Allgemeine Relativitätstheorie
H. Spiesberger

5. Übungsblatt

Besprechung: Do. 20. 1. 2011

Aufgabe 14. Einstein-Gleichungen in zweiter Ordnung. Für kleine Abweichungen von der Minkowski-Metrik entwickelt man

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Terme im Ricci-Tensor, die quadratisch in $h_{\mu\nu}$ sind, in folgender Form geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma,\mu\nu} - h^{\rho\sigma}\left(h_{\mu\sigma,\rho\nu} + h_{\nu\sigma,\rho\mu}\right) + \frac{1}{4}h_{\rho\sigma,\mu}h^{\rho\sigma}{}_{,\nu} \\ &\quad + h_{\nu}^{\rho,\sigma}\left(h_{\rho\mu,\sigma} - h_{\sigma\mu,\rho}\right) + \frac{1}{2}\left(h^{\rho\sigma}h_{\mu\nu,\rho}\right)_{,\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{4}h^{,\rho}h_{\mu\nu,\rho} - \left(h^{\rho\sigma}{}_{,\sigma} - \frac{1}{2}h^{,\rho}\right)\left(h_{\mu\rho,\nu} + h_{\nu\rho,\mu}\right)\,. \end{aligned}$$

$G^{(1)}_{\mu\nu}$ sei der Einstein-Tensor, in dem nur Terme erster Ordnung in $h_{\rho\sigma}$ berücksichtigt werden und mit $G^{(2)}_{\mu\nu}$ seien die Terme in $G_{\mu\nu}$ bezeichnet, die quadratisch in $h_{\rho\sigma}$ sind. Für eine Lösung $h_{\rho\sigma}$ in linearer Näherung der Einstein-Gleichungen im Vakuum könnte man nun versuchen eine Verbesserung dadurch zu erreichen, dass die quadratischen Terme in $G_{\mu\nu}$ berüchsichtigt werden. Begründen Sie, dass die Korrektur $h^{(2)}_{\rho\sigma}$ zu $h_{\rho\sigma}$ dann die Gleichung

$$G^{(1)}_{\mu\nu}\left[h^{(2)}_{\rho\sigma}\right] + G^{(2)}_{\mu\nu}\left[h_{\rho\sigma}\right] = 0$$

erfüllen muss. Man kann also sagen, dass die Abweichung $h_{\rho\sigma}$ der Metrik von der Minkowski-Metrik in zweiter Ordnung dieselbe Korrektur erzeugt, wie die Anwesenheit eines Energie-Impuls-Tensors der Form $t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}G^{(2)}_{\mu\nu}\left[h_{\rho\sigma}\right]$. Ist es also möglich, $t_{\mu\nu}$ als effektiven Energie-Impuls-Tensor des Gravitationsfeldes zu betrachten? Diskutieren Sie die Energie-Impuls-Erhaltung und die Eichinvarianz von $t_{\mu\nu}$.

Aufgabe 15. Abstrahlung von Gravitationswellen. Zwei punktförmige Massen M sind an den Enden einer Feder (Federkonstante k) befestigt, die in Schwingungen versetzt wird. Welcher Bruchteil der Schwingungsenergie wird während einer Schwingungsperiode durch Gravitationswellen abgestrahlt? Verwenden Sie für die Strahlunsleistung P die Quadrupolnäherung

$$P = \frac{1}{45}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\left.\frac{d^3Q_{ij}}{dt^3}\right|_{\mathrm{ret}}\right)^2,$$

wobei Q_{ij} der spurfreie Quardupoltensor $Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}q$, $q = \sum_{i=1}^{3} q_i^i$, $q^{\mu\nu} = \int T^{00}x^\mu x^\nu d^3x$ ist.

Aufgabe 16. Gravitationswellen von Doppelsternen. Ein Doppelsternsystem bestehe aus zwei Sternen der gleichen Masse M vernachlässigbarer Größe in einer nahezu Newtonschen kreisförmigen Umlaufbahn mit Radius R umeinander. Berechnen Sie die Zunahme der Umlauffrequenz aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen unter der Annahme, dass die Quadrupolnäherung wie in der vorherigen Aufgabe angegeben anwendbar ist.