10.) Majorana-Neutrinos, Seesaw-Mechanismus

Lorentz-Invarianz legt Form des Dirac-Feldoperators fest:

$$\psi(x) \to \text{enthält } a(\vec{p},s),\ b^+(\vec{p},s)$$

Vernichter für e^-, Erzeuger für e^+

$$\bar{\psi}(x) \to \text{enthält } a^+(\vec{p},s),\ b(\vec{p},s)$$

analog

Invarianz unter Parität verlangt vereinheitlichte Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen.

Ladung:

Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu(x) = \partial_\mu\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right) = 0$

erhaltene Ladung $\hat{Q} = \int d^3x\, \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)$

$$= \int \frac{d^3p}{2E_p} \sum_s \left(a^+(\vec{p},s)a(\vec{p},s) - b^+(\vec{p},s)b(\vec{p},s)\right)$$

Ladungskonjugation: $\psi \to \psi^c$ aus

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi = m\psi \to i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi^c = m\psi^c$$

mit

$$\psi^c = \eta_c C \bar{\psi}^T$$

$$C = i\gamma^0\gamma^2$$

vertauscht Teilchen $\leftrightarrow$ Antiteilchen:

$$\mathcal{U}(C)\, a^+(\vec{p},s)\, \mathcal{U}^+(C) = b^+(\vec{p},s) \qquad \text{usw.}$$

beachte auch: $(\psi_L)^c = (\psi^c)_R$

Neutrinos haben Ladung $Q = 0$

Oszillationen $\Rightarrow$ auch Leptonzahl L_e, L_μ, L_τ sind nicht erhalten.

Mjorana-Spinoren ϕ: Def:

$$\phi^c = \phi$$

in der Weyl-Darstellung: $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec\sigma), \quad \bar\sigma^\mu = (\mathbb{1}, -\vec\sigma), \quad P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow$ mit $\phi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar\eta \end{pmatrix} \longrightarrow \phi^c = \begin{pmatrix} \eta \\ \bar\xi \end{pmatrix}$ mit $\bar\xi = i\sigma^2 \xi^*$

$$i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ladungskonjugation vertauscht obere und untere Komponenten)

Majorana-Bedingung $\phi^c = \phi$ bedeutet:

$$\xi = \eta$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \xi \\ i\sigma^2 \xi^* \end{pmatrix}$$

Majorana-Spinoren besitzen nur 2 unabhängige Komponenten

außerdem: mit $\phi = P_L \phi + P_R \phi$

$$\phi_L = P_L \phi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_R = P_R \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sigma^2 \xi^* \end{pmatrix}$$

und $$\phi = \phi_L + (\phi_L)^c$$

- die rechtshändige Komponente eines Majorana-Spinors übernimmt die Rolle des Antiteilchens
- Die Beschreibungen mit Hilfe eines Diracfeldes ($\psi = \psi_L + \psi_R$) ist äquivalent zur Beschreibung mit Hilfe von zwei Majoranafeldern ($\psi_L + (\psi_L)^c$ und $\psi_R + (\psi_R)^c$)
- Der Feldoperator ϕ ergibt sich aus ψ durch die Identifikation $a \equiv b$ (Teilchen = Antiteilchen)

zur Interpretation: Teilcheninhalt eines linkshändigen Felds $\nu_L \sim (a + b^+)$

- SM, Dirac-Neutrino

$\nu_L \longrightarrow$ vernichtet 'ν' $(s = -\frac{1}{2})$, erzeugt "$\bar{\nu}$" $(s = +\frac{1}{2})$

$\bar{\nu}_L \sim \nu_L^c \longrightarrow$ vernichtet "$\bar{\nu}$" $(s = +\frac{1}{2})$, erzeugt "ν" $(s = -\frac{1}{2})$

- Majorana-Neutrino: $a \equiv b$

$\nu_L \longrightarrow$ vernichtet 'ν' $(s = -\frac{1}{2})$, erzeugt "ν" $(s = +\frac{1}{2})$

$\bar{\nu}_L \sim \nu_L^c \longrightarrow$ vernichtet "ν" $(s = +\frac{1}{2})$, erzeugt "ν" $(s = -\frac{1}{2})$

- SM: schwache Wechselwirkung koppelt linkshändige Ströme:

$e_L^- + W \longrightarrow$ erzeugt "ν" $(s = -\frac{1}{2})$

$e_R^+ + W \longrightarrow$ erzeugt "ν" $(s = +\frac{1}{2})$

nicht Leptonzahl, sondern Helizität unterscheidet e^+, e^-

- $\phi = \phi_L + \phi_L^c$: vernichtet ϕ $(s = \pm \frac{1}{2})$
  erzeugt ϕ $(s = \pm \frac{1}{2})$
  enthält beide Helizitäten

zur Notation:

$$\psi_L^c := (\psi_L)^c, \quad \psi_R^c = (\psi_R)^c$$

(Index L, R bindet stärker: im SM beschreiben L- und R-Komponenten Teilchen mit unterschiedlichen Quantenzahlen: I, Y)

$$\psi_L \to \text{I-Dubletts}, \quad \psi_R \to \text{Singletts}$$

beachte: $\psi_L^c = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi^c, \quad \psi_R^c = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi^c$ (eigentlich $(\psi_L)^c = (\psi^c)_R$)

