Theoretische Physik 3 — Quantenmechanik
H. Spiesberger

4. Übungsblatt

Ausgabe: 16.11.2016 Abgabe: 25.11.2016 Besprechung: 28.11.-02.12.2016

Aufgabe 7. Der endliche Potentialtopf (20 Punkte) Wir betrachten einen eindimensionalen Potentialtopf endlicher Tiefe, der durch das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{L}{2} \\ -V_0 & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & x > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{1}$$

beschrieben werden soll.

(a) Finden Sie eine Bestimmungsgleichung für die Energieniveaus der gebundenen Zustände. Lösen Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den Fall $-V_0 < E < 0$ in den drei Bereichen konstanten Potentials und nutzen Sie Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen an den Rändern $|x| = L/2$. **3P**

(b) Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) um zu klären, ob es eine minimale Tiefe $V_{\min}$ des Potentialtopfes für die Existenz eines gebundenen Zustands gibt. Wie viele gebundene Zustände existieren im Allgemeinen in Abhängigkeit von der Potentialtiefe V_0 und der Masse m des Teilchens? Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion (z.B. ihres Betragsquadrats) für eine typische Lösung. **3P**

(c) Gibt es im Falle eines halbierten Potentialtopfs ($V(x > 0)$ wie oben, $V(x < 0) = \infty$) unabhängig von V_0 immer einen gebundenen Zustand? **1P**

Im Folgenden soll die Streuung am Potentialtopf untersucht werden. Dies soll durch eine Lösung der Schrödingergleichung mit positiver Energie $E > 0$ des Typs

$$\Psi(x) = \begin{cases} e^{ik_0x} + \alpha_- e^{-ik_0x} & x < -\frac{L}{2} \\ \beta_+ e^{ikx} + \beta_- e^{-ikx} & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ S e^{ik_0x} & x > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{2}$$

beschrieben werden, wobei $k_0 = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $k = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$. Hierbei trifft eine ebene Welle von links auf den Potentialtopf und wird teils reflektiert (Amplitude α_-) und teils transmittiert (Amplitude $S = S(E)$). Die Größe $S(E)$ heißt Streuamplitude und ihr Betragsquadrat $T(E) = |S(E)|^2$ ist die Transmissionswahrscheinlichkeit; das Betragsquadrat von α_- ist die Reflexionswahrscheinlichkeit, $R(E) = |\alpha_-|^2$.

(d) Bestimmen Sie aus den Anschlussbedingungen für $\Psi(x)$ bei $|x| = L/2$ die Amplituden α_-, β_+ und β_- sowie die Streuamplitude $S(E)$. **3P**

(e) Zeigen Sie, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit $T(E)$ die Form

$$T(E) = \left(1 + \frac{1}{4}\frac{V^2}{E(E+V)}\sin^2(kL)\right)^{-1} \tag{3}$$

annimmt und skizzieren Sie qualitativ ihren Verlauf. Bestätigen Sie die Konsistenz der Interpretation der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsamplitude, indem Sie zeigen, dass

$$R(E) + T(E) = 1 \tag{4}$$

gilt. **3P**

(f) Für welche Energien E_n treten Resonanzen ($T(E_n) = 1$) auf und wie groß ist in diesem Fall die Amplitude der reflektierten Welle? Berechnen Sie die Wellenlängen $\lambda = 2\pi/k$ innerhalb des Potentialtopfes für die Resonanzenergien und vergleichen Sie sie mit den gebundenen Zuständen des Potentialtopfes mit *unendlich* hohen Wänden. **2P**

(g) Für positive Energien ist $S(E)$ beschränkt, doch für negative Energien treten Polstellen auf. Zeigen Sie, dass diese Polstellen für Energien auftreten, die eine der beiden Gleichungen

$$k \cot\left(\frac{kL}{2}\right) = -k_0\,, \qquad k \tan\left(\frac{kL}{2}\right) = k_0, \tag{5}$$

erfüllen (wobei hier $k_0 = \sqrt{-2mE}/\hbar$ ist). Vergleichen Sie diese Bedingungen mit den Energieniveaus der gebundenen Zustände aus (a). **2P**

(h) Entwickeln Sie $S(E)^{-1}$ in der Nähe der Resonanzen bis zu linearer Ordnung in $(E - E_n)$ und bestimmen Sie in dieser Näherung die Lage des zur jeweiligen Resonanz gehörigen Pols von $S(E)$ in der komplexen E-Ebene. Zeigen Sie, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit in dieser Näherung ein Lorentz-Profil (nicht-relativistische Breit-Wigner-Kurve)

$$T(E) \sim \frac{1}{(E - E_n)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{6}$$

aufweist und geben Sie einen Ausdruck für Γ an. Diese Untersuchungen machen deutlich, dass die Resonanzen als beinahe gebundene Zustände interpretiert werden können, deren Lebensdauer durch die inverse Zerfallsbreite $\hbar/\Gamma$ abgeschätzt werden kann. **3P**

Notieren Sie bitte, wie viel Zeit Sie zur Lösung der Aufgaben benötigt haben.