Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

6. Übungsblatt

Ausgabe: 23.11.2015 Abgabe: Montag, 30.11.2015 Besprechung: 1.-3.12.2015

Aufgabe 17: $(2+2)$

a) Berechnen Sie die Entropie $S[P_G]$ einer Gauß-Verteilung zum Mittelwert 0 mit Schwankungsquadrat σ^2:

$$P_G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \,. \tag{1}$$

(*Ergebnis:* $S[P_G] = \frac{1}{2}k\ln(2\pi e\sigma^2)$).

b) Zeigen Sie, dass für beliebige normierte Verteilungen $P(x)$ mit gegebenem Schwankungsquadrat $\int dx x^2 P(x) = \sigma^2$ die Gauß-Verteilung die maximale Entropie besitzt: $S[P] \leq S[P_G]$ (zweites Gibbs'sches Theorem). *Hinweis:* Übertragen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Ungleichung

$$\mathrm{Sp}\left(\rho(\ln\rho_1 - \ln\rho)\right) \leq 0 \tag{2}$$

für zwei Dichteoperatoren ρ und ρ_1 auf den Fall von kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(x)$ und $P_1(x)$ und wählen Sie $P_1(x)$ geeignet.

Aufgabe 18: (2)

Diskutieren Sie die Stabilitätsbedingung für die Zerlegung eines Systems in der mikrokanonischen Gesamtheit in zwei Teilsysteme und zeigen Sie, dass $\partial T/\partial E > 0$ gilt. Die Zerlegung in zwei Teilsysteme ist stabil, wenn die Wahrscheinlichkeit $w(E_1)$ dafür, dass das Teilsystem 1 die Energie E_1 hat, ein *Maximum* besitzt.

Aufgabe 19: $(1+1+1+1)$

Die Energie eines klassischen magnetischen Dipols $\vec{m}$ in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ hängt von dessen Orientierung ab:

$$H = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -mB_z\cos\theta\,. \tag{3}$$

Hier ist das Koordinatensystem so gewählt, dass das Magnetfeld in z-Richtung zeigt. Betrachten Sie ein System von N nicht wechselwirkenden Dipolen, die an Gitterplätzen lokalisiert sind, so dass keine weiteren Beiträge zur Hamiltonfunktion zu berücksichtigen sind.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme des Systems.
Hinweis: Die Zustands"summe" ist in dieser klassischen Problemstellung eigentlich ein Integral über den Phasenraum. Identifizieren Sie zunächst die relevante Variable im Phasenraum.

b) Berechnen Sie die z-Komponente der mittleren Magnetisierung

$$M_z = \langle \sum_{i=1}^{N} m \cos \theta_i \rangle \,. \tag{4}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Magnetisierung als Ableitung der freien Energie $F = -kT \ln Z$ nach B_z geschrieben werden kann. Das Ergebnis kann mit Hilfe der Langevin-Funktion $L(z) = \coth(z) - \frac{1}{z}$ ausgedrückt werden.

c) Diskutieren Sie das Verhalten der Magnetisierung als Funktion der Temperatur, insbesondere die Grenzwerte für $T \to 0$ und $T \to \infty$. In welchem Grenzfall erwarten Sie, dass eine quantenmechanische Beschreibung notwendig wird?

d) Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \lim_{B_z \to 0} \frac{\partial M_z}{\partial B_z} \tag{5}$$

als Funktion der Temperatur (*Curie-Gesetz*).

Bitte notieren Sie auf den Übungsblättern, wie viel Zeit Sie für die Ausarbeitung Ihrer Lösung benötigt haben.