

Korrelationen bei der Paarproduktion schwerer Mesonen am LHC

Diplomarbeit von Karim Meiborg

Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Physik
Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Motivation	5
1.2. Aufbau der Arbeit	6
2. Überblick über die QCD	7
2.1. QCD als Eichtheorie im Rahmen des Standardmodells	7
2.2. Asymptotische Freiheit	9
3. Störungstheoretische QCD	13
3.1. Das Partonmodell	13
3.2. Das Faktorisierungstheorem	14
3.3. Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen	15
4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion	17
4.1. Kinematik und Notation	17
4.2. Der partonische Wirkungsquerschnitt	18
4.3. Der hadronische Wirkungsquerschnitt	21
4.4. Differentielle Wirkungsquerschnitte	24
4.5. Korrelationen und doppelt differentielle Wirkungsquerschnitte	25
4.6. Ausarbeitung unterschiedlicher Observablen	26
5. Aufbau des Programms zur numerischen Rechnung	29
5.1. Aufgabe des Programms	29
5.2. Verwendung des Programms	29
5.2.1. Kompilierung	30
5.2.2. Eingabe	30
5.2.3. Ausgabe	33
5.3. Technische Details	34
5.3.1. Beschreibung der Klassen	34
5.4. Möglichkeiten zur Modifikation des Programms	35
5.4.1. Zusätzliche Observable	35
5.4.2. Alternative Hadronen im Endzustand	36
5.4.3. Optimierung der Laufzeit	37
6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$	39
6.1. Experimenteller Nachweis von D^* -Mesonen	39
6.2. Numerische Ergebnisse	39
6.2.1. $P_{T,1}$ -Verteilungen	41
6.2.2. y_1 -Verteilung	47
6.2.3. Δy -Verteilung	48
6.3. Korrelationen	48

Inhaltsverzeichnis

6.3.1.	Korrelation der Transversalimpulse $P_{T,1}$ und $P_{T,2}$	49
6.3.2.	Korrelation der Rapiditäten y_1 und y_2	50
6.3.3.	Korrelation von Transversalimpuls und Rapidität	50
6.3.4.	Korrelation von Transversalimpuls und Rapiditätsdifferenz	52
6.3.5.	Korrelation von Rapidität und Rapiditätsdifferenz	53
7.	Ausblick	55
A.	Feynmanregeln der QCD	57
B.	Exemplarische Berechnung eines Matrixelements	59
C.	Liste aller Matrixelemente	63
C.1.	Matrixelemente mit zwei schweren Quarks im Endzustand	63
C.2.	Matrixelemente ohne schwere Quarks im Endzustand	63
D.	Beispielhafte Datei zur Programmsteuerung	65

1. Einleitung

1.1. Motivation

Die Quantenchromodynamik (QCD) beschreibt als Quantenfeldtheorie die starke Wechselwirkung zwischen Teilchen mit Farbladungen. Die QCD wurde nach dem Vorbild der Quantenelektrodynamik (QED) entwickelt, welche die Wechselwirkung geladener Teilchen mithilfe von Photonen als Eichbosonen beschreibt.

Wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Theorien sind die unterschiedlichen Eichgruppen, die ihnen zugrunde liegen. Der QED liegt eine abelsche Eichgruppe zugrunde, die Theorie ist gut verstanden und ermöglicht theoretische Vorsagen höchster Präzision. Zur Beschreibung der starken Wechselwirkung wird eine nicht-abelsche Eichgruppe herangezogen, was die Wechselwirkung zwischen den Eichbosonen, also den Gluonen, zur Folge hat, die ihrerseits Farbladungen tragen. Dies erschwert die störungstheoretische Behandlung der QCD.

Trotzdem wurden Methoden entwickelt, die es erlauben störungstheoretische Rechnungen mit guter Vorhersagekraft im Rahmen der QCD durchzuführen. Die Untersuchung von Prozessen mit schweren Quarks im Endzustand ist aus mehreren Gründen zum genaueren Verständnis der QCD von besonderer Bedeutung.

Zum einen spielt die Produktion schwerer Quarks bei der Suche nach neuer Physik eine zentrale Rolle. Von Teilchen, die nicht vom Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben werden, wird erwartet dass sie besonders schwer sind und somit bei den von bisherigen Beschleunigern erreichten Energien nicht produziert werden konnten. Viele Erweiterungen des Standardmodells gehen davon aus, dass die jeweilig postulierten Teilchen mit hoher Wahrscheinlichkeit in schwere Quarks zerfallen können. Daher ist ein genaues Verständnis der Vorhersage des Standardmodells wichtig, um diese Theorien überprüfen zu können.

Andererseits gilt es das Verständnis der störungstheoretischen QCD in einigen Punkten zu verbessern. Zum einen ist da an das Verständnis sogenannter Multiskalenprobleme zu denken. Die Ergebnisse störungstheoretischer Rechnungen im Rahmen der QCD sind immer von einer für den jeweiligen Prozess typischen Energieskala μ abhängig. Wenn im Endzustand massive Teilchen mit Masse m vorhanden sind, definiert diese Masse eine zusätzliche charakteristische Skala. Je nach Verhältnis dieser Skalen zueinander gibt es unterschiedliche störungstheoretische Schemata. Diese Schemata haben unterschiedliche Gültigkeitsbereiche und bisher ist es unklar, wie eine allgemeine Lösung dieses Problems aussieht.

Außerdem eröffnet die Untersuchung von Korrelationsobservablen eine Möglichkeit die Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen zu testen. Hier ist die Idee zu untersuchen, inwieweit sich Abhängigkeiten auf Partonniveau, die sich durch Erhaltungssätze ergeben, auf Hadronniveau darstellen. Dies kann zum Beispiel durch Variation der verwendeten Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen ermittelt werden. Alternativ könnte man Ergebnisse einer vollen NLO-Rechnung direkt mit experimentellen Daten vergleichen.

1.2. Aufbau der Arbeit

Im folgenden Kapitel 2 wird die QCD zunächst als Eichtheorie vorgestellt. Dies dient der Einordnung der QCD in den Rahmen des Standardmodells. Anschließend wird mithilfe der Renormierungsgruppengleichungen skizziert, wie sich die laufende Kopplung und als deren Konsequenz die asymptotische Freiheit ergibt.

In Kapitel 3 wird zunächst das Partonmodell physikalisch motiviert und das zentrale Faktorisierungstheorem diskutiert. Im Anschluss werden die im Faktorisierungstheorem auftretenden Größen, also der partonische Wirkungsquerschnitt sowie die Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen besprochen.

In Kapitel 4 wird die analytische Rechnung dargestellt. Beginnend mit der Festlegung der Notation und der kinematischen Variablen wird schließlich ein numerisch zu berechnender Ausdruck für differentielle Wirkungsquerschnitte und Korrelationen auf Hadronniveau hergeleitet.

Das Kapitel 5 schildert das zur numerischen Berechnung geschriebene Programm und kann als Anleitung zur Verwendung des Programms gelesen werden. Darüber hinaus werden technische Aspekte erörtert und es wird dargelegt wie mögliche Ergänzungen implementiert werden können. Kapitel 6 beinhaltet die Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$. Die numerisch berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitte und Korrelationen werden vorgestellt und diskutiert. Besonderes Gewicht liegt dabei einerseits auf der Untersuchung der Skalenabhängigkeiten, sowie der Frage inwieweit sich auf Partonniveau exakte Zusammenhänge zwischen Observablen auf Hadronniveau übertragen.

Am Schluss steht der Ausblick in Kapitel 7. Die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit werden reflektiert und es wird dargelegt in welche Richtung zukünftige Arbeiten auf diesem Gebiet gehen könnten.

2. Überblick über die QCD

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über das Standardmodell der Teilchenphysik. Insbesondere wird dabei auf die QCD eingegangen, welche die Basis für die vorliegende Arbeit ist. Der erste Abschnitt folgt weitgehend [1] und [2], der zweite Abschnitt orientiert sich an [1].

2.1. QCD als Eichtheorie im Rahmen des Standardmodells

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine Eichtheorie, welche einerseits die elektroschwache und andererseits die starke Wechselwirkung beschreibt. Die Eichgruppe des Standardmodells ist $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)_Y$. Der Faktor $SU(3)$ ist die Farbgruppe der QCD, wohingegen $SU(2) \otimes U(1)_Y$ nach Glashow, Weinberg und Salam die elektroschwache Symmetriegruppe beschreibt. Aus dieser elektroschwachen Symmetriegruppe geht durch spontane Symmetriebrechung die Gruppe $U(1)_Q$ hervor, welche die Elektrodynamik beschreibt und sich von der bereits genannten Gruppe $U(1)_Y$ unterscheidet.

Von der Gruppe $SU(3) \otimes U(1)_Q$ wird angenommen, dass sie eine exakte Eichsymmetrie ist. Die zugehörigen Eichbosonen, namentlich das Photon und die acht Gluonen sind masselos. Die Materiefelder werden in jeweils drei Familien von Quarks und Leptonen unterteilt. Quarks und Gluonen sind diejenigen Teilchen, welche stark wechselwirken und somit durch die QCD beschrieben werden.

