Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

3. Übungsblatt

Ausgabe: 2.11.2015 Abgabe: Montag, 9.11.2015 Besprechung: 10.-12.11.2015

Aufgabe 9: (3)

Die Kontinuitätsgleichung für die Verteilungsfunktion $\rho(q_i, p_i, t)$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0\,, \tag{1}$$

kann als Ausgangspunkt für die Herleitung der Liouville-Gleichung benutzt werden, weil sie die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit (der Anzahl der Phasenraumpunkte) ausdrückt.

(a) Leiten Sie die Liouville-Gleichung auf diesem Weg in der Form

$$\frac{d\rho(q_i(t),\, p_i(t),\, t)}{dt} = 0 \tag{2}$$

unter der Annahme her, dass nur konservative Kräfte auftreten.

(b) In der Gegenwart von generalisierten Kräften R_i, die nicht aus einem Potential abgeleitet werden können, lauten die Hamiltonschen Bewegegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + R_i\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall eine verallgemeinerte Form des Satzes von Liouville in der Form

$$\frac{d\rho(q_i(t),\, p_i(t),\, t)}{dt} + \rho \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial R_i}{\partial p_i} = 0 \tag{4}$$

hergeleitet werden kann. Welche Eigenschaften müssen die generalisierten Kräfte besitzen, damit die Verteilungsfunktion immer noch eine Erhaltungsgröße ist? Geben Sie ein Beispiel für solche Kräfte an.

Aufgabe 10: (1)

Zeigen Sie, dass die Berechnung der Spur eines Operators A, $\mathrm{Sp}(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$, unabhängig von der Wahl der Basis $\{|n\rangle\}$ ist, in der die Matrixelemente $\langle n|A|m\rangle$ berechnet werden.

Aufgabe 11: $(1+2)$

Der Dichteoperator ist durch drei Eigenschaften definiert: (1) er ist hermitesch, $\rho^\dagger = \rho$, (2) er ist positiv semi-definit, d.h. seine Eigenwerte ρ_m sind nicht negativ, $\rho_m \geq 0$, und (3) für seine Spur gilt $\mathrm{Sp}(\rho) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller möglichen Dichteoperatoren eines Systems *konvex* ist, d.h. dass $\rho = \sum_l a_l \rho_l$ mit $a_l \in \mathbb{R}$ ein Dichteoperator ist, falls alle ρ_l Dichteoperatoren sind und $a_l \geq 0$ sowie $\sum_l a_l = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass der Dichteoperator für die Spinzustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens in der Form $\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{u} \cdot \vec{\sigma})$ dargestellt werden kann. Dabei sind in dem Vektor $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die drei Pauli-Matrizen zusammengefasst und $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{u}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass $\vec{u} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \mathrm{Sp}(\rho \vec{\sigma})$ gilt. Welche Eigenschaft muss der Vektor $\vec{u}$ haben, wenn er einen reinen Zustand beschreiben soll?

Aufgabe 12: $(2+1)$

(a) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Impulskomponenten P_i für einen gemischten Zustand mit der Dichtematrix $\rho(\vec{x}, \vec{x}')$ in der Ortsdarstellung durch

$$\langle P_i \rangle = -\frac{\hbar}{i} \int d^3x \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\vec{x}, \vec{x}') \right]_{\vec{x}'=\vec{x}} \tag{5}$$

gegeben ist.

(b) Wie ergibt sich die Dichtematrix in der Basis von Impulseigenzuständen, $\rho(\vec{p}, \vec{p}')$ aus der Dichtematrix in der Ortsdarstellung $\rho(\vec{x}, \vec{x}')$?