Theoretische Physik 3 — Quantenmechanik
H. Spiesberger

9. Übungsblatt

Ausgabe: 21.12.2016 Abgabe: 13.1.2017 Besprechung: 16.-20.1.2017

Aufgabe 18. Teilchen im Magnetfeld (13 Punkte) Ein Teilchen der Masse m und Ladung $q < 0$ bewege sich in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ($B > 0$) ohne Einwirkung weiterer Kräfte. Die Hamiltonfunktion des Problems lässt sich mit Hilfe des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{x})$ ausdrücken:

$$H = \frac{\vec{\Pi}^2}{2m} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\Pi} = \vec{P} - q\vec{A}, \tag{1}$$

wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} \tag{2}$$

ein geeignetes Vektorpotential für ein allgemeines homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ ist. (Benutzen Sie dafür die Relation $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, wobei ϵ_{ijk} den total antisymmetrischen Tensor und δ_{ij} das Kronecker-Symbol darstellt.) Das quantenmechanische System wird durch einen Hamilton-Operator beschrieben, der sich aus Gl. (1) dadurch ergibt, dass der Impuls $\vec{P}$ und die Koordinaten durch die entsprechenden Operatoren ersetzt werden. Berechnen Sie die Vertauschungsrelationen zwischen den Komponenten von $\vec{\Pi}$, d.h. $[\Pi_i, \Pi_j]$, zunächst für ein allgemeines homogenes $\vec{B}$-Feld und spezialisieren Sie das Ergebnis dann auf den Fall $\vec{B} = B\vec{e}_3$. **2.5P**

(b) Berechnen Sie explizit die Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A}$ und zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator H bei Wahl der obigen Eichung für $\vec{A}$ (Gl. (2)) mit der Komponente P_3 des Impulsoperators vertauscht. Zeigen Sie außerdem, dass der Hamiltonoperator daher in die Summe zweier kommutierender Operatoren zerfällt: $H = H' + \Pi_3^2/(2m)$. Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass die Eigenfunktionen von H die Form $\Psi(\vec{x}, t) = \phi(x_1, x_2, t)\psi(x_3, t)$ annehmen und leiten Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung die allgemeine Form der Funktionen $\psi(x_3, t)$ her. **3P**

(c) Bestimmen Sie nun das Spektrum des Rest-Hamiltonoperators H'. Vergleichen Sie dazu die Vertauschungsrelationen der Komponenten Π_i und die Form von H' mit den beim harmonischen Oszillator auftretenden Operatoren und zeigen Sie, dass beide Probleme aufeinander abgebildet werden können. Schließen Sie dann aus dem (aus der Vorlesung bekannten) Spektrum des harmonischen Oszillators auf die Eigenwerte von H'. Skizzieren Sie qualitativ das Spektrum vom (gesamten) Hamilton-Operator H, indem Sie die Energieeigenwerte von H als Funktionen der Impulseigenwerte in x_3-Richtung darstellen. **3P**

(d) Schließen Sie aus der formalen Äquivalenz zum harmonischen Oszillator auf geeignete Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ und finden Sie eine allgemeine Form der Wellenfunktionen ϕ_0 zum niedrigsten Eigenwert von H'. Eigenfunktionen von H' zu höheren

Eigenwerten ergeben sich durch Anwendung des Leiteroperators $a^\dagger$ auf ϕ_0. Treffen Sie eine Wahl für die Lösung ϕ_0, die so einfach ist, dass Sie zu jedem Eigenwert von H' eine Eigenfunktion explizit angeben können. Wie hoch ist die Entartung der Eigenwerte von H' und H? **4.5P**

Hinweise: Es ist zweckmäßig die Leiteroperatoren und die Eigenfunktionen ϕ_n als Funktionen der Variablen $x_\pm = (x_2 \pm ix_1)/\sqrt{2}$ (Was ist dann $\partial/\partial x_\pm$?) zu schreiben. Um die allgemeine Form von ϕ_0 zu bestimmen, nutzen Sie die Wirkung von a auf ϕ_0 aus!

Bitte notieren Sie die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Übungsaufgaben benötigt haben.