Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

2. Übungsblatt

Ausgabe: 26.10.2015 Abgabe: Montag, 2.11.2015 Besprechung: 3.-5.11.2015

Aufgabe 5: $(1+2)$

(a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\chi(k)$ für die Verteilung der Summe $z = x_1 + x_2$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen gleich dem Produkt der charakteristischen Funktionen $\chi_1(k)\chi_2(k)$ der beiden Variablen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion einer Gauß-Verteilung

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\, e^{-x^2/2a^2} \tag{1}$$

wieder eine Gauß-Verteilung ist.

Aufgabe 6: (1)

Zwei Teilchen der Masse m befinden sich in einem eindimensionalen Kasten der Länge L. Die "Wände" des Kastens befinden sich bei $x = 0$ und $x = L$. Außerdem sei bekannt, dass die Gesamtenergie des Systems zwischen E und $E + \Delta E$ liegt. Beschreiben Sie den zugänglichen Phasenraum. Zeichnen Sie die für das System zugänglichen Bereiche in den Teilräumen des Phasenraums, die durch die Koordinaten x_1, x_2 der beiden Teilchen und durch deren Impulse p_1, p_2 aufgespannt werden.

Aufgabe 7: (3)

Eine Teilchenstrahlquelle im Vakuum emittiere Teilchen der Masse m mit Energien im Intervall $[E_1, E_1 + \Delta E_1]$ in einen Raumwinkel Ω_1. Die emittierende Oberfläche der Strahlquelle besitze die Größe A_1. Der Teilchenstrahl werde dann durch elektrische Felder auf eine Energie E_2 beschleunigt und auf eine Fläche A_2 fokussiert. Berechnen Sie mit Hilfe des Liouville-Satzes den Öffnungswinkel Ω_2 des Teilchenstrahls nach der Beschleunigung.
Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass die Breite der Energieverteilung unverändert bleibt ($\Delta E_1 = \Delta E_2$). Nehmen Sie außerdem an, dass die unterschiedlichen Geschwindigkeiten im Strahl zu keiner zusätzlichen Vergrößerung des Phasenraumvolumens führen. Die Teilchen sollen nicht-relativistisch behandelt werden ($m \ll E_1$, E_2) und die Breite der Energieverteilung kann als klein angenommen werden ($\Delta E_i \ll E_i$).

Aufgabe 8: (3)

Man betrachte die Polarisationsrichtungen eines Lichtstrahls als Beispiel für ein System von zwei Zuständen. Die Ausbreitungsrichtung sei parallel zur x_3-Achse gewählt. Für die zwei möglichen Polarisationszustände parallel zur x_1- und x_2-Achse verwende man die Bezeichnungen

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Ein beliebiger Zustand kann als Linearkombination $|\phi\rangle = a|\phi_1\rangle + b|\phi_2\rangle$ mit komplexen Koeffizienten a, b angegeben werden. Die Zustände seien normiert, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Geben Sie den Dichteoperator für folgende Fälle an und brechnen Sie jeweils die Matrixelemente $\rho_{ij} = \langle\phi_i|\rho|\phi_j\rangle$ in der Basis der Zustände $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$:

(a) reiner Zustand zur Polarisation parallel zur x_1-Richtung;

(b) reiner Zustand zur Polarisation parallel zur x_2-Richtung;

(c) reiner Zustand mit einer um 45° relativ zur x_1-Richtung gedrehten Polarisation;

(d) reiner Zustand mit einer um 135° relativ zur x_1-Richtung gedrehten Polarisation;

(e) gemischter Zustand, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % die reinen Zustände parallel zur x_1- und x_2-Richtung zu finden sind;

(f) gemischter Zustand, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % die reinen Zustände zu finden sind, deren Polarisation um 45°, bzw. um 135° gegenüber der x_1-Richtung gedreht sind.

Bitte notieren Sie auf den Übungsblättern, wie viel Zeit Sie für die Ausarbeitung Ihrer Lösung benötigt haben.