Als Quantenfeldtheorie ist die QCD durch ihre Lagrangedichte definiert,

$$\mathcal{L}^{QCD} [\psi_f(x), \bar{\psi}_f(x), A(x), c(x), \bar{c}(x); g, m_f] = \mathcal{L}_{invariant} + \mathcal{L}_{Eichfixierung} + \mathcal{L}_{Geist}, \quad (2.1)$$

die eine Funktion der Quark-Felder ψ_f , der Gluon-Felder A , der Geist-Felder c und der Parameter g und m_f ist. Der Index f unterscheidet die unterschiedlichen Quark-Felder. $\mathcal{L}_{invariant}$ ist die klassische Lagrangedichte, welche unter lokalen $SU(N)$ Eichtransformationen invariant ist. N ist 3 für die QCD, jedoch ist es oftmals interessant, die N -Abhängigkeit untersuchen zu können. $\mathcal{L}_{invariant}$ hat die ursprünglich von Yang und Mills [3] vorgeschlagene Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{invariant} &= \sum_f \bar{\psi}_f (i\mathcal{D}[A] - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} F^2[A] \\ &= \sum_{f=1}^{n_f} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \sum_{i, j=1}^N \bar{\psi}_{f, \beta, j} \left(i(\gamma)_{\beta, \alpha}^{\mu} D_{\mu, j i}[A] - m_f \delta_{\beta \alpha} \delta_{j i} \right) \psi_{f, \alpha, i} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \sum_{a=1}^{N^2-1} F_{\mu \nu, a}[A] F^{\mu \nu, a}[A]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

In der zweiten Zeile wurden alle Indizes ausgeschrieben, wobei die Abkürzungen

$$D_{\mu, ij}[A] = \partial_{\mu} \delta_{ij} + \sum_a ig A_{\mu, a} (t^a)_{ij},$$

2. Überblick über die QCD

und

$$F_{\mu\nu,a}[A] = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} - \sum_{b,c} g f^{abc} A_{\mu,b} A_{\nu,c},$$

verwendet worden sind.

In den obigen Gleichungen wurden Symbole eingeführt, die einer Erklärung bedürfen. Dabei wird von der letzten Gleichung ausgehend rückwärts vorgegangen.

$F_{\mu\nu,a}$ ist die Feldstärke welche in Abhängigkeit der $N^2 - 1$ Gluon-Felder $A_{\mu,b}$ definiert wird. g ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung, f^{abc} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der $SU(N)$.

Die Lie-Algebra der $SU(N)$ ist durch die Kommutatorrelationen der $N^2 - 1$ $N \times N$ -Matrizen $(t^a)_{ij}$ definiert, welche in der Definition der kovarianten Ableitung $D_{\mu,ij}$ erstmalig auftauchen:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c.$$

Die $(t^a)_{ij}$ sind die Generatoren der Lie-Algebra in adjungierter Darstellung und sind hermitesch. $D_{ij}^\mu[A]$ ist die kovariante Ableitung und wirkt in Gleichung (2.2) auf die Quarkfelder $\psi_{f,\alpha,i}$, welche einerseits Spinorcharakter haben und andererseits durch ihre Farbladung i und ihren Flavour f charakterisiert werden. Im Standardmodell gibt es die folgenden Flavours: up, down, charm, strange, top und bottom.

Die Lagrangedichte der QCD unterscheidet die unterschiedlichen Quark-Flavours nur nach ihren Massen.

Das Verhalten der Quark-Felder unter lokalen Eichtransformationen ist das folgende,

$$\psi'_{f,\alpha,i}(x) = U_{ji}(x) \psi_{f,\alpha,i}(x),$$

wobei

$$U_{ji}(x) = \left[\exp \left\{ i \sum_{a=1}^{N^2-1} \beta_a(x) (t^a)_{ji} \right\} \right],$$

mit reellen Koeffizienten $\beta_a(x)$. Bedingt durch die Konstruktion von $U_{ij}(x)$ aus den Generatoren $(t^a)_{ji}$ ist $U_{ij}(x)$ für alle x Element der Gruppe $SU(N)$. Die Forderung nach Invarianz der Lagrangedichte unter Transformationen dieses Typs, entspricht also der Forderung nach lokaler Eichinvarianz unter der Gruppe $SU(N)$.

Unter dieser Voraussetzung folgt das Transformationsverhalten der Gluonfelder $A_{\mu,a}$:

$$A_{\mu,a}(x) t^a \rightarrow U(x) \left(A_{\mu,a}(x) t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(x).$$

Zur Quantisierung der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{invariant}$, werden die Terme $\mathcal{L}_{Eichfixierung}$ und \mathcal{L}_{Geist} eingeführt, wie in Gl.(2.1) angegeben. Der Eichfixierungsterm kann unterschiedlich gewählt werden. Zwei oft verwendete Möglichkeiten sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Eichfixierung} &= -\frac{\lambda}{2} \sum_{a=1}^{N^2-1} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 \quad 1 < \lambda < \infty, \\ \mathcal{L}_{Eichfixierung} &= -\frac{\lambda}{2} \sum_{a=1}^{N^2-1} (n \cdot A_a)^2 \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei n^μ einen festzuhaltenden Vektor bezeichnet. Die erste Gleichung entspricht den sogenannten kovarianten Eichungen, unter denen die Feynman-Eichung $\lambda = 1$ besonders oft gewählt wird. Die zweite Gleichung definiert die axialen oder physikalischen Eichungen, da durch die Grenzwertbildung $\lambda \rightarrow \infty$ die Notwendigkeit zur Einführung von Geist-Feldern nicht mehr gegeben ist.

Als letzten Beitrag zur Lagrangedichte muss, sofern in einer kovarianten Eichung gearbeitet wird, noch der Term \mathcal{L}_{Geist} zur Lagrangedichte addiert werden:

$$\mathcal{L}_{Geist} = (\partial_\mu \bar{c}_a)(\partial^\mu \delta^{ad} - g f^{abd} A_b^\mu) c_d, \quad (2.4)$$

mit den skalaren Geist- und Antigeist-Feldern $c_a(x)$ und $\bar{c}_a(x)$. Trotz ihres Spins werden bei der Quantisierung dieser Felder Antikommutatorrelationen für diese gefordert. Die Geist-Felder werden benötigt, um Beiträge unphysikalischer Polarisationsfreiheitsgrade, welche in kovarianten Eichungen auftreten, zu kompensieren.

2.2. Asymptotische Freiheit

Der Schlüssel zum Verständnis der laufenden Kopplung der QCD und der damit einhergehenden asymptotischen Freiheit als Grenzfall, ist die Renormierungsgruppengleichung. In einer masselosen Theorie, die der Einfachheit halber angenommen wird, sind die folgenden Größen zu renormieren:

$$\begin{aligned} g &= g(g_0, \mu_R), \\ S &= R(g_0, \mu_R) \cdot G(p_i; g(g_0, \mu_R), \mu_R). \end{aligned}$$

In obigen Gleichungen wurde folgende, formale Notation gebraucht: g_0 ist die nackte Kopplungskonstante, μ_R die Renormierungsskala und g die renormierte Kopplungskonstante. S ist ein S-Matrixelement, G die zugehörige Greensche Funktion, die insbesondere von den am Prozess beteiligten Impulsen p_i abhängt, und R ein skalenabhängiger Vorfaktor. Es wird gefordert, dass S-Matrixelemente unabhängig von der Renormierungsskala sind, woraus unmittelbar die Renormierungsgruppengleichungen folgen

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mu_R} + \frac{\partial g}{\partial \mu_R} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \mu_R} \right) G(p_i; g, \mu_R) = 0, \quad (2.5)$$

die mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta(g, \mu_R) &= \mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} g(g_0, \mu_R), \\ \gamma(g, \mu_R) &= -\frac{1}{R} \mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} R(g_0, \mu_R), \end{aligned}$$

auch wie folgt geschrieben werden können:

$$\left(\mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma \right) G(p_i; g, \mu_R) = 0. \quad (2.6)$$

Da G eine homogene Funktion in Variablen p_i und μ_R ist, welche die Dimension einer Masse haben, also

$$G(\lambda p_i; g, \lambda \mu_R) = \lambda^n G(p_i; g, \mu_R) \quad (2.7)$$

2. Überblick über die QCD

gilt, lässt sich aus der Renormierungsgruppengleichung die Callan-Symanzik-Gleichung gewinnen:

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta \frac{\partial}{\partial g} + \gamma - n \right) G(\lambda p_i; g, \mu_R) = 0. \quad (2.8)$$

Mithilfe der Methode der charakteristischen Kurven lässt sich die Renormierungsgruppengleichung lösen. Hierzu werden λ und g als Funktionen eines Parameters t aufgefasst:

$$\lambda = \bar{\lambda}(t), \quad g = \bar{g}(t),$$

wobei

$$\frac{d\bar{\lambda}(t)}{dt} = \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda}(0) = 1, \quad (2.9)$$

und

$$\frac{d\bar{g}(t)}{dt} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}(0) = g \quad (2.10)$$

gilt. Für $\bar{\lambda}$ folgt unmittelbar $\ln \bar{\lambda} = t$. Als Lösung der Renormierungsgruppengleichung ergibt sich:

$$G(\lambda p_i; g, \mu_R) = G(p_i; \bar{g}(t), \mu_R) \cdot \lambda^n \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \gamma(\bar{g}(\tau)) \right\}. \quad (2.11)$$

Der wichtigste Punkt an dieser Gleichung ist das Auftreten der laufenden Kopplung $\bar{g}(t)$. Der nächste Schritt ist die Untersuchung dieser laufenden Kopplung. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie gilt für β :

$$\beta(g) = -\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2}, \quad (2.12)$$

mit

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f,$$

wobei N_f hier die Anzahl der Quark-Flavours angibt.

