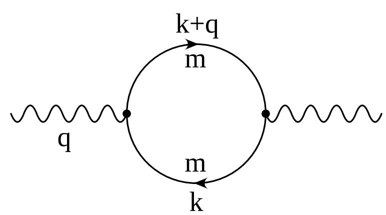
Quantenfeldtheorie

H. Spiesberger

Projekt 2

Berechnung der Vakuumpolarisation

Bei der Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung in der Störungstheorie ist die Vakuumpolarisation einer der wichtigsten Bausteine. Sie beschreibt die virtuelle Produktion von Teilchen-Antiteilchen-Paaren aus dem Vakuum und wird durch folgendes Feynman-Diagramm beschrieben:

$i\Pi_{\mu\nu}(q) =$ 

Im Rahmen der Quantenelektrodynamik sind nur Elektron-Positron-Paare in der Schleife erlaubt. Der Impuls des Photons q^μ ist beliebig raum-, zeit- oder lichtartig.

Die Vakuumpolarisation ist eine Korrektur zum Photon-Propagator. Im Impulsraum hat man für den inversen Photon-Propagator in niedrigster Ordnung

$$D^{-1}_{\mu\nu}(q) = i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) + \text{Eichterme}, \tag{1}$$

und nach Berücksichtigung der Vakuumpolarisation

$$D^{-1}_{\mu\nu}(q) = i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu + \Pi_{\mu\nu}(q)) + \text{Eichterme}. \tag{2}$$

Aus der Eichinvarianz der QED folgt $\partial^\mu_x D_{\mu\nu}(x-x') = 0$ und deshalb die Transversalität des Photon-Propagators im Impulsraum: $q^\mu D_{\mu\nu}(q) = 0$. Die Vakuumpolarisation muss deshalb folgende Form besitzen:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi_T(q^2)\left(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu\right) \ . \tag{3}$$

1. Vom Feynman-Diagramm zum Parameterintegral

Verwenden Sie die Feynman-Regeln der QED, um zunächst folgenden Ausdruck für die Vakuumpolarisation aufzuschreiben:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\,e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon}\gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m + i\epsilon}\gamma_\nu\right) \ . \tag{4}$$

Beachten Sie das Vorzeichen und den Faktor i in der Definition von $\Pi_{\mu\nu}$.

Die Spur über den Ausdruck mit Dirac-Matrizen kann mit Hilfe der in Projekt 1 angegebenen Formeln berechnet werden. Für die Berechnung der Impulsraum-Integration ist es bequem, zunächst eine Integraldarstellung der Propagator-Nenner einzuführen. Verwenden Sie die Darstellung

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty dz\, e^{iz(p^2 - m^2 + i\epsilon)}\,, \tag{5}$$

um den Ausdruck (4) in die Form

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= i\frac{\alpha}{\pi^3}\int d^4k \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2\, \exp\left\{iz_1(k^2 - m^2 + i\epsilon) + iz_2((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)\right\} \\ &\qquad \times \left(2k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2 + q_\mu k_\nu + k_\mu q_\nu - (k\cdot q - m^2)g_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

zu bringen.

2. Integralformeln

Die Impulsraum-Integrale können mit Hilfe der folgenden Formeln ausgeführt werden:

$$\int d^4r\, e^{iar^2} = -i\frac{\pi^2}{a^2}\,, \tag{7}$$

$$\int d^4r\, r_\mu e^{iar^2} = 0\,, \tag{8}$$

$$\int d^4r\, r_\mu r_\nu e^{iar^2} = \frac{\pi^2}{2a^3}g_{\mu\nu}\,. \tag{9}$$

Beweisen Sie diese Integralformeln.

Im weiteren Verlauf der Rechnung wird außerdem folgendes Integral benötigt (Beweis?):

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{ia\lambda} - e^{ib\lambda}\right) = \ln\frac{b}{a}\,. \tag{10}$$

3. Berechnung von Π_T

Bringen Sie mit Hilfe der Substitution

$$k_\mu \longrightarrow r_\mu = k_\mu + \frac{z_2}{z_1 + z_2}q_\mu \tag{11}$$

das Integral über d^4k in eine Form, die die Anwendung der Formeln (7-9) erlaubt. Zeigen Sie, dass die für den Transversalteil benötigten Terme die Form

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= 2\frac{\alpha}{\pi}\left(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu\right)\int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \\ &\times \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^4} \exp\left\{ i\left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} - (z_1+z_2)m^2 + i\epsilon' \right]\right\} \\ &+ \text{Terme} \propto g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{12}$$

besitzen ($\epsilon' > 0$). Die restlichen Terme $\propto g_{\mu\nu}$ verschwinden: man kann zeigen, dass deren Koeffizient gleich Null ist (*Zusatzaufgabe*).