Massenterme

- für Diracfermionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) \\ &= -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \\ &= -m\,\bar{\psi}_R\psi_L + h.c. \\ &= -m\,\bar{\psi}_R\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + h.c. \end{aligned}$$

$$(\bar{\psi}_R\psi_L)^+ = \psi_L^+(\psi_R^+\gamma^0)^+ = \bar{\psi}_L\psi_R$$

- für Majoranafermionen: $\psi \to \phi$ mit $\phi = \phi^c$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -m\,\bar{\phi}_R\frac{1-\gamma_5}{2}\phi^c + h.c. \\ &= -m\,\bar{\phi}_R\phi_R^c + h.c. \end{aligned}$$

oder

$$\mathcal{L}_M = -m\,\bar{\phi}_L\phi_L^c + h.c.$$

Majoranamassenterme können mit ϕ_L oder ϕ_R jeweils alleine konstruiert werden
(da $\phi_R^c = \frac{1-\gamma_5}{2}\phi^c$ linkshändig ist (u.u.))

$\rightarrow$ mögliche Erweiterungen des Standardmodells um Massenterme für Neutrinos

1.) ν sind Diracfermionen

<u>neu</u>: es gibt rechtshändige Neutrinos ν_R

ν_R sind Eichsingletts $(I=0,\ Y=0)$

$$\mathcal{L}_{D,\,mass} = -m_D\,\bar{\nu}_R\,\nu_L + h.c.$$

wie für $\ell^\pm$, Quarks

Masse aus Higgs-Mechanismus: $g_{Yukawa}\,\bar{\nu}_R\,(\nu_L\,\Phi) + h.c.$

Mischung wie im Quarksektor

2.) ν sind Majoranafermionen

<u>neu</u> Majorananeutrinos ν_R

ν_R sind Eichsingletts

$$\mathcal{L}_{M,\,mass} = -M\,\bar{\nu}_R\,\nu_R^c + h.c.$$

keine Massenerzeugung durch Higgs-Mechanismus nötig

M ist eichinvarianter, unabhängiger Parameter

2'.) Majorananeutrinos ν_L

ν_L bilden Eichdublett

$$\mathcal{L}_{M,\,mass} = -M\,\bar{\nu}_L\,\nu_L^c + h.c.$$

$\bar{\nu}_L\nu_L^c$ ist Isospintriplett $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1+0\right)$

benötige Higgs-Mechanismus mit Skalarfeld-Triplett

Seesaw-Mechanismus

betrachte Fall 2

SM-Neutrinos $\nu_L \to \nu_L + \nu_L^c$ ist Majoranaspinor

neu: $\nu_R \to \nu_R + \nu_R^c$ " "

schreibe $\phi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L + \nu_L^c \\ \nu_R + \nu_R^c \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{Seesaw} = -\frac{1}{2} \bar{\Phi} \mathcal{M} \phi \quad \text{mit} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} (\bar{\Phi}_L, \bar{\Phi}_R) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

$$= -m_D (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) - \frac{1}{2} M (\bar{\nu}_R \nu_R^c + h.c.)$$

Diagonalisierung von $\mathcal{M}$

Eigenwerte $m_1 < m_2$: $\left. \begin{array}{l} m_1 m_2 = \det \mathcal{M} = -m_D^2 \\ m_1 + m_2 = \mathrm{Tr}\, \mathcal{M} = M \end{array} \right\} : m_{1/2} = \frac{M}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4 m_D^2/M^2}\right)$

Annahme: $m_D \ll M \Rightarrow m_1 \simeq -\frac{m_D^2}{M} \; (\ll m_D)$

$m_2 \simeq M$

Eigenzustände ($\mathcal{M}$ = reell, symmetr. $\Rightarrow$ Drehung)

$$\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{m_D}{M} \ll 1, \quad \cos\theta = 1 - \frac{m_D^2}{M^2}$$

$\phi_1 \simeq i\phi_L$, $\phi_2 \simeq \phi_R$

SM-Neutrino schweres ν_R

z.B. mit $m_D \simeq v \simeq 10^2$ GeV ($m_D = g_{Yukawa} v$)

$m_\nu \simeq 10^{-3}$ eV

$\hookrightarrow M \simeq 10^{16}$ GeV $\simeq$ GUT-Skala

realistisch: 3 Generationen

$m_D \to$ 3×3-Matrix für leichte ν_L

$M \to$ 3×3-Matrix für schwere ν_R

m_D, M nicht diagonal $\to$ Mischung