Geometrische Algebra

Florian Jung

Institut für Physik, WA THEP
Universität Mainz

Klausurtagung des Graduiertenkollegs
Bullay, 13. September 2006

Gliederung

Gliederung

Was ist Geometrische Algebra (GA)?

H. Grassmann: Äußere Algebra
Verallgemeinerung von Vektoren

Was ist Geometrische Algebra (GA)?

H. Grassmann: Äußere Algebra
Verallgemeinerung von Vektoren

W. R. Hamilton: Quaternionen
Invertierbarkeit ($\longrightarrow$ Division)

Was ist Geometrische Algebra (GA)?

H. Grassmann: Äußere Algebra
Verallgemeinerung von Vektoren

W. R. Hamilton: Quaternionen
Invertierbarkeit ($\longrightarrow$ Division)

W. K. Clifford: Geometrische Algebra
Universelle Sprache der Geometrie

Was ist Geometrische Algebra (GA)?

H. Grassmann: Äußere Algebra
Verallgemeinerung von Vektoren

W. R. Hamilton: Quaternionen
Invertierbarkeit ($\longrightarrow$ Division)

W. K. Clifford: Geometrische Algebra
Universelle Sprache der Geometrie

M. Riesz, P. Lounesto, D. Hestenes:
Weiterentwicklung und Anwendungen

Motivation

- Universelle Sprache der Geometrie!

Motivation

- Universelle Sprache der Geometrie!
- GA taucht (versteckt) überall in der Physik auf

Motivation

- Universelle Sprache der Geometrie!
- GA taucht (versteckt) überall in der Physik auf
- Erlaubt geometrische Interpretation

Motivation

- Universelle Sprache der Geometrie!
- GA taucht (versteckt) überall in der Physik auf
- Erlaubt geometrische Interpretation
- Sehr nah an der klassischen Vektoranalysis,
  aber in beliebigen Dimensionen gültig.

Definition der Geometrischen Algebra

- Grundlage ist ein reeller Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\cdot$ und Normquadrat $\|\cdot\|^2$.
- Die Clifford-Algebra $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \|\cdot\|^2)$ ist eine reelle, assoziative Algebra (wie die Tensor-Algebra).
- Für Vektoren gilt aber zusätzlich die „Kontraktionsregel“:

$$\boxed{\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \ ,}$$

oder äquivalent (wie von Pauli-/Dirac-Matrizen bekannt):

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} = 2\,\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ .$$

Definition der Geometrischen Algebra

- Grundlage ist ein reeller Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\cdot$ und Normquadrat $\|\cdot\|^2$.
- Die Clifford-Algebra $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \|\cdot\|^2)$ ist eine reelle, assoziative Algebra (wie die Tensor-Algebra).
- Für Vektoren gilt aber zusätzlich die „Kontraktionsregel“:

$$\boxed{\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \ ,}$$

  oder äquivalent (wie von Pauli-/Dirac-Matrizen bekannt):

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} = 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \ .$$

- Notation:
  Skalare: $\alpha, \beta, \ldots$ Vektoren: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ Allg. Elemente: $A, B, \ldots$
- Was noch fehlt, ist die geometrische Interpretation!

Geometrische Bedeutung der Pauli-Matrizen

- Die Pauli-Matrizen σ_i erfüllen:

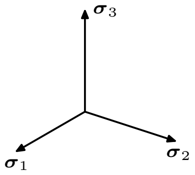
$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \ .$$

- Kontraktionsregel für eine ONB $(\boldsymbol{\sigma}_i)$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_i = 2\, \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j = 2\delta_{ij} \ .$$

- Algebraisch gibt es keinen Unterschied zwischen σ_i und $\boldsymbol{\sigma}_i$.

$\Rightarrow$ Die Pauli-Matrizen sind Darstellungen der Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$!



Universalität des Geometrischen Produkts

Im Clifford-Produkt ist die vollständige geometrische Beziehung zweier Vektoren relativ zueinander enthalten!

- Betrachte zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und deren Produkt $P = \boldsymbol{ab}$.