Aus Gl. 2.10 erhält man folgende implizite Gleichung für $\bar{g}(t)$:

$$\int_g^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')} = t,$$

welche sich mithilfe von Gl. 2.12 lösen lässt. Es folgt somit für die laufende Kopplung:

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \cdot \beta_0 t}, \quad (2.13)$$

was sich mit

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}, \quad \bar{\alpha}_s(t) = \frac{\bar{g}^2(t)}{4\pi},$$

auch als

$$\bar{\alpha}_s(t) = \frac{\bar{\alpha}_s(0)}{1 + \frac{\bar{\alpha}_s(0)}{4\pi} \cdot 2\beta_0 \ln \lambda}, \quad (2.14)$$

schreiben lässt.

Mit der Wahl von μ als Bezugspunkt für die Messung von g und der typischen Skala Q der Impluse p_i kann die laufende Kopplung wie folgt umformuliert werden:

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \frac{\bar{\alpha}_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}. \quad (2.15)$$

Im letzten Schritt wurde in obiger Gleichung der Skalenparameter $\Lambda = \mu^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{\beta_0 \bar{\alpha}_s(\mu^2)}\right)$ eingeführt. Die laufende Kopplung hat die Eigenschaft, dass sie im Grenzfall $Q \rightarrow \infty$ logarithmisch gegen Null geht. Bei hohen Energien wird die starke Wechselwirkung also schwächer. Daher ist die Störungstheorie überhaupt zur Beschreibung der starken Wechselwirkung im Bereich hoher Energien geeignet.

In diesem Abschnitt wurde $\bar{\alpha}_s(\mu^2)$ in führender Ordnung der Störungstheorie angegeben. Wenn höhere Ordnungen berücksichtigt werden sollen, sind weitere Terme in der Entwicklung von $\beta(g)$ zu berücksichtigen. Es werden hier auch keine Quarkmassen berücksichtigt. Um diese zu behandeln, wird ein zusätzlicher Parameter eingeführt, beispielsweise $g(g_0, m_0; \mu)$ und die Masse m durch eine laufende Masse $m(t)$ ersetzt. Eine detaillierte Behandlung dieser Themen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, daher sei an dieser Stelle auf die Literatur [4] verwiesen.

2. Überblick über die QCD

3. Störungstheoretische QCD

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der störungstheoretischen QCD erläutert, da diese die Basis für die vorliegende Arbeit bildet. Der erste Abschnitt über das Partonmodell folgt weitgehend [2].

3.1. Das Partonmodell

Mithilfe des Partonmodells lassen sich grundsätzlich alle hadronischen Wirkungsquerschnitte bei hinreichend hohen Energien berechnen. Die erreichte Genauigkeit der Rechnung hängt vom jeweiligen Prozess und der Energieskala ab, bei der dieser Prozess stattfindet.

Es wird angenommen, dass jedes Hadron mit Impuls p_μ aus Konstituenten namens Partonen aufgebaut ist. Diese Partonen entsprechen den Quarks und Gluonen der QCD. Bei hohen Energien lassen sich die Massen der Hadronen und Partonen gegenüber der Energieskala Q des Prozesses vernachlässigen.

Bei der folgenden Darstellung des Partonmodells handelt es sich um eine physikalische Plausibilitätsbetrachtung. Diese Art der Darstellung wird gewählt, um die Idee des Partonmodells zu veranschaulichen und das zentrale, im folgenden Abschnitt vorgestellte Faktorisierungstheorem zu motivieren. Eine Herleitung des Partonmodells findet sich in [4, 5].

Jedes an einem harten Streuprozess teilnehmende Parton, trägt einen Impulsbruchteil $x p_\mu$ des Hadrons im Anfangszustand, wobei $0 \leq x \leq 1$. Es wird angenommen, dass $p^2 = 0$ gilt.

Am leichtesten lässt sich das Partonmodell am Beispiel der tiefinelastischen Lepton-Hadron-Streuung verstehen. Das Hadron besteht aus Partonen in einem virtuellen Zwischenzustand in welchem diese jeweils einen Impulsbruchteil $x_i p$ tragen. Man trifft die Annahme, dass dieser virtuelle Zwischenzustand eine Lebensdauer τ im Ruhesystem des Hadrons hat. Der Wert von τ ist von der Struktur des Hadrons abhängig. Es soll jedoch angenommen werden, dass $\tau > \tau_0$ gelte, dass τ also nach unten begrenzt sei, so dass das Hadron im Ruhesystem aus virtuellen Zwischenzuständen mit nicht verschwindender Lebensdauer besteht.

Im Schwerpunktsystem von Lepton und Hadron unterliegt das Hadron der Lorentzkontraktion und der Zeitdilatation. Daher ist die Lebensdauer des virtuellen Zwischenzustandes in diesem System $\tau(1 - v^2/c^2) \gg t$, wobei v hier die Geschwindigkeit des Hadrons und c die Lichtgeschwindigkeit angibt. In Kombination mit der Lorentzkontraktion folgt, dass die Zeit die das Lepton zum Durchfliegen des Hadrons braucht verschwindet, sofern die Schwerpunktenenergie gegen unendlich geht. Daher wirken die Partonen für das durchfliegende Lepton wie eingefroren.

Um mit einem Parton den Impuls Q_μ auszutauschen muss das Lepton dieses gemäß der Unschärferelation mit dem Abstand $\mathcal{O}(1/Q^2)$ in transversaler Richtung passieren. Unter der Annahme, dass die Partonen gleichmäßig im Hadron verteilt sind, ist die Wahrscheinlichkeit dass das Lepton mit einem weiteren Parton wechselwirkt um den geometrischen Faktor

$$\frac{1/Q^2}{\pi R_0^2},$$

unterdrückt, wobei hier R_0 für den Radius des Hadrons steht. Diese Abschätzung ist gerechtfertigt, da die Partonen im Hadron für die kurze Zeit des Durchfluges des Leptons gewissermaßen

3. Störungstheoretische QCD

eingefroren sind. Daher ist es möglich den Wirkungsquerschnitt als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit dass das Lepton ein Parton findet und dem Wirkungsquerschnitt für die Wechselwirkung des Leptons mit dem Parton zu schreiben.

Nach der Wechselwirkung zwischen Parton und Lepton werden sich in der Regel viele weitere Prozesse abspielen. Die Fragmente des Hadrons werden wechselwirken und dabei in der Regel viele weitere Teilchen erzeugen. Diese Vorgänge spielen sich auf Zeitskalen ab, die größer sind als die Wechselwirkungszeit zwischen Lepton und Parton. Daher tritt die Hadronisierung, in deren Verlauf sich Quarks und Gluonen zu den im Detektor beobachteten Teilchen verbinden, zu spät auf um den harten Streuprozess zwischen Lepton und Parton zu beeinflussen.

Zusammenfassend basiert das Partonmodell auf zwei physikalischen Konzepten: der Lorentzkontraktion und Zeitdilatation der inneren Zustände des Nukleons einerseits und die im Vergleich zum Streuprozess langsam ablaufende Hadronisierung. Die Wechselwirkung zwischen den Partonen vor dem Streuprozess passiert also zu früh um den eigentlichen Streuvorgang zu beeinflussen, wohingegen die Wechselwirkung zwischen den Nukleonfragmenten zu spät stattfindet um diesen zu beeinflussen. Von kinematischen Faktoren abgesehen ist der Wirkungsquerschnitt direkt proportional zur Partondichte, die im kurzen Wechselwirkungszeitraum eingefroren ist.

Der Wert des Partonmodell besteht darin, dass es nicht erforderlich ist das Problem der hadronischen Bindungszustände zu lösen um Streuquerschnitte zu berechnen. Die erforderliche Information kann dem Experiment entnommen werden. Die nächsten Abschnitte werden diese Thematik weiter vertiefen.

3.2. Das Faktorisierungstheorem

Das Faktorisierungstheorem nimmt bei der Beschreibung von Streuquerschnitten zu Prozessen mit Hadronen im Anfangs- oder Endzustand eine zentrale Rolle ein. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen dem experimentell zugänglichen Wirkungsquerschnitt auf Hadronniveau, dem theoretisch berechenbaren Wirkungsquerschnitt des harten, partonischen Streuprozesses und den Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen, welche aus dem Vergleich von theoretischen und experimentellen Ergebnissen ermittelt werden können. Das Faktorisierungstheorem lässt sich wie folgt formulieren:

$$d\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X} = \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \int dx_a \int dx_b \int dz_1 \int dz_2 f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) d\sigma_{ab \rightarrow Q_1 Q_2}. \quad (3.1)$$

Hier ist $d\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X}$ das Differential des hadronischen Wirkungsquerschnittes zum Prozess $A + B \rightarrow H_1 + H_2 + X$. A und B bezeichnen die Hadronen im Anfangszustand, H_1 und H_2 die Hadronen im Endzustand.

