Allgemeine Relativitätstheorie II
H. Spiesberger
3. Übungsblatt (Do. 16. 6. 2011)

Aufgabe 5. Masse der Schwarzschild-Metrik. In der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho \xi^\sigma \tag{1}$$

für die im Innern einer Sphäre S liegende Masse angegeben. Werten Sie diese Formel für die Schwarzschild-Metrik aus und zeigen Sie, dass sich tatsächlich der Massenparameter der Schwarzschild-Metrik ergibt.

Aufgabe 6. Drehimpuls. In einer axialsymmetrischen, asymptotisch flachen Raumzeit existiert ein axiales Killing-Vektorfeld, das wir mit ψ^μ bezeichnen. Dann kann man den totalen Drehimpuls J definieren:

$$J = \frac{1}{16\pi} \int_S \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho \psi^\sigma \, , \tag{2}$$

wobei über eine im asymptotischen Bereich liegende Sphäre integriert wird.

a) Zeigen Sie, analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Sphäre S ist und dass

$$J = -\int_\Sigma T_{\mu\nu} n^\mu \psi^\nu \, dV \tag{3}$$

gilt. Darin ist die Hyperfläche Σ so gewählt, dass sie ψ^μ überall als Tangentialvektor hat.

b) Zeigen Sie, dass $J = 0$ in jeder statischen, axialsymmetrischen Raumzeit, d.h. in einer Raumzeit, in der es ein zeitartiges Killing-Vektorfeld ξ^μ gibt mit $\xi^\mu \psi_\mu = 0$.

c) Berechnen Sie den Drehimpuls für die Kerr-Metrik

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 \;\; &= \;\; -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \mathrm{d}t^2 - \frac{4Mar \sin^2\theta}{\Sigma} \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} \mathrm{d}r^2 \\ & \quad + \Sigma \mathrm{d}\theta^2 + \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta}{\Sigma} \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \, , \end{aligned} \tag{4}$$

mit $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ und $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ und zeigen Sie, dass $J = Ma$ gilt.