Universalität des Geometrischen Produkts

Im Clifford-Produkt ist die vollständige geometrische Beziehung zweier Vektoren relativ zueinander enthalten!

- Betrachte zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und deren Produkt $P = \boldsymbol{ab}$.
- Wenn sich $\boldsymbol{b}$ eindeutig aus P und $\boldsymbol{a}$ rekonstuieren ließe, dann folgt die Behauptung.

Universalität des Geometrischen Produkts

Im Clifford-Produkt ist die vollständige geometrische Beziehung zweier Vektoren relativ zueinander enthalten!

- Betrachte zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und deren Produkt $P = \boldsymbol{ab}$.
- Wenn sich $\boldsymbol{b}$ eindeutig aus P und $\boldsymbol{a}$ rekonstuieren ließe, dann folgt die Behauptung.
- In der GA ist der Vektor $\boldsymbol{a}$ invertierbar:

$$\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \implies \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = 1\ .$$

Universalität des Geometrischen Produkts

Im Clifford-Produkt ist die vollständige geometrische Beziehung zweier Vektoren relativ zueinander enthalten!

- Betrachte zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und deren Produkt $P = \boldsymbol{ab}$.
- Wenn sich $\boldsymbol{b}$ eindeutig aus P und $\boldsymbol{a}$ rekonstuieren ließe, dann folgt die Behauptung.
- In der GA ist der Vektor $\boldsymbol{a}$ invertierbar:

$$\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \implies \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = 1 \ .$$

- Damit ergibt sich $\boldsymbol{b}$ mittels:

$$\boldsymbol{a}^{-1}P = \boldsymbol{a}^{-1}(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \ .$$

Universalität des Geometrischen Produkts

Im Clifford-Produkt ist die vollständige geometrische Beziehung zweier Vektoren relativ zueinander enthalten!

- Betrachte zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und deren Produkt $P = \boldsymbol{ab}$.
- Wenn sich $\boldsymbol{b}$ eindeutig aus P und $\boldsymbol{a}$ rekonstuieren ließe, dann folgt die Behauptung.
- In der GA ist der Vektor $\boldsymbol{a}$ invertierbar:

$$\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \implies \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = 1 \ .$$

- Damit ergibt sich $\boldsymbol{b}$ mittels:

$$\boldsymbol{a}^{-1}P = \boldsymbol{a}^{-1}(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \ .$$

$\Rightarrow$ Alle weiteren Produkte lassen sich aus Clifford-Produkt ableiten!

Skalar- und Dachprodukt

- Das Skalarprodukt ist der symmetrische Anteil:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}\big) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}\ .$$

Skalar- und Dachprodukt

- Das Skalarprodukt ist der symmetrische Anteil:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}\big) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}\ .$$

- Das Dachprodukt ergibt sich aus dem antisymmetrischen Anteil:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}\big) = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}\ .$$

Skalar- und Dachprodukt

- Das Skalarprodukt ist der symmetrische Anteil:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}\big) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}\ .$$

- Das Dachprodukt ergibt sich aus dem antisymmetrischen Anteil:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}\big) = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}\ .$$

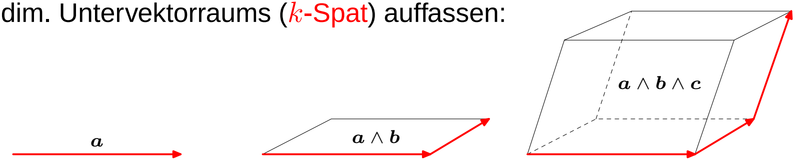
$\Rightarrow$ Fundamentale Zerlegung des Clifford-Produkts:

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\ .}$$

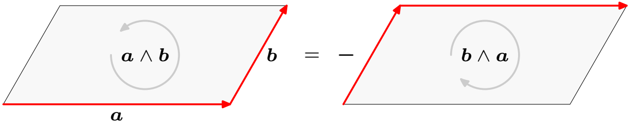
- Skalar- oder Dachprodukt allein sind nicht invertierbar!

