Theoretische Physik 4
Statistische Physik und Thermodynamik
H. Spiesberger

1. Übungsblatt

Ausgabe: 19.10.2015 Abgabe: Montag, 26.10.2015 Besprechung: 27.-29.10.2015

Aufgabe 1: $(1+2+3)$
Betrachten Sie ein System von N Teilchen, die sich in zwei Zuständen befinden können. Es gebe eine Observable $\mathcal{M}$, die für ein einzelnes Teilchen den Wert $+\mu$ oder $-\mu$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein einzelnes Teilchen in einem der beiden Zustände aufhält, sei für alle Teilchen gleich 1/2.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(N,m)$ dafür, dass sich m Teilchen in dem Zustand $+\mu$ befinden?

(b) Für das Gesamtsystem ist dann $\mathcal{M} = (2m-N)\mu$. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle \mathcal{M} \rangle$ und das mittlere Schwankungsquadrat $(\Delta\mathcal{M})^2 = \langle (\mathcal{M} - \langle \mathcal{M} \rangle)^2 \rangle$.

(c) Zeigen Sie, dass $P(N,m)$ für große N, $N \gg 1$, und kleine Abweichungen von m von dessen Mittelwert, $|m - \langle m \rangle| \ll 1$, näherungsweise in der Form

$$P(N,m) \simeq P(N,\langle m \rangle) \exp\left\{-\frac{2}{N}(m - \langle m \rangle)^2\right\} \tag{1}$$

geschrieben werden kann.
Hinweise: Entwickeln Sie den Logarithmus von $P(N,m)$. Schreiben Sie, wo nötig, den Logarithmus einer Fakultät als Summe über Logarithmen. Verwenden Sie bei Bedarf die Näherung $\ln(N/2+i) \simeq \ln(N/2) + 2i/N$ für $i \ll N$.

Aufgabe 2: (4)
Beweisen Sie dir Stirling'sche Näherungsformel

$$x! \simeq x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \tag{2}$$

indem Sie von der Integraldarstellung der Fakultät $N! = \int_0^{+\infty} dx x^N e^{-x}$ ausgehen und den Integranden $f(x) = x^N e^{-x}$ bis zur zweiten Ordnung an die Funktion $g(x) = Ae^{-(x-N)^2/a^2}$ anpassen ($f(x)$ hat ein scharfes Maximum bei $x_0 = N$). Diskutieren Sie die Genauigkeit der Näherung.

Aufgabe 3: (2)
Mit Verwendung der Stirling'schen Formel für die Fakultät (siehe Aufgabe 2) kann das Ergebnis von Aufgabe 1(c) in der Form

$$P(N, m) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left\{-\frac{2}{N}\left(m - \frac{N}{2}\right)^2\right\} \tag{3}$$

geschrieben werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $R(N, m_0)$ dafür, dass m von seinem Mittelwert $N/2$ um mehr als m_0 abweicht. Betrachten Sie hierzu m als kontinuierliche Variable, was für große N berechtigt ist, und erweitern Sie den Bereich der erlaubten Werte von m auf die reellen Zahlen $[-\infty, +\infty]$. Überzeugen Sie sich, dass $P(N, m)$ dann korrekt normiert ist. Wie hängt die Antwort mit der Gauß'schen Fehlerfunktion zusammen? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit numerisch und erstellen Sie eine Tabelle für $R(N, m_0)$ mit $m_0 = 10^{-r}N$, $r = 1, 2, 3, 4, 5$ und $N = 10^{20}$.