$f_k^K(x_k, \mu_I)$ ist die Partonverteilungsfunktion, welche angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Parton k mit dem Impulsbruchteil x_k des Hadrons K in diesem findet. Die Partonverteilungsfunktion hängt außer vom Impulsbruchteil noch von der Faktorisierungsskala μ_I ab. Da bei dem hier betrachteten Prozess zwei Hadronen im Anfangszustand sind ist für jedes dieser Hadronen eine Partonverteilungsfunktion aufzuschreiben.

$D_k^K(z_k, \mu_F)$ ist die Fragmentationsfunktion, die angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Parton k in ein Hadron K fragmentiert, welches einen Impulsbruchteil z_k des Partons trägt. Die Fragmentationsfunktion hängt von der Fragmentationsskala μ_F ab. Die Fragmentationsfunktion parametrisiert somit den Effekt der Hadronisierung. In obiger Gleichung treten zwei Fragmentationsfunktionen auf, da im Endzustand zwei Hadronen vorhanden sind.

$d\sigma_{ab \rightarrow Q_1 Q_2}$ ist das Differential des harten, partonischen Wirkungsquerschnittes zum Prozess $ab \rightarrow Q_1 Q_2$. a und b sind die Partonen im Anfangszustand des partonischen Prozesses wohingegen Q_1 und Q_2 für die Partonen im Endzustand dieses Prozesses stehen.

Das Faktorisierungstheorem beschreibt also wie sich durch Faltung der Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen mit Wirkungsquerschnitt des partonischen Prozesses und anschließender Summation aller partonischen Prozesse der hadronische Wirkungsquerschnitt gewinnen lässt. Der im Faktorisierungstheorem auftretende partonische Wirkungsquerschnitt kann gemäß folgender Gleichung berechnet werden:

$$\sigma_{ab \rightarrow Q_1 Q_2} = \frac{1}{|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_a^\mu p_b^\nu|} \cdot \iint \frac{d^3 p_{Q_1}}{(2\pi)^3 \cdot E_{Q_1}} \frac{d^3 p_{Q_2}}{(2\pi)^3 \cdot E_{Q_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_{Q_1} - p_{Q_2}) \cdot |\mathcal{M}|^2.$$

Das in obiger Gleichung auftretende Betragsquadrat des Matrixelementes kann mithilfe der in Anhang A angegebenen Feynmanregeln berechnet werden. Ein Beispiel für eine solche Rechnung findet sich in Anhang B. In Kapitel 4 wird gezeigt wie der partonische Wirkungsquerschnitt aus obiger Gleichung berechnet und mithilfe des Faktorisierungstheorems schließlich der hadronische Wirkungsquerschnitt ermittelt wird.

3.3. Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen

In diesem Abschnitt werden die Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen erläutert. Die Behandlung konzentriert sich auf die Partonverteilungsfunktionen. Dieses Vorgehen wird gewählt, da es an dieser Stelle nur darum geht einen kurzen Einblick in die Struktur und Ermittlung dieser Funktionen zu geben, wobei Redundanzen vermieden werden sollen. Dieser Abschnitt folgt weitgehend [2].

Die Skalenabhängigkeit der Partonverteilungsfunktionen wird von folgenden Integro-Differentialgleichungen beschrieben:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_i^H(x, \mu, \alpha_s(\mu^2)) = \sum_{j=f, \bar{f}, g} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P_{ij}\left(\frac{x}{\xi}, \alpha_s(\mu^2)\right) f_j^H(\xi, \mu, \alpha_s(\mu^2)), \quad (3.2)$$

die als Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi-Gleichungen, kurz DGLAP-Gleichungen, bekannt sind [6, 7, 8]. In obigen Gleichungen wurde $\mu = \mu_f = \mu_R$ gewählt. Der Summationsindex j läuft über alle Quark-Flavours f , Anti-Quark-Flavours \bar{f} sowie den Gluonindex g . Die Verzweigungsfunktionen P_{ij} sind störungstheoretisch nach α_s entwickelbar, beginnend mit $\mathcal{O}(1)$.

Bemerkenswert ist, dass das Integral auf der rechten Seite von Gleichung 3.2 als untere Grenze x hat. Daher muss $f_i^H(\xi, Q_0^2)$ nur für $\xi > x$ bei einer Startskala $\mu = Q_0^2$ bekannt sein, um $f_i^H(x, \mu^2)$ bei einer größeren Skala $\mu = Q$ zu berechnen.

Dies wird ausgenutzt um die Partonverteilungsfunktionen zu ermitteln. Hierzu werden diese durch globale Fits an Daten, unter Anderem aus inelastischen Streuprozessen, dem Drell-Yan-Prozess und der Jet-Produktion, ermittelt. Diese Daten werden an die in störungstheoretischer QCD berechneten Vorhersagen angefitet. Es gibt Kollaborationen, die sich darauf konzentrieren aktuelle Partonverteilungsfunktionen zur Verfügung zu stellen, sobald es entweder neue experimentelle Daten oder neue theoretische Entwicklungen gibt.

Der Vergleich bisher gemessener Partonverteilungsfunktionen mit Partonverteilungsfunktionen, die mithilfe der DGLAP-Gleichungen entwickelt wurden liefert in weiten kinematischen Bereichen eine gute Übereinstimmung.

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

In diesem Kapitel werden Prozesse vom Typ $A + B \rightarrow H_1 + H_2 + X$ untersucht, wobei A , B , H_1 und H_2 jeweils Hadronen bezeichnen. Es werden, ausgehend vom zentralen Faktorisierungstheorem, Gleichungen für Observable in Abhängigkeit von einem geeigneten Satz kinematischer Variablen hergeleitet.

4.1. Kinematik und Notation

Die hier betrachteten Prozesse werden von folgender Formel beschrieben:

$$A + B \rightarrow H_1 + H_2 + X .$$

Hier bezeichnen A und B die Hadronen im Ausgangszustand. Diese müssen, wie die Notation nahelegt, nicht gleich sein. Zum Beispiel kann $A, B = (p, \bar{p})$ für Tevatron oder $A, B = (p, p)$ für LHC gesetzt werden. Im Rahmen der Rechnung werden A und B als masselos behandelt. H_1 und H_2 bezeichnen die Hadronen im Endzustand. Diese können unterschiedlich sein, allerdings wird vorausgesetzt, dass sie die gleiche Masse haben, welche im Folgenden mit M bezeichnet wird.

Im Rahmen dieser Rechnung wird nur die niedrigste Ordnung in Störungstheorie betrachtet. Unter dieser Voraussetzung ist nur die paarweise Produktion schwerer Quarks möglich, da im Ausgangszustand alle Partonen als masselos angenommen werden.

X bezeichnet andere Teilchen die von dieser Rechnung nicht näher beschrieben werden, die aber prinzipiell erzeugt werden können. Als Beispiel sei die Emission eines Gluons mit anschließender Hadronisierung genannt.

Die 4-Impulse der Hadronen werden mit P_A^μ , P_B^μ , P_1^μ und P_2^μ bezeichnet. Die Mandelstamvariablen auf Hadronniveau werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} S &= (P_A + P_B)^2, \\ T &= (P_A - P_1)^2, \\ U &= (P_B - P_1)^2. \end{aligned}$$

Die relevanten Variablen auf Partonniveau werden an dieser Stelle eingeführt:

$$a + b \rightarrow Q_1 + Q_2 .$$

a und b bezeichnen die Partonen, welche den Hadronen A und B zugeordnet sind. Q_1 und Q_2 bezeichnen die Partonen, welche in die Hadronen H_1 und H_2 fragmentieren. Für den Zusammenhang zwischen den Impulsen auf Hadron- und Partonniveau machen wir folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} p_a^\mu &= x_a P_A^\mu, & p_b^\mu &= x_b P_B^\mu, \\ P_1^\mu &= z_1 P_{Q_1}^\mu, & P_2^\mu &= z_2 P_{Q_2}^\mu. \end{aligned}$$

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

x_a und x_b sind die Bruchteile der Impulse P_A und P_B , welche von den Partonen a und b getragen werden. z_1 und z_2 bezeichnen die Bruchteile der Impulse p_{Q_1} und p_{Q_2} welche nach Fragmentation in die Hadronen H_1 und H_2 von diesen getragen werden. Die Variablen x_a , x_b , z_1 und z_2 sind jeweils auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt.