Dachprodukte als orientierte Flächenelemente

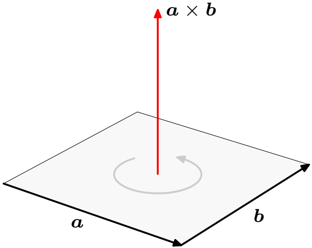
- Das Dachprodukt lässt sich als orientiertes Flächenelement eines k-dim. Untervektorraums (k-Spat) auffassen:

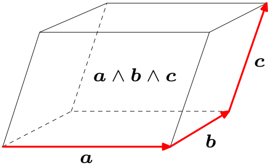


- 0-Spat = Skalar, 1-Spat = Vektor, ...
- Die Antisymmetrie steckt in der Orientierung:



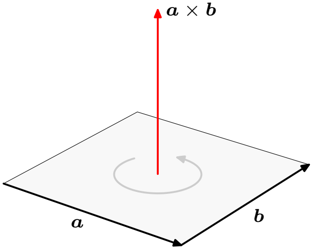
Mit Hodge-Dualität zu Kreuzprodukt und Determinante

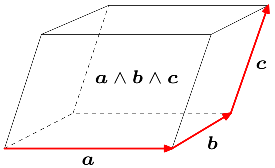




- Hodge-Dualität $\star$ übersetzt zwischen k-Spaten und $(n-k)$-Spaten mittels orhogonalem Komplement
- Der Betrag ist unter $\star$ erhalten
- Orientierung mit „Rechter-Hand-Regel“

Mit Hodge-Dualität zu Kreuzprodukt und Determinante

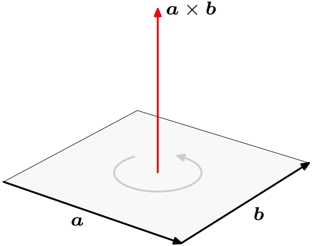


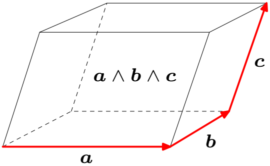


- Hodge-Dualität $\star$ übersetzt zwischen k-Spaten und $(n-k)$-Spaten mittels orhogonalem Komplement
- Der Betrag ist unter $\star$ erhalten
- Orientierung mit „Rechter-Hand-Regel“
- In 3 Dimensionen gilt:

$$\star(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \,,$$
$$\star(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \,.$$

Mit Hodge-Dualität zu Kreuzprodukt und Determinante





- Hodge-Dualität $\star$ übersetzt zwischen k-Spaten und $(n-k)$-Spaten mittels orhogonalem Komplement
- Der Betrag ist unter $\star$ erhalten
- Orientierung mit „Rechter-Hand-Regel“
- In 3 Dimensionen gilt:

$$\star(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\ ,$$
$$\star(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\ .$$

- In $n \neq 3$ Dimensionen ist das Kreuzprodukt nicht defi niert!

Beispiel zur Hodge-Dualität

- Gegeben $(\boldsymbol{\sigma}_i)$ ONB von $\mathbb{R}^3$
- Wegen Orthonormalität gilt: $\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \boldsymbol{\sigma}_j + \delta_{ij}$
- Defi niere den „Pseudoskalar“ $I = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \boldsymbol{\sigma}_3$
- Hodge-Dualität berechnet man mittels:

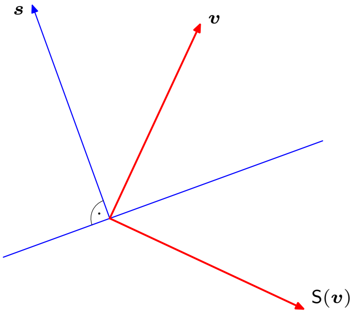
$$\boxed{\star A = A\, I^{-1}\,.}$$

- Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\star(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \boldsymbol{\sigma}_2) &= (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)I^{-1} = (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 \\ &= \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_3 \\ &= \boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2\,.\end{aligned}$$

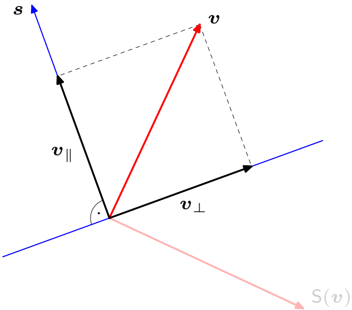
Gliederung

Spiegelung an einer Ebene



- Wir möchten v an der Ebene senkrecht zum Vektor s spiegeln.

