Theoretische Physik 3 — Quantenmechanik
H. Spiesberger

12. Übungsblatt

Ausgabe: 25.1.2017 Abgabe: 3.2.2017 Besprechung: 6.-10.2.2017

Aufgabe 23. Coulomb-Potential und Legendre-Polynome (7 Punkte) Die Ortsabhängigkeit des Potentials einer am Ort $\vec{r}'$ befindlichen Punktladung ist gegeben durch die Funktion

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Potential auf die Form

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} \qquad \text{mit} \qquad t = \frac{r_<}{r_>} < 1\,, \tag{2}$$

sowie $r_< = \min\{r, r'\},\ r_> = \max\{r, r'\}$ und $z = \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') + \cos\theta\cos\theta'$ gebracht werden kann. **1.5P**

Nun kann G für $r \neq r'$ in eine konvergente Potenzreihe in t entwickelt werden:

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(z), \qquad P_l(z) = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dt^l}\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}}\bigg|_{t=0} \,. \tag{3}$$

(b) Begründen Sie, dass die Funktionen $P_l(z)$ Polynome l-ten Grades in z sind, indem Sie einen Ausdruck für den Term mit der höchsten Potenz in z angeben. **1.5P**

(c) Zeigen Sie, dass die Polynome P_l für alle l die Gleichung $P_l(z=1) = 1$ erfüllen. **1P**

(d) Sei nun $\vec{r}' = r'\vec{e}_z$, so dass $z = \cos\theta$. Dies entspricht einer Wahl des Koordinatensystems, die die Axialsymmetrie der Problemstellung ausnutzt. Zeigen Sie, dass die Polynome P_l Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$l(l+1)P_l(z) - 2zP_l'(z) + (1-z^2)P_l''(z) = 0 \tag{4}$$

sind, indem Sie den Laplace-Operator auf die Gleichungen (1) und (3) (für (3): Kugelkoordinaten!) anwenden. Damit ist gezeigt, dass sich das Coulomb-Potential einer Punktladung auf der z-Achse in den sogenannten Legendre-Polynomen entwickeln lässt. **3P**

Aufgabe 24. Runge-Lenz-Vektor (10 Zusatzpunkte) Für ein Teilchen in einem $1/r$-Potential $V(r) = -\gamma/r$ existiert neben dem Drehimpuls eine weitere Erhaltungsgröße, der sogenannte Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{A} = \frac{1}{2m}(\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P}) - \frac{\gamma}{R}\vec{Q}\,. \tag{5}$$

Er besitzt die folgenden Eigenschaften

$$[\vec{A}, H] = 0\,, \qquad \vec{L}\cdot\vec{A} = 0 = \vec{A}\cdot\vec{L}\,, \qquad \vec{A}^2 = \frac{2}{m}H(\vec{L}^2+\hbar^2)+\gamma^2\,, \tag{6}$$

wobei H der Hamiltonoperator ist. Diese Eigenschaften dürfen Sie im Folgenden als gegeben annehmen.

(a) Überprüfen Sie die folgenden Vertauschungsrelationen für die Komponenten des Drehimpulses und des Runge-Lenz-Vektors: **4P**

$$[L_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k, \quad [A_i, A_j] = -\frac{2i\hbar}{m}H\epsilon_{ijk}L_k\,. \tag{7}$$

Hinweis: Nutzen Sie eine Identität der Levi-Civita-Symbole, die aus der Jacobi-Identität der Drehimpulsalgebra $[L_i,[L_j,L_k]]+[L_j,[L_k,L_i]]+[L_k,[L_i,L_j]] = 0$ folgt.

Für Zustände mit einer Energie $E < 0$ definieren wir nun zwei neue Vektoren gemäß

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\left(\vec{L}+\vec{A}'\right), \quad \vec{K} = \frac{1}{2}\left(\vec{L}-\vec{A}'\right), \quad \text{mit} \quad \vec{A}' = \sqrt{-\frac{m}{2H}}\vec{A}\,. \tag{8}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Komponenten von $\vec{I}$ und $\vec{K}$ jeweils die Vertauschungsrelationen eines Drehimpulses erfüllen und dass die Kommutatoren $[I_i, K_j]$ verschwinden. Schließen Sie nun auf die möglichen Eigenwerte von $\vec{I}^2$ und $\vec{K}^2$. **2P**

(c) Vergleichen Sie die Operatoren $\vec{I}^2$ und $\vec{K}^2$ (betrachten Sie (6)) und finden Sie einen Zusammenhang zwischen ihren Eigenwerten von gemeinsamen Eigenzuständen. **1P**

(d) Lösen Sie den Ausdruck für $\vec{K}^2$ nach dem Hamiltonoperator H auf und geben Sie die möglichen Energieeigenwerte an. Wie hoch ist deren Entartung? **2P**

(e) Spezialisieren Sie das Ergebnis für den Fall des Wasserstoffatoms (was ist hier γ?) und vergleichen Sie Eigenwerte und Entartung mit dem bekannten Ergebnis. Erklären Sie vor diesem Hintergrund warum die Drehimpulsquantenzahl m beim Wasserstoffatom nur ganzzahlige Werte annimmt! **1P**

Bitte notieren Sie die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Übungsaufgaben benötigt haben.