Den obigen Gleichungen liegt die Annahme zugrunde, dass die Partonen masselos sind. Da an anderer Stelle endliche Massen verwendet werden, ist beim Übergang von partonischen Integrationsvariablen zu hadronischen Observablen sorgfältig vorzugehen. Analog zu den Mandelstamvariablen auf Hadronniveau werden die Mandelstamvariablen auf Partonniveau definiert:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2, \\ t &= (p_a - p_{Q_1})^2, \\ u &= (p_b - p_{Q_1})^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aufgrund der Impulserhaltung und der Tatsache, dass im Rahmen dieser Rechnung nur Diagramme auf Baumgraphenniveau betrachtet werden, gilt außerdem:

$$\begin{aligned} s &= (p_{Q_1} + p_{Q_2})^2, \\ t &= (p_b - p_{Q_2})^2, \\ u &= (p_a - p_{Q_2})^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

und $s + t + u = 2m^2$, wobei $m = m_{Q_1} = m_{Q_2}$ für Massen der Quarks im Endzustand steht. Mit der oben eingeführten Notation lautet das Faktorisierungstheorem wie folgt:

$$\begin{aligned} d\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X} &= \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \int dx_a \int dx_b \int dz_1 \int dz_2 \\ & f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) d\sigma_{ab \rightarrow Q_1 Q_2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$f_i^I(x_i, \mu_I)$ steht für die Partonverteilungsfunktion in Bezug auf das Hadron I und das Parton i in Abhängigkeit der Variablen x_i und der Faktorisierungsskala μ_I . $D_{Q_i}^{H_i}(z_i, \mu_F)$ ist die Fragmentationsfunktion in Bezug auf das Hadron H_i und das Parton Q_i in Abhängigkeit der Variablen z_i und der Fragmentationsskala μ_F . $\sigma_{ab \rightarrow Q_1 Q_2}$ ist der Wirkungsquerschnitt des partonischen Prozesses $ab \rightarrow Q_1 Q_2$.

Der Wirkungsquerschnitt des hadronischen Prozesses ergibt sich dem Faktorisierungstheorem zufolge durch Faltung des partonischen Wirkungsquerschnitts mit den zugehörigen Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen und anschließender Summation über alle beitragenden partonischen Prozesse, wobei Prozesse mit Top-Quarks im Endzustand hier nicht betrachtet werden. Da sowohl Partonverteilungsfunktionen als auch Fragmentationsfunktionen nicht analytisch bekannt sind, ist eine numerische Auswertung unumgänglich.

4.2. Der partonische Wirkungsquerschnitt

Zur Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts wird folgende Formel herangezogen:

$$\begin{aligned} \sigma_{ab \rightarrow Q_1 Q_2} &= \frac{1}{\underbrace{|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_a^\mu p_b^\nu|}_F} \\ & \cdot \underbrace{\int \int \frac{d^3 p_{Q_1}}{(2\pi)^3 \cdot E_{Q_1}} \frac{d^3 p_{Q_2}}{(2\pi)^3 \cdot E_{Q_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_{Q_1} - p_{Q_2}) \cdot |\mathcal{M}|^2}_{PS^{(2)}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Diese Gleichung ist für alle Prozesse des Typs $a + b \rightarrow Q_1 + Q_2$ gültig.

Es wird der Fall betrachtet, dass beide Partonen im Endzustand die gleiche Masse haben. Da massive Quarks nur paarweise erzeugt werden können ist dies gerechtfertigt. Für Prozesse mit masselosen Teilchen kann mühelos der Limes $m \rightarrow 0$ gebildet werden.

Vor der Diskussion der einzelnen Faktoren in Gleichung (4.4) werden zunächst die Impulse im Laborsystem wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned}
 p_a^\mu &= \begin{pmatrix} E_a \\ 0 \\ 0 \\ E_a \end{pmatrix}, & p_{Q_1}^\mu &= z_1 P_1^\mu = z_1 \begin{pmatrix} E_1 \\ |\vec{P}_1| \sin \Theta_1 \sin \phi_1 \\ |\vec{P}_1| \sin \Theta_1 \sin \phi_1 \\ |\vec{P}_1| \cos \Theta_1 \end{pmatrix} \\
 p_b^\mu &= \begin{pmatrix} E_a \\ 0 \\ 0 \\ -E_a \end{pmatrix}, & p_{Q_2}^\mu &= z_2 P_2^\mu = z_2 \begin{pmatrix} E_2 \\ |\vec{P}_2| \sin \Theta_2 \sin \phi_2 \\ |\vec{P}_2| \sin \Theta_2 \sin \phi_2 \\ |\vec{P}_2| \cos \Theta_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Der erste Faktor, in Gleichung (4.4) mit F abgekürzt, ist der Flussfaktor. Dieser ist nicht Lorentz-invariant, allerdings invariant unter speziellen Lorentztransformationen entlang der z-Richtung. Der Teil, der in der Gleichung als $PS^{(2)}$ bezeichnet wird ist der Phasenraum. Der letzte Beitrag $|\mathcal{M}|^2$, über den integriert wird, ist das Betragsquadrat des Streumatrixelements.

Diese Betragsquadrate müssen für jeden beitragenden Prozess separat berechnet werden. Eine beispielhafte Berechnung und eine Liste aller beitragenden Matrixelemente findet sich in Anhang C.

Im Folgenden werden die Faktoren, abgesehen von $|\mathcal{M}|^2$, betrachtet und im Hinblick auf die spätere Verwendung im Rahmen des Faktorisierungstheorems umgeformt werden. Da im Rahmen des Partonmodells masselose Teilchen im Ausgangszustand angenommen werden, nimmt der Flussfaktor die folgende, einfache Form an:

$$F = \frac{1}{2E_a E_b |v_a - v_b|} = \frac{1}{x_a x_b S}. \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 PS^{(2)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_{Q_1}}{E_{Q_1}} \int \frac{d^3 p_{Q_2}}{E_{Q_2}} \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_{Q_1} - p_{Q_2}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_{Q_1}}{E_{Q_1}} \int d^4 p_{Q_2} \delta(p_{Q_2}^2 - m^2) \Theta(E_{Q_2}) \delta^{(4)}(\underbrace{p_a + p_b}_q - p_{Q_1} - p_{Q_2}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_{Q_1}}{E_{Q_1}} \delta((q - p_{Q_1})^2 - m^2) \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 P_1}{2z_1^2 E_1} \delta(q^2 - 2q \cdot p_{Q_1}) \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0).
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde das Differential mithilfe der Beziehung zwischen P_1 und p_{Q_1} auf Hadronniveau umgeschrieben. Im nächsten Schritt werden Kugelkoordinaten eingeführt und die folgenden Relationen verwendet, um die δ -Distribution in Abhängigkeit von Mandelstamvariablen auszudrücken:

$$\begin{aligned}
 s &= 2p_a \cdot p_b = q^2, \\
 t &= m^2 - 2p_a \cdot p_{Q_1}, \\
 u &= m^2 - 2p_b \cdot p_{Q_1}.
 \end{aligned}$$

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

Die Θ -Funktion wird zunächst stehen gelassen. Für den Phasenraum ergibt sich:

$$\begin{aligned} PS^{(2)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d|\vec{P}_1|}{2z_1^2 E_1} |\vec{P}_1|^2 \int_{-1}^1 d\cos\Theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \delta(s+t+u-2m^2) \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d|\vec{P}_1|}{2z_1^2 E_1} |\vec{P}_1|^2 \int_{-1}^1 d\cos\Theta_1 \delta(s+t+u-2m^2) \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0). \end{aligned}$$

Es wird angenommen, dass der Integrand rotationssymmetrisch um die Strahlachse und somit ϕ -unabhängig ist. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da einerseits von unpolarisierten Hadronen im Ausgangszustand ausgegangen wird und andererseits nur Prozesse auf Baumgraphenniveau berücksichtigt werden. Wenn zum Beispiel ein Gluon im Ausgangszustand emittiert werden könnte, ein Prozess der erst in nächsthöherer Ordnung der Störungstheorie möglich ist, würde die Rotationssymmetrie des Integranden unter Umständen gebrochen.

Die Integrationsvariablen werden von $(|\vec{P}_1|, \cos\Theta_1)$ nach $(E_1, \cos\Theta_1)$ transformiert:

$$|\vec{P}_1| = \sqrt{E_1^2 - m^2} \quad \Rightarrow \quad d|\vec{P}_1| = \frac{E_1}{|\vec{P}_1|} dE_1.$$

Für die Grenzen gilt also zunächst $m < E_1 < \infty$. Auf die Berücksichtigung der Θ -Funktion, welche die Energie beschränkt, wird zunächst verzichtet. Somit folgt:

$$PS^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_m^\infty \frac{dE_1}{z_1^2} |\vec{P}_1|^2 \int_{-1}^1 d\cos\Theta_1 \delta(s+t+u-2m^2) \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0).$$

Im folgenden Schritt werden der Transversalimpuls $P_{T,1}$ und die Rapidität y_1 eingeführt:

$$y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{E_1 + P_{L,1}}{E_1 - P_{L,1}} \quad , \quad P_{L,1} = |\vec{P}_1| \cos\Theta_1 \quad , \quad P_{T,1} = |\vec{P}_1| \sin\Theta_1,$$

wobei hier $P_{L,1}$ den Longitudinalimpuls bezeichnet und als Funktion von $(E_1, \cos\Theta_1)$ formuliert:

$$y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 - m^2} \cos\Theta_1}{E_1 - \sqrt{E_1^2 - m^2} \cos\Theta_1} \quad , \quad P_{T,1} = \sqrt{E_1^2 - m^2} \sqrt{1 - \cos^2\Theta_1}.$$

Für die Differentiale gilt:

$$d\cos\Theta_1 dE_1 = \frac{P_{T,1}}{|\vec{P}_1|} dy_1 dP_{T,1}.$$

Somit nimmt $PS^{(2)}$ die folgende Form an:

$$PS^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int dP_{T,1} \frac{P_{T,1}}{z_1^2} \int dy_1 \delta(s+t+u-2m^2) \Theta(p_i^0 - p_{Q_1}^0).$$

Das Argument der δ -Funktion wird auf die Variablen v und w transformiert, die wie folgt definiert werden:

$$v = 1 + \frac{t - m^2}{s}, \quad t - m^2 = -(1 - v)s, \quad (4.7)$$

$$w = -\frac{u - m^2}{s + t - m^2}, \quad u - m^2 = -vws. \quad (4.8)$$

Für die δ -Funktion folgt somit:

$$\begin{aligned}
 \delta(s + t + u - 2m^2) &= \delta(s + (t - m^2) + (u - m^2)) \\
 &= \delta(s - (1 - v)s - vws) \\
 &= \delta(vs(1 - w)) \\
 &= \frac{1}{|vs|} \delta(1 - w) \\
 &= \frac{1}{v x_a x_b S} \delta(1 - w).
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird der Betrag weggelassen. s ist offensichtlich positiv und bei der Betrachtung des hadronischen Querschnitts wird sich zeigen, dass über v integriert wird und beide Integrationsgrenzen positiv sind.