Spiegelung an einer Ebene

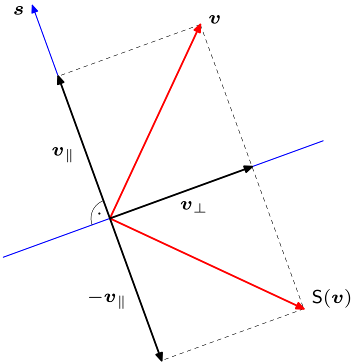


- Wir möchten $\boldsymbol{v}$ an der Ebene senkrecht zum Vektor $\boldsymbol{s}$ spiegeln.
- Zerlege dazu $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\parallel$ senkrecht und parallel zu $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{v}_\parallel = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2} \, ,$$

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\parallel \, .$$

Spiegelung an einer Ebene



- Wir möchten v an der Ebene senkrecht zum Vektor s spiegeln.
- Zerlege dazu $v = v_\perp + v_\parallel$ senkrecht und parallel zu s:

$$v_\parallel = (v \cdot s)\frac{s}{\|s\|^2} \; ,$$

$$v_\perp = v - v_\parallel \; .$$

- Damit ergibt sich der gespiegelte Vektor $\mathsf{S}(v) = v_\perp - v_\parallel$ zu:

$$\mathsf{S}(v) = v - 2(v \cdot s)\frac{s}{\|s\|^2} \; .$$

Spiegelung an einer Ebene (GA-Version)

- In der GA lassen sich die Formeln weiter vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\parallel} &= (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2} & &= (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} \, , \\
\boldsymbol{v}_{\perp} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\parallel} = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} & &= (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} \, .
\end{aligned}
$$

Spiegelung an einer Ebene (GA-Version)

- In der GA lassen sich die Formeln weiter vereinfachen:

$$\boldsymbol{v}_\parallel = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} \,,$$
$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\parallel = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} = (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} \,.$$

- Damit erhält man den gespiegelten Vektor:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v}_\perp - \boldsymbol{v}_\parallel = (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) \boldsymbol{s}^{-1} \\ &= -(\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{s}^{-1} \\ &= -\boldsymbol{s}\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1} \,. \end{aligned}$$

Spiegelung an einer Ebene (GA-Version)

- In der GA lassen sich die Formeln weiter vereinfachen:

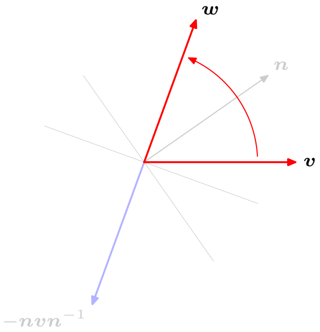
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\parallel} &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})\frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2} && = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\,, \\ \boldsymbol{v}_{\perp} &= \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\parallel} = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1} && = (\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\,. \end{aligned}$$

- Damit erhält man den gespiegelten Vektor:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v}_{\perp}-\boldsymbol{v}_{\parallel} = (\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{s}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1} \\ &= -(\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{v}+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{s}^{-1} \\ &= -\boldsymbol{s}\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\,. \end{aligned}$$

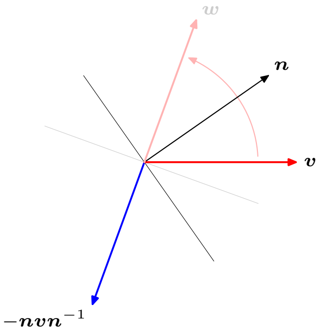
- Viel kompakter als die alte Formel ($\mathsf{S}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})\frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2}$).
- Komposition von Spiegelungen ist sehr einfach!