Ein Trick erlaubt es, die Abhängigkeit von den Integrationsvariablen z_1 und z_2 zu vereinfachen: fügen Sie

$$1 = \int \frac{d\lambda}{\lambda}\delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\lambda}\right) \tag{13}$$

ein und führen Sie dann die Substitutionen

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (x, z): \qquad z_1 = \lambda z, \quad z_2 = \lambda x \tag{14}$$

durch. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \Pi_T(q^2) &= 2\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\times z(1-z)\exp\left\{ i\lambda\left[z(1-z)q^2 - m^2 + i\epsilon' \right]\right\} . \end{aligned} \tag{15}$$

4. Renormierung

Das Integral über λ in (15) ist divergent. Das Auftreten von Divergenzen bei der Berechnung von Feynman-Integralen in der Quantenfeldtheorie ist ein allgegenwärtiges Phänomen. Es kann im Rahmen der Renormierung auf konsistente Weise behandelt werden. Hier soll eine vereinfachte Lösung beschrieben werden. Sie besteht in der Anwendung der Aussage, dass nur die subtrahierte (d.h. *renormierte*) Vakuumpolarisation

$$\hat{\Pi}_T(q^2) = \Pi_T(q^2) - \Pi_T(0) \tag{16}$$

physikalisch relevant ist. Für den Rest der Rechnung wollen wir außerdem die Hochenergienäherung

$$|q^2| \gg m^2 \tag{17}$$

verwenden. Zeigen Sie, dass jetzt die verbleibenden Integrationen leicht ausgeführt werden können (Sie benötigen die Integralformel (10)). Das Ergebnis lautet:

$$\hat{\Pi}_T(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{|q^2|}{m^2} - i\pi\,\theta(q^2) - \frac{5}{3}\right) . \tag{18}$$

Eine genauere Analyse zeigt, dass die korrekte massenabhängige Form des Schwellenfaktors im Imaginärteil

$$\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\;\theta(q^2-4m^2) \tag{19}$$

lautet. *Anmerkung*: Der Imaginärteil kann viel einfacher mit Hilfe des optischen Theorems berechnet werden. Die θ-Funktion im Schwellenfaktor folgt aus der Tatsache, dass ein virtuelles Photon mit Impuls $q^2 > 4m^2$ in ein Elektron-Positron-Paar *zerfallen* kann.

Alle Prozesse der elektromagnetischen Wechselwirkung werden durch Feynman-Diagramme mit inneren Photonlinien beschrieben. Die Vakuumpolarisation tritt in jedem Fall auf und führt zu einem Korrekturfaktor $(1 + \Pi_T(q^2))$ an jeder Photonlinie. In höheren Ordnungen der Störungstheorie müssen auch mehrfache Einfügungen von Vakuumpolarisationsgraphen berücksichtigt werden. Dies führt zu einer geometrischen Reihe (*Dyson*-Reihe):

$$1 + \Pi_T + \Pi_T^2 + \ldots = \frac{1}{1-\Pi_T} . \tag{20}$$

Jede innere Photonlinie endet an beiden Enden an einem Fermion-Photon-Vertex. Der Beitrag der Vakuumpolarisation kann deshalb als Korrekturfaktor zum Vertex aufgefasst werden, d.h. als Korrektur zur Kopplungskonstanten e. Man definiert deshalb eine effektive Kopplungskonstante $\bar{e}^2 = e^2/(1-\Pi_T)$. Damit ergibt sich die effektive, impulsabhängige Feinstrukturkonstante

$$\alpha \to \bar{\alpha}(q^2) = \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|q^2|}{m^2}} , \qquad |q^2| \gg m^2 . \tag{21}$$

Berücksichtigt man die Beiträge aller geladenen elementaren Fermionen in der Schleife des Vakuumpolarisationsdiagramms, muss dies zu

$$\alpha \to \bar{\alpha}(q^2) = \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\sum_i Q_i^2 \ln\frac{|q^2|}{m_i^2}} , \qquad |q^2| \gg m^2 \tag{22}$$

verallgemeinert werden, wobei die Summe über alle Fermionen läuft, für die die Schwelle $q^2 > m_i^2$ überschritten ist. Q_i ist die elektrische Ladung des Fermions i.

Diskutieren Sie den Verlauf dieser *laufenden* Kopplungskonstanten und schätzen Sie die Größenordnung der entsprechenden Korrekturen für die LEP-Experimente numerisch ab ($q^2 = E_{\mathrm{cms}}^2 \simeq M_Z^2$, $\alpha = 1/137$).