Für $PS^{(2)}$ folgt:

$$PS^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int dP_{T,1} P_{T,1} \int dy_1 \frac{1}{z_1^2} \frac{1}{v x_a x_b S} \delta(1 - w) \Theta(p_i^0 - p_{Q_1}^0).$$

In der obigen Formel wird die δ -Funktion nicht ausgewertet, um zukünftige NLO-Beiträge besser berücksichtigen zu können. In NLO sind auch Beiträge mit $w \neq 1$ möglich.

Der partonische Wirkungsquerschnitt ergibt sich also zu:

$$\sigma_{ab \rightarrow p_{Q_1} p_{Q_2}} = \frac{1}{4\pi z_1^2 x_a^2 x_b^2 S^2} \int dP_{T,1} P_{T,1} \int dy_1 \frac{1}{v} \delta(1 - w) \Theta(p_i^0 - p_{Q_1}^0) \cdot |\mathcal{M}|^2. \quad (4.9)$$

4.3. Der hadronische Wirkungsquerschnitt

Zur Ermittlung des hadronischen Wirkungsquerschnitts wird zunächst dieser Ausdruck betrachtet:

$$\int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{1}{4\pi z_1^2 x_a^2 x_b^2 S^2} \int dP_{T,1} P_{T,1} \int dy_1 \frac{1}{v} \delta(1 - w) \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0).$$

Der Ausdruck enthält, gemäß dem Faktorisierungstheorem in Gleichung (4.3) und dem Ergebnis für den partonischen Wirkungsquerschnitt in Gleichung (4.9), die zunächst benötigten Elemente des hadronischen Wirkungsquerschnitts und wird hier der Kürze halber betrachtet. Die Variablen x_a und x_b werden nach v und w transformiert:

$$x_a = \frac{1}{z_1} \frac{VW}{vw}, \quad x_b = \frac{1}{z_1} \frac{1 - V}{1 - v},$$

wobei für V und W

$$V = 1 + \frac{T - m^2}{S} \quad \text{beziehungsweise} \quad W = -\frac{U - m^2}{S + T - m^2}$$

gilt. Für die Differentiale gilt

$$dx_a dx_b = \frac{1}{z_1^2} \frac{VW(1 - V)}{vw^2(1 - v)^2} dv dw \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dx_a}{x_a^2} \frac{dx_b}{x_b^2} = \frac{z_1^2 v}{VW(1 - V)} dv dw.$$

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

Damit ergibt sich für obigen Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi S^2} \int dv \int dw \int dz_1 \int dz_2 \int dP_{T,1} P_{T,1} \int dy_1 \frac{\delta(1-w)}{VW(1-V)} \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0),$$

und nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi S} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}S-m^2}} dP_{T,1} \int_{-\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{m^2+P_{T,1}^2}}\right)}^{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{m^2+P_{T,1}^2}}\right)} dy_1 \int_0^1 dz_2 \int_{1-V+VW}^1 dz_1 \\ & \int_{\frac{VW}{z_1}}^{1-\frac{1-V}{z_1}} dv \int_{\frac{VW}{vz_1}}^1 dw P_{T,1} \frac{\delta(1-w)}{SVW(1-V)} \Theta(q^0 - p_{Q_1}^0). \end{aligned}$$

Die Grenzen ergeben sich aus folgender Überlegung: Man betrachte statt $a + b \rightarrow Q_1 + Q_2$ den etwas allgemeineren Prozess $a + b \rightarrow Q_1 + X$ und fordere, dass $p_X^2 \geq m^2$ gelte. Diese Ungleichung entspricht der Theta-Funktion $\Theta(q^0 - p_{Q_1}^0) = \Theta(E_{Q_2})$ für den hier betrachteten allgemeineren Prozess $a + b \rightarrow Q_1 + X$ unter der Bedingung, dass mindestens ein Teilchen der Masse m in X enthalten ist.

Aus obiger Forderung ergibt sich unmittelbar

$$v(1-w) \geq 0, \quad (4.10)$$

denn:

$$\begin{aligned} p_X^2 &= (p_a + p_b - p_{Q_1})^2 \\ &= m^2 + 2p_a \cdot p_b - 2p_a \cdot p_{Q_1} - 2p_b \cdot p_{Q_1} \\ &= m^2 + s + t - m^2 + u - m^2 \\ &= m^2 + s - (1-v)s - vws \\ &= m^2 + sv(1-w). \end{aligned}$$

Da $s \geq 0$ ergibt sich (4.10), woraus entweder

$$v \geq 0 \quad \text{und} \quad w \leq 1,$$

oder

$$v \leq 0 \quad \text{und} \quad w \geq 1$$

folgt. Außerdem zeigt man mithilfe der Gleichungen (4.7) und (4.8), sowie

$$t - m^2 \leq 0, \quad u - m^2 \leq 0, \quad \text{und} \quad s \geq 0,$$

dass $v \geq 0$ und somit $w \leq 1$ gilt. Obige Einschränkungen an die Mandelstamvariablen s , t und u kann man durch Untersuchung von Skalarprodukten zwischen zeit- und lichtartigen 4-Impulsvektoren herleiten.

Aus der Bedingung $x_b \leq 1$ bestimmt man die untere Grenze für w :

$$w_{min} = \frac{VW}{vz_1},$$

und analog aus $x_a \leq 1$ die obere Grenze für v :

$$v_{max} = 1 - \frac{VW}{z_1}.$$

Aus der Forderung $w_{min} \leq w_{max} = 1$ findet man die untere Grenze für v :

$$v_{min} = \frac{VW}{z_1}.$$

Anschließend ergibt sich aus $v_{min} \leq v_{max}$ als untere Grenze für z_1 :

$$z_{1min} = VW + 1 - V.$$

Unter Berücksichtigung von $0 \leq z_i \leq 1$ sind die Grenzen für z_1 und z_2 nun festgelegt. Aus der Forderung $z_{1min} < 1 = z_{1max}$ können unter Zuhilfenahme von

$$VW = \frac{m_{T,1}}{\sqrt{S}} e^{y_1} \quad \text{und} \quad 1 - V = \frac{m_{T,1}}{\sqrt{S}} e^{y_1^{-1}},$$

wobei $m_{T,1} = \sqrt{m^2 + P_{T,1}^2}$ die transversale Masse des Hadrons H_1 bezeichnet, je nach gewählter Integrationsreihenfolge entweder die Grenzen für $P_{T,1}$ oder für y_1 bestimmt werden. Sofern die y_1 -Integration zuerst ausgeführt wird, ergeben sich obere und untere Grenze von y_1 zu:

$$y_{1max} = -y_{1min} = \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{S}}{2m_{T,1}} \right).$$

Abschließend wird die obere Grenze für $P_{T,1}$ durch $y_{1max} \geq y_{1min}$ bestimmt:

$$P_{T,1max} = \sqrt{\frac{S}{4} - m^2}.$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt folgt nach dem Faktorisierungstheorem:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X} = & \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \frac{1}{4\pi S} \int_0^{P_{T,1max}} dP_{T,1} \int_{y_{1min}}^{y_{1max}} dy_1 \int_0^1 dz_2 \int_{z_{1min}}^1 dz_1 \int_{\frac{VW}{z_1}}^{v_{max}} dv \int_{\frac{VW}{vz_1}}^1 dw \quad (4.11) \\ & f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) P_{T,1} \frac{\delta(1-w)}{SVW(1-V)} \cdot |\mathcal{M}|^2. \end{aligned}$$

Hier wurde die Θ -Funktion im Integranden weggelassen, da sie die Grenzen nicht weiter einschränkt.

