Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

4. Übungsblatt

Ausgabe: 9.11.2015 Abgabe: Montag, 16.11.2015 Besprechung: 17.-19.11.2015

Aufgabe 13: (5)

Verifizieren Sie die Berechnung der Anzahl von Zuständen in der mikrokanonischen Gesamtheit für ein **System von N harmonischen Oszillatoren** wie in der Vorlesung beschrieben und ergänzen Sie die fehlenden Zwischenrechnungen. Ausgangspunkt ist die Gesamtenergie des Systems

$$E = \hbar\omega \sum_{j=1}^{N} \left(n_j + \frac{1}{2} \right)$$

mit Besetzungszahlen n_j (ganzzahlig oder Null), $j = 1, \ldots N$. Die Normierungskonstante $\Omega(E)$ ergab sich zu (mit den Abkürzungen $\epsilon = E/N$ und $\epsilon_0 = \hbar\omega/2$):

$$\begin{aligned}
\Omega(E) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_N=0}^{\infty} \delta\left(E - \hbar\omega \sum_{j=1}^{N} \left(n_j + \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikE} \left(\frac{e^{-i\hbar k\omega/2}}{1 - e^{-i\hbar k\omega}} \right)^N \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \exp\left\{ N \left[ik\epsilon - \ln\left(2i \sin k\epsilon_0 \right) \right] \right\} \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \exp\left\{ N f(k) \right\}
\end{aligned}$$

Zeigen Sie nun, dass die Funktion $f(k)$ im Exponenten des Integranden ein Maximum besitzt, $f'(k_0) = 0$, mit

$$\begin{aligned}
\hbar k_0 \omega &= i \ln \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}, \\
f(k_0) &= \frac{\epsilon}{2\epsilon_0} \ln \frac{\epsilon + \epsilon_0}{\epsilon - \epsilon_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\epsilon + \epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_0)}{4\epsilon_0^2}
\end{aligned}$$

Zum Beweis, dass die Funktion bei k_0 ein Maximum besitzt, gehört der Nachweis, dass $f''(k_0) < 0$. Beachten Sie hierbei, dass k_0 rein imaginär ist. Führen Sie dann die k-Integration aus, indem Sie für $f(k)$ die Näherung $f(k) = f(k_0) + \frac{1}{2} f''(k_0)(k - k_0)^2$ einsetzen (warum ist das eine gute Näherung?). Das Endergebnis lässt sich für $N \gg 1$ in der folgenden Form schreiben:

$$\ln \Omega(E) = N \left[\frac{\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0} \ln \frac{\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0} - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0} \ln \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0} \right]$$

Aufgabe 14: $(2+2)$

Man betrachte zwei Systeme $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ für die jeweils bekannt sei, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_r^{(1)}$, bzw. $p_s^{(2)}$ sie sich in den Zuständen $|r\rangle$ (System 1), bzw. $|s\rangle$ (System 2) aufhalten. Die Entropie der beiden Systeme ist dann durch

$$S_1 = -k \sum_r p_r^{(1)} \ln p_r^{(1)} \,, \qquad S_2 = -k \sum_s p_s^{(2)} \ln p_s^{(2)} \tag{1}$$

gegeben. Die Zustände des zusammengesetzten Systems $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ können dann durch die Indexpaare (r,s) gekennzeichnet werden und die Entropie des Gesamtsystems ist $S = -k \sum_{(r,s)} p_{(r,s)} \ln p_{(r,s)}$.

a) Falls die Teilsysteme *schwach* gekoppelt sind, so dass sie statistisch unabhängig sind, gilt für die Wahrscheinlichkeiten $p_{(r,s)} = p_r^{(1)} p_s^{(2)}$. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung die Entropie additiv ist: $S = S_1 + S_2$.

b) Wenn die Teilsysteme *nicht schwach* gekoppelt sind, faktorisieren die Wahrscheinlichkeiten für das Gesamtsystem nicht mehr: $p_{(r,s)} \neq p_r^{(1)} p_s^{(2)}$. Es können lediglich noch die allgemeinen Beziehungen $\sum_s p_{(r,s)} = p_r^{(1)}$ und $\sum_r p_{(r,s)} = p_s^{(2)}$, sowie die Normierungsbedingungen $\sum_r p_r^{(1)} = 1$, $\sum_s p_s^{(2)} = 1$, $\sum_{(r,s)} p_{(r,s)} = 1$, verwendet werden. Zeigen Sie, dass

$$S - (S_1 + S_2) = k \sum_{(r,s)} p_{(r,s)} \ln \left(\frac{p_r^{(1)} p_s^{(2)}}{p_{(r,s)}} \right) \tag{2}$$

gilt. Zeigen Sie weiter (mit Hilfe der Relation $\ln x \leq 1 - x$), dass $S \leq S_1 + S_2$ gilt und darin das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $p_{(r,s)} = p_r^{(1)} p_s^{(2)}$ für alle (r,s). Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Gegenwart von Korrelationen zwischen Teilsystemen zu einer Situation führt, in der die Verteilung der Zustände des Gesamtsystems weniger zufällig ist, als ohne Korrelationen.

Bitte notieren Sie auf den Übungsblättern, wie viel Zeit Sie für die Ausarbeitung Ihrer Lösung benötigt haben.