für  $D = 3$ .

---

*Bitte notieren Sie auf den Übungsblättern, wie viel Zeit Sie für die Ausarbeitung Ihrer Lösung benötigt haben.*