Von Spiegelungen zu Drehungen



- Satz von Cartan–Dieudonné: Jede Drehung lässt sich in Spiegelungen zerlegen.
- Betrachte Drehung, die den Vektor $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{w}$ überführt.

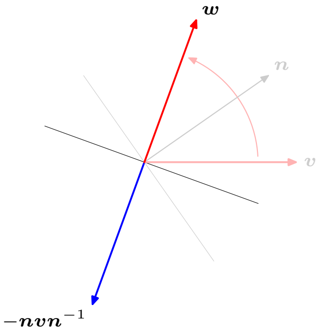
Von Spiegelungen zu Drehungen



- Satz von Cartan–Dieudonné:
  Jede Drehung lässt sich in Spiegelungen zerlegen.
- Betrachte Drehung, die den Vektor $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{w}$ überführt.
- Zuerst Spiegelung senkrecht zu $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{v} \mapsto -\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^{-1} \,.$$

Von Spiegelungen zu Drehungen



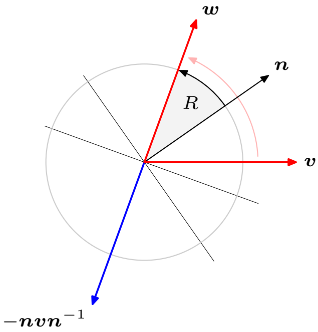
- Satz von Cartan–Dieudonné:
  Jede Drehung lässt sich
  in Spiegelungen zerlegen.
- Betrachte Drehung, die den
  Vektor $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{w}$ überführt.
- Zuerst Spiegelung senkrecht zu $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{v} \mapsto -\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^{-1}\,.$$

- Danach Spiegelung senkrecht zu $\boldsymbol{w}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(v) &= -\boldsymbol{w}(-\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^{-1})\boldsymbol{w}^{-1}\\ &= (\boldsymbol{w}\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{n})^{-1}\end{aligned}$$

Von Spiegelungen zu Drehungen



- Satz von Cartan–Dieudonné:
  Jede Drehung lässt sich
  in Spiegelungen zerlegen.
- Betrachte Drehung, die den Vektor $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{w}$ überführt.
- Zuerst Spiegelung senkrecht zu $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{v} \mapsto -\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^{-1}\,.$$

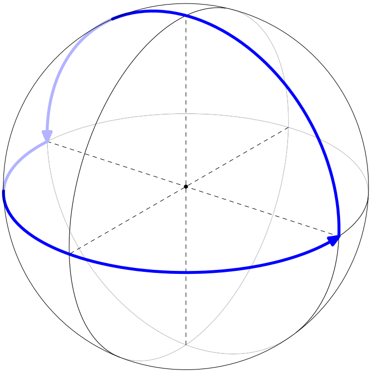
- Danach Spiegelung senkrecht zu $\boldsymbol{w}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(v) &= -\boldsymbol{w}(-\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}^{-1})\boldsymbol{w}^{-1}\\ &= (\boldsymbol{w}\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{n})^{-1} = R\boldsymbol{v}R^{-1}\,,\end{aligned}$$

  mit dem Rotor $R = \boldsymbol{w}\boldsymbol{n}$.

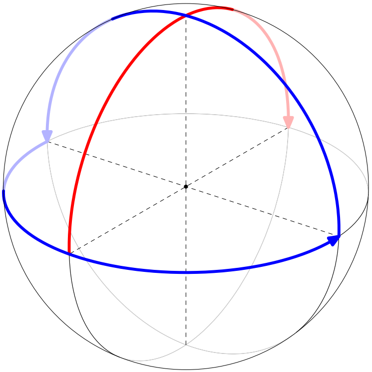
Geometrische Relevanz des Halbwinkels

Der halbe Drehwinkel des Rotors R (zwischen $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{n}$) hat eine zutiefst geometrische Bedeutung bei der Komposition von Drehungen:



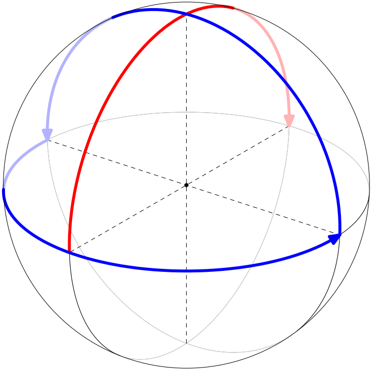
Geometrische Relevanz des Halbwinkels

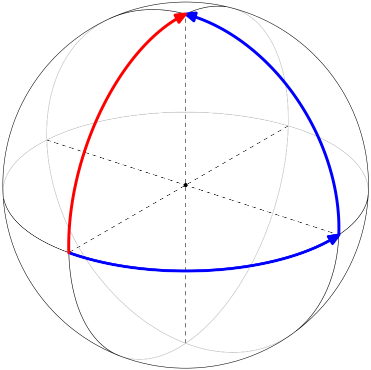
Der halbe Drehwinkel des Rotors R (zwischen $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{n}$) hat eine zutiefst geometrische Bedeutung bei der Komposition von Drehungen:



Geometrische Relevanz des Halbwinkels

Der halbe Drehwinkel des Rotors R (zwischen $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{n}$) hat eine zutiefst geometrische Bedeutung bei der Komposition von Drehungen:





Gliederung

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \varrho & \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{j} & \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}$$

Maxwell-Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \varrho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} = 0$$

$\big\downarrow$ SRT mit Tensor-Analysis $\big\downarrow$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \partial_\nu F_{\varrho\sigma} = 0$$

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \varrho \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{j} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow \quad \text{SRT mit Tensor-Analysis} \quad \downarrow$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad\qquad \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \partial_\nu F_{\varrho\sigma} = 0$$

$$\downarrow \quad \text{Geometrische Algebra} \quad \downarrow$$

$$\nabla \cdot F = j \qquad\qquad \nabla \wedge F = 0$$

Maxwell-Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \varrho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} = 0$$

SRT mit Tensor-Analysis

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \partial_\nu F_{\varrho\sigma} = 0$$

Geometrische Algebra

$$\nabla \cdot F = j \qquad \nabla \wedge F = 0$$

$$\boxed{\nabla F = j}$$

Pauli-Schrödinger-Gleichung

Die übliche Pauli-Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2m} + q\Phi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\right)\Psi\ .$$

Kritikpunkte:

- Viele Räume nebeneinander: $(\mathbb{R}^3, \cdot, \times)$, $\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$

Pauli-Schrödinger-Gleichung

Die übliche Pauli-Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2m} + q\Phi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\right)\Psi\ .$$

Kritikpunkte:

- Viele Räume nebeneinander: $(\mathbb{R}^3, \cdot, \times)$, $\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$
- Die Bedeutung der komplexen Zahlen ist unklar!

Pauli-Schrödinger-Gleichung

Die übliche Pauli-Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2m} + q\Phi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\right)\Psi\ .$$

Kritikpunkte:

- Viele Räume nebeneinander: $(\mathbb{R}^3, \cdot, \times)$, $\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$
- Die Bedeutung der komplexen Zahlen ist unklar!
- $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ist ein formaler Vektor.

Pauli-Schrödinger-Gleichung

Die übliche Pauli-Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}^2}{2m} + q\Phi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\right)\Psi\ .$$

Kritikpunkte:

- Viele Räume nebeneinander: $(\mathbb{R}^3,\cdot,\times)$, $\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$
- Die Bedeutung der komplexen Zahlen ist unklar!
- $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ ist ein formaler Vektor.
- Die Rechenregel:

  $$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\ ,$$

  ist eben nur eine Rechenregel.

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra?

- Interpretiere die Pauli-Matrizen σ_i als Basisvektoren, dann ist:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a} = \sigma_i a_i = a_i \sigma_i \cong a_i \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathcal{G}_3 \; .$$

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra?

- Interpretiere die Pauli-Matrizen σ_i als Basisvektoren, dann ist:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a} = \sigma_i a_i = a_i \sigma_i \cong a_i \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathcal{G}_3 \ .$$

- Damit wird die obige Rechenregel

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \ ,$$

zu:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + I(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \ .$$

- Das ist die fundamentale Zerlegung des Clifford-Produkts!
- Die imaginäre Einheit i vermittelt hier die Hodge-Dualität!

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra?

- Interpretiere die Pauli-Matrizen σ_i als Basisvektoren, dann ist:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a} = \sigma_i a_i = a_i \sigma_i \cong a_i \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathcal{G}_3 \,.$$

- Damit wird die obige Rechenregel

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,,$$

zu:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + I(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \,.$$

- Das ist die fundamentale Zerlegung des Clifford-Produkts!
- Die imaginäre Einheit i vermittelt hier die Hodge-Dualität!
- $(\mathbb{R}^3, \cdot, \times)$ ist unnötig, weil in $\mathcal{G}_3$ enthalten.

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra!

Die Pauli-Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar\partial_t \Psi = \hat{H}_{\mathrm{S}}\Psi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\Psi \; ,$$

wird ersetzt durch die Pauli-Schrödinger-Hestenes-Gleichung:

$$\boxed{\partial_t \psi \, \hbar I \boldsymbol{\sigma}_3 = \hat{H}_{\mathrm{S}}\psi + \frac{q}{2mc}(I\boldsymbol{B})\psi \, \hbar I \boldsymbol{\sigma}_3 \; .}$$

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra!

Die Pauli-Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}_{\mathrm{S}}\Psi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\Psi\ ,$$

wird ersetzt durch die Pauli-Schrödinger-Hestenes-Gleichung:

$$\boxed{\partial_t\psi\,\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3 = \hat{H}_{\mathrm{S}}\psi + \frac{q}{2mc}(I\boldsymbol{B})\psi\,\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3\ .}$$

- Nur noch reelle Größen mit geometrischer Interpretation!

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra!

Die Pauli-Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}_{\mathrm{S}}\Psi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\Psi \; ,$$

wird ersetzt durch die Pauli-Schrödinger-Hestenes-Gleichung:

$$\boxed{\partial_t\psi\,\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3 = \hat{H}_{\mathrm{S}}\psi + \frac{q}{2mc}(I\boldsymbol{B})\psi\,\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3 \; .}$$

- Nur noch reelle Größen mit geometrischer Interpretation!
- Die Wellenfunktion ψ ist jetzt ein (verallgemeinerter) Rotor und beschreibt lokal eine Drehstreckung.

Quantenmechanik mit Geometrischer Algebra!

Die Pauli-Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}_{\mathrm{S}}\Psi - \frac{\hbar q}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\Psi\ ,$$

wird ersetzt durch die Pauli-Schrödinger-Hestenes-Gleichung:

$$\boxed{\partial_t\psi\,\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3 = \hat{H}_{\mathrm{S}}\psi + \frac{q}{2mc}(I\boldsymbol{B})\psi\,\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3\ .}$$

- Nur noch reelle Größen mit geometrischer Interpretation!
- Die Wellenfunktion ψ ist jetzt ein (verallgemeinerter) Rotor und beschreibt lokal eine Drehstreckung.
- Der Faktor $\hbar I\boldsymbol{\sigma}_3$ ersetzt $i\hbar$ und hängt eng mit dem Spin zusammen.

Zusammenfassung

- Geometrische Algebra ist eine Universelle Sprache der Geometrie! Andere geometrische Formalismen sind darin enthalten.

Zusammenfassung

- Geometrische Algebra ist eine Universelle Sprache der Geometrie! Andere geometrische Formalismen sind darin enthalten.
- Die Pauli-Matrizen lassen sich in der Geometrischen Algebra als Darstellungen der Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$ auffassen.

Zusammenfassung

- Geometrische Algebra ist eine Universelle Sprache der Geometrie! Andere geometrische Formalismen sind darin enthalten.
- Die Pauli-Matrizen lassen sich in der Geometrischen Algebra als Darstellungen der Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$ auffassen.
- Es gibt viele fruchtbare Anwendungen (nicht nur) in der Physik.

Danke für die Aufmerksamkeit.