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

Dies wird nun gezeigt:

$$\begin{aligned}
\Theta(q^0 - p_{Q,1}^0) &= \Theta(2E - E_1^0) \\
&= \Theta\left(\sqrt{S} + \frac{T - M^2 + U - M^2}{2\sqrt{S}}\right) \\
&= \Theta\left(\sqrt{S} + z_1 \frac{(t - m^2)/x_a + (u - m^2)/x_b}{2\sqrt{S}}\right) \\
&= \Theta\left(\sqrt{S} - z_1 \frac{(1 - v)s/x_a + vws/x_b}{2\sqrt{S}}\right) \\
&= \Theta\left(\sqrt{S} - z_1 \frac{\sqrt{S}}{2} ((1 - v)x_b + vw x_a)\right) \\
&= \Theta\left(\sqrt{S} - \frac{\sqrt{S}}{2} (1 - V + VW)\right) \\
&= \Theta\left(\sqrt{S} - m_{T,1} \cosh y_1\right).
\end{aligned}$$

Das Argument der Θ -Funktion ist positiv, denn

$$\sqrt{S} - m_{T,1} \cosh y_1 \geq \sqrt{S} - m_{T,1} \cosh y_{1max} = \sqrt{S} - \frac{\sqrt{S}}{2} = \frac{\sqrt{S}}{2} \geq 0$$

Bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge von $P_{T,1}$ und y_1 ergibt sich ein analoges Ergebnis. Dies ist im Hinblick auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{dy_1}$ relevant.

4.4. Differentielle Wirkungsquerschnitte

Als erster differentieller Wirkungsquerschnitt wird $\frac{d\sigma}{dP_{T,1}^2}$ berechnet. Diesen Wirkungsquerschnitt erhält man, indem die Integration über $P_{T,1}$ nicht ausgeführt wird:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X}}{dP_{T,1}^2} &= \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \frac{1}{8\pi S} \int_{y_{1min}}^{y_{1max}} dy_1 \int_0^1 dz_2 \int_{z_{1min}}^1 dz_1 \int_{\frac{vW}{z_1}}^{v_{max}} dv \int_{\frac{vW}{vz_1}}^1 dw \\
& f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) \frac{\delta(1 - w)}{SVW(1 - V)} \cdot |\mathcal{M}|^2.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Als nächster differentieller Wirkungsquerschnitt wird $\frac{d\sigma}{dy_1}$ berechnet. Dazu muss die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Die obere Integrationsgrenze für $P_{T,1}$ wird in diesem Fall mit $z_{1min} \leq z_{1max}$ zu

$$P_{T,1max}(y_1) = \sqrt{\frac{S}{4 \cosh^2 y_1} - m^2}$$

bestimmt. Anschließend wird die Integration über y_1 unterlassen. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X}}{dy_1} &= \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \frac{1}{4\pi S} \int_0^{P_{T,1max}(y_1)} dP_{T,1} \int_0^1 dz_2 \int_{z_{1min}}^1 dz_1 \int_{\frac{vW}{z_1}}^{v_{max}} dv \int_{\frac{vW}{vz_1}}^1 dw \\ & f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) P_{T,1} \frac{\delta(1-w)}{SVW(1-V)} \cdot |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Allgemein lassen sich differentielle Wirkungsquerschnitte in Bezug auf eine beliebige Observable \mathcal{O} wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X}}{d\mathcal{O}} &= \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \frac{1}{4\pi S} \int_0^{P_{T,1max}} dP_{T,1} \int_{y_{1min}}^{y_{1max}} dy_1 \int_0^1 dz_2 \int_{z_{1min}}^1 dz_1 \int_{\frac{vW}{z_1}}^{v_{max}} dv \int_{\frac{vW}{vz_1}}^1 dw \\ & f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) P_{T,1} \frac{\delta(1-w)}{SVW(1-V)} \\ & \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(P_{T,1}, y_1, z_1, z_2, v, w)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Diese Formulierung ist im Hinblick auf die numerische Berechnung besonders nützlich. Mit ihrer Hilfe lassen sich Verteilungen von ausschließlich numerisch bekannten Observablen berechnen, wobei analytisch aufwendige Variablentransformationen des Integranden umgangen werden. Numerisch kann die δ -Funktion allerdings nicht verwendet werden. Es ist jedoch möglich diese durch die Näherung

$$\delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(x)) \approx \frac{1}{2\varepsilon} (\Theta(\mathcal{O}(x) - (\mathcal{O} - \varepsilon)) - \Theta(\mathcal{O}(x) - (\mathcal{O} + \varepsilon))) \quad \text{mit } \varepsilon \ll \mathcal{O} \quad (4.15)$$

zu approximieren.

4.5. Korrelationen und doppelt differentielle Wirkungsquerschnitte

Als einfachste Korrelation berechnet man zunächst $\frac{d^2\sigma}{dP_{T,1}dy_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{AB \rightarrow H_1 H_2 + X}}{dP_{T,1}dy_1} &= \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \frac{1}{4\pi S} \int_0^1 dz_2 \int_{z_{1min}}^1 dz_1 \int_{\frac{vW}{z_1}}^{v_{max}} dv \int_{\frac{vW}{vz_1}}^1 dw \\ & f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) P_{T,1} \frac{\delta(1-w)}{SVW(1-V)} \cdot |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

Korrelationen von zwei beliebigen Observablen \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 lassen sich, analog zu den einfach differentiellen Wirkungsquerschnitten, wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{AB\rightarrow H_1H_2+X}}{d\mathcal{O}_1d\mathcal{O}_2} &= \sum_{a,b,Q_1,Q_2} \frac{1}{4\pi S} \int_0^{P_{T,1max}} dP_{T,1} \int_{y_{1min}}^{y_{1max}} dy_1 \int_0^1 dz_2 \int_{z_{1min}}^1 dz_1 \int_{\frac{vW}{z_1}}^{v_{max}} dv \int_{\frac{vW}{vz_1}}^1 dw \\ & f_a^A(x_a, \mu_I) f_b^B(x_b, \mu_I) D_{Q_1}^{H_1}(z_1, \mu_F) D_{Q_2}^{H_2}(z_2, \mu_F) P_{T,1} \frac{\delta(1-w)}{SVW(1-V)} \cdot |\mathcal{M}|^2 \\ & \cdot \delta(\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_1(P_{T,1}, y_1, z_1, z_2, v, w)) \cdot \delta(\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2(P_{T,1}, y_1, z_1, z_2, v, w)) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.6. Ausarbeitung unterschiedlicher Observablen

Um Korrelationen beliebiger Observablen berechnen zu können, müssen diese Observablen als Funktion der Integrationsvariablen zur Verfügung stehen. Da keine eindeutige Beziehung zwischen der Masse auf Hadronniveau M und der Masse auf Partonniveau m hergestellt werden kann, wird eine Vorschrift benötigt welche angibt, wie die Observablen zu berechnen sind. Zunächst werden weitere Mandelstamvariablen eingeführt:

$$\begin{aligned} S' &= (P_1 + P_2)^2, \\ T' &= (P_B - P_2)^2, \\ U' &= (P_A - P_2)^2. \end{aligned}$$

Diese unterscheiden sich von den bisher verwendeten Variablen S , T , und U da auf Hadronniveau im Ausgangszustand nicht nur zwei Teilchen vorkommen, sondern durch Hadronisierung im Allgemeinen sehr viel mehr Teilchen vorhanden sind. Aus den Definitionen der Mandelstamvariablen leitet man folgende Beziehungen her:

$$\begin{aligned} s &= x_a x_b S, \\ t - m^2 &= \frac{x_a}{z_1} (T - M^2) \\ &= \frac{x_b}{z_2} (T' - M^2), \\ u - m^2 &= \frac{x_b}{z_1} (U - M^2) \\ &= \frac{x_a}{z_2} (U' - M^2). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden unterschiedliche Observablen als Funktion der Mandelstamvariablen ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 (P_1 + P_2)^2 &= S' , \\
 y_1 &= \frac{1}{2} \ln \frac{U - M^2}{T - M^2} , \\
 y_2 &= \frac{1}{2} \ln \frac{T' - M^2}{U' - M^2} , \\
 \Delta y &\equiv y_2 - y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{(T' - M^2)(T - M^2)}{(U' - M^2)(U - M^2)} , \\
 P_{T,1} &= \sqrt{\frac{(T - M^2)(U - M^2)}{S} - M^2} , \\
 P_{T,2} &= \sqrt{\frac{(T' - M^2)(U' - M^2)}{S} - M^2} .
 \end{aligned}$$

Anschließend werden diese auf die Partonniveau-Mandelstamvariablen umgeschrieben und mithilfe folgender Beziehungen schließlich als Funktion der Integrationsvariablen formuliert:

$$\begin{aligned}
 x_a &= \frac{1}{z_1} \frac{VW}{vw} , & x_b &= \frac{1}{z_1} \frac{1 - V}{1 - v} , \\
 VW &= \sqrt{\frac{m^2 + P_{T,1}^2}{S}} e^{y_1} , & 1 - V &= \sqrt{\frac{m^2 + P_{T,1}^2}{S}} e^{-y_1} .
 \end{aligned}$$

Für die Observablen erhält man folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 (P_1 + P_2)^2 &= 2m^2 + \frac{z_2}{z_1} m_{T,1}^2 \left(\frac{1 - v}{vw} e^{2y_1} + \frac{vw}{1 - v} e^{-2y_1} \right) , \\
 y_2 &= y_1 + \ln \frac{1 - v}{vw} , \\
 \Delta y &= \ln \frac{1 - v}{vw} , \\
 P_{T,2} &= \sqrt{\frac{z_2^2}{z_1^2} (P_{T,1}^2 + m^2) - m^2} .
 \end{aligned}$$

Für die Observable $P_{T,2}$ wird hier vereinfachend die Annahme gemacht, dass $m = M$ gelte. Es wurden numerische Vergleiche zwischen den Verteilungen in $P_{T,1}$ und $P_{T,2}$ durchgeführt. Diese Vergleiche haben ergeben, dass beide Verteilungen unter Verwendung der in Table 6.1 angegebenen Phasenraumschnitte, von statistischen Unsicherheiten abgesehen, wie zu erwarten identisch sind.

