Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

5. Übungsblatt

Ausgabe: 16.11.2015 Abgabe: Montag, 23.11.2015 Besprechung: 24.-26.11.2015

Aufgabe 15: (3)

Ein Behälter ist durch eine bewegliche, energiedurchlässige Wand in zwei Bereiche getrennt, die jeweils mit einem idealen Gas gefüllt sind. Die Anzahl der Gasteilchen sind N_1 und N_2. Geben Sie die Entropie der beiden Teilsysteme an. Wie ändert sich die Entropie, wenn die Wand entfernt wird? Geben Sie das Ergebnis ΔS in Abhängigkeit der Teilchenzahlen N_1 und N_2 an und betrachten Sie die beiden Fälle, dass

a) die Gase gleich, bzw.

b) die Gase verschieden sind.

(Gibbs'sches Paradoxon, Mischungsentropie).

Aufgabe 16: $(1 + 2 + 1 + 2 + 1)$

Ein System von N nicht wechselwirkenden Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ ist paramagnetisch. Dem Spin des n-ten Teilchens sei ein magnetisches Moment $\vec{m}_n = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\vec{S}_n$ zugeordnet, wobei die Spins $\vec{S}_n = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}_n$ mit Hilfe der Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}_n = (\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}, \sigma_{n,3})$ beschrieben werden. Man verwende für das gyromagnetische Verhältnis $g = 2$ und das Bohr'sche Magneton ist durch $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ gegeben ($e > 0$: Positronladung, m_e: Elektronmasse). Wenn sich das System in einem fest gewählten äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$ entlang der x_3-Achse befindet, ist der Hamilton-Operator des Systems durch

$$H = -\vec{B} \cdot \sum_{n=1}^{N} \vec{m}_n = \hbar\omega_L \sum_{n=1}^{N} \sigma_{n,3} \tag{1}$$

gegeben, wobei $\omega_L = \frac{eB}{2m_e}$. Die Energieeigenwerte eines einzelnen Teilchens sind $E_\pm = \pm\hbar\omega_L$.

a) Geben Sie die Zahl der Zustände an, die zur Gesamtenergie E führen. Schreiben Sie dafür E zunächst als Funktion der Anzahl N_+ der Teilchen, die sich im Zustand mit der Energie E_+ befinden (siehe Aufgabe 2, Übungsblatt 1).

b) Geben Sie die Entropie S_{MK} des Systems zu gegebener Energie E an und berechnen Sie einen Näherungsausdruck mit Hilfe der Stirling-Formel für große N, N_+, $N - N_+$. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis mit Hilfe der Abkürzung $\epsilon = \frac{E}{N\hbar\omega_L}$ in der Form

$$S_{MK} = -kN \left(\frac{1+\epsilon}{2} \ln \frac{1+\epsilon}{2} + \frac{1-\epsilon}{2} \ln \frac{1-\epsilon}{2} \right) \tag{2}$$

schreiben lässt. Für welche Energie ist S_{MK} maximal und wie groß ist dieser maximale Wert der Entropie?

c) Berechnen Sie die Temperatur des Systems in Abhängigkeit von der Energie und diskutieren Sie den Verlauf dieser Funktion.

d) Verwenden Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und c) um die mittlere Zahl von Teilchen N_+ (N_-) im Energiezustand E_+ (E_-) als Funktion der Gesamtenergie E und der Temperatur T zu berechnen. Verwenden Sie die Abkürzung $\tau = \frac{kT}{\hbar\omega_L}$. (*Ergebnis:* $N_+ = Ne^{-1/\tau}/(e^{-1/\tau} + e^{1/\tau})$).

e) Geben Sie die Magnetisierung des Systems als Funktion der Temperatur an.

Bitte notieren Sie auf den Übungsblättern, wie viel Zeit Sie für die Ausarbeitung Ihrer Lösung benötigt haben.