4. Analytische Untersuchung der Hadronpaarproduktion

5. Aufbau des Programms zur numerischen Rechnung

Dieses Kapitel behandelt das zur numerischen Auswertung der differentiellen und doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitte entwickelte Programm.

5.1. Aufgabe des Programms

Das Programm soll verschiedene Anforderungen erfüllen:

- Es soll mit geringem Aufwand möglich sein, beliebige Prozesse vom Typ $A + B \rightarrow H_1 + H_2 + X$ zu untersuchen. Dazu müssen sowohl die Partonverteilungs- als auch die Fragmentationsfunktionen mit wenig Aufwand austauschbar sein.
- Es sollen Verteilungen in unterschiedlichen Observablen berechnet werden.
- Es sollen Korrelationen unterschiedlicher Kombinationen von Observablen berechnet werden.
- Bei Bedarf sollen sich mit relativ geringem Aufwand neue Observablen implementieren lassen.

Aufgabe des Programms ist die Berechnung von differentiellen Wirkungsquerschnitten gemäß den Gleichungen (4.14) und (4.17). Im Fall der Korrelationen weicht die numerische Berechnung vom oben angegebenen analytischen Ausdruck noch weiter ab. Statt der weiteren δ -Funktion wird folgender Ausdruck eingesetzt werden:

$$\Theta(\mathcal{O}_2(x) - \mathcal{O}_2^{bin-}) - \Theta(\mathcal{O}_2(x) - \mathcal{O}_2^{bin+}).$$

In obiger Formel steht \mathcal{O}_2^{bin-} bzw. \mathcal{O}_2^{bin+} für die Unter- bzw. Obergrenze des zu betrachtenden Bins. Die Breite $\Delta\mathcal{O}_2^{bin} = \mathcal{O}_2^{bin+} - \mathcal{O}_2^{bin-}$ ist hier verhältnismäßig groß zu wählen, so dass der gesamte zugängliche kinematische Bereich in dieser Observablen in circa vier Bins enthalten ist. Diese grobe Einteilung wird vorgenommen um statistisch belastbare Daten zu erhalten. Das hat zur Folge, dass statt der Berechnung einer Funktion, nur einige wenige Werte berechnet werden, welche sich graphisch zum Beispiel mithilfe eines Histogramms darstellen lassen.

5.2. Verwendung des Programms

In diesem Abschnitt wird die Benutzung des Programms erläutert.

5.2.1. Kompilierung

Bei der Kompilierung ist zu beachten, dass sowohl ein FORTRAN- als auch ein C++-Compiler benötigt wird.

Außerdem müssen die folgenden Bibliotheken installiert sein:

- CUBA [9], welche zur numerischen Integration verwendet wird.
- LHAPDF [10], welche die Partonverteilungsfunktionen zur Verfügung stellt.

Die Datei *kkk06_D.f* [11] stellt die Fragmentationsfunktionen zur Verfügung und ist in FORTRAN geschrieben.

Die Dateien *cscalc.cpp0*, *process.cpp*, *subprocess.cpp*, *task.cpp*, *differentialCS.cpp* und *correlation.cpp* sind C++-Dateien. Beim Kompilieren der C++-Dateien in Objektdateien müssen die header-Dateien der beiden verwendeten Bibliotheken, sowie die Datei *header.h* eingebunden werden.

Beim Binden, das die Objektdateien in eine ausführbare Datei umwandelt, müssen sowohl CUBA als auch LHAPDF eingebunden werden. Außerdem muss `stdc++`, die C++-Standardbibliothek, eingebunden werden.

Es liegt ein so genanntes Makefile vor, welches eine ausführbare Programmdatei erzeugt, sofern die Bibliotheken installiert sind. Allerdings müssen bei Verwendung des Makefiles die Pfade modifiziert werden. Relevant sind hier insbesondere folgende Variablen:

- LHAPDF - Der Pfad der Bibliothek LHAPDF.
- CUBA - Der Pfad der Bibliothek CUBA.
- HOME - Der Pfad des home-Verzeichnisses.
- RUNLIB - Der Pfad, in welchem das Programm sich befindet.

Nachdem die Pfade im Makefile angepasst wurden, kann die ausführbare Datei *cscalc* mit der Eingabe des Befehls *make* erzeugt werden.

Das Programm lässt sich dann entweder direkt mit der Eingabe *./cscalc* oder durch die Eingabe von *./calc* gestartet werden. *calc* startet ein Linux-Skript, welches die relevanten Ausgabedateien, sofern vorhanden löscht, und in leerem Zustand neu erzeugt. Außerdem werden zur Kontrolle der Programmlaufzeit Zeitstempel am Anfang und Ende des Programmaufrufs ausgegeben.

5.2.2. Eingabe

Das Programm wird mit Einträgen innerhalb der Datei *command.txt* gesteuert. Es folgt eine Auflistung der Parameter, in Klammern ist der jeweilige Datentyp beziehungsweise Wertebereich angegeben. Alle hier angegebenen etwaigen Einschränkungen der Wertebereiche sind rein technisch bedingt.

name of the pdf set: (*string*) Dies ist der Name des zu verwendenden Satzes von Partonverteilungsfunktionen entsprechend der Bezeichnungen von LHAPDF. Eine Liste aller möglichen Sätze findet sich unter <http://projects.hepforge.org/lhapdf/pdfsets>.

type of the pdf set: (*0, 1*) In Abhängigkeit vom benutzten Satz von Partonverteilungsfunktionen kann zwischen zwei Methoden zu deren Berechnung gewählt werden:

- 0** : Die Verlauf der Funktion wird anhand einer *.LHpdf*-Datei berechnet.

1 : Die Funktion wird mithilfe einer .LHgrid-Datei interpoliert.

In jedem Fall muss sichergestellt werden, dass die gewünschte Methode für den gewählten Satz von Partonverteilungsfunktionen zur Verfügung steht.

CS type: (1, 2) Hier wird die Art des zu berechnenden Wirkungsquerschnitts angegeben.

1: Es wird ein differentieller Wirkungsquerschnitt berechnet

2: Es wird ein doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt berechnet

PTtype: (1, 2, 3) Diese Variable setzt den Transversalimpuls Q_T , welcher zur Berechnung der unterschiedlichen Skalen verwendet wird.

1: Es wird der Transversalimpuls des Hadrons H_1 verwendet.

2: Es wird der Transversalimpuls des Hadrons H_2 verwendet.

3: Es wird das geometrische Mittel $\sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2}$ der Transversalimpulse beider Hadronen verwendet.

a_R: (*double*) Parameter a_R zur Bestimmung der Renormierungsskala gemäß

$$\mu_R = b_R \sqrt{Q_T^2 + a_R^2 m^2}.$$

b_R: (*double*) Der Parameter b_R in obiger Gleichung zur Berechnung der Renormierungsskala.

a_I: (*double*) Parameter a_I zur Bestimmung der Faktorisierungsskala gemäß

$$\mu_I = b_I \sqrt{Q_T^2 + a_I^2 m^2}.$$

b_I: (*double*) Der Parameter b_I in obiger Gleichung zur Berechnung der Faktorisierungsskala.

a_F: (*double*) Parameter a_F zur Bestimmung der Fragmentationsskala gemäß

$$\mu_F = b_F \sqrt{Q_T^2 + a_F^2 m^2}.$$

b_F: (*double*) Der Parameter b_F in obiger Gleichung zur Berechnung der Fragmentationsskala.

charm mass: (*double*) Dieser Wert wird für die Masse des Charm-Quarks in GeV verwendet.

bottom mass: (*double*) Dieser Wert wird für die Masse des Bottom-Quarks in GeV verwendet.

sqrt(S): (*double* > 0) Die Schwerpunktenergie in GeV.

OBS1: (1,2,3,...,7) Sofern ein differentieller oder ein doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt berechnet wird, wird hier die Observable, bezüglich der die Verteilung berechnet werden soll, festgelegt.

1: Der Transversalimpuls $P_{T,1}$ des Hadrons H_1 .

2: Der Transversalimpuls $P_{T,2}$ des Hadrons H_2 .

3: Die Rapidität y_1 des Hadrons H_1 .

4: Die Rapidität y_2 des Hadrons H_2 .

5: Die Differenz der Rapiditäten $\Delta y = y_2 - y_1$ beider Hadronen.

6: Der Relativwinkel beider Hadronen (bisher nicht implementiert).

7: Die invariante Masse $(P_1 + P_2)^2$ des Hadronenpaares.

5. Aufbau des Programms zur numerischen Rechnung

OBS1min: (*double*) Die untere Grenze des Intervalls, innerhalb dessen die Verteilung berechnet werden soll.

OBS1max: (*double*) Die obere Grenze des Intervalls, innerhalb dessen die Verteilung berechnet werden soll.

OBS1 bin number: (*integer* ≥ 1) Die Anzahl der Punkte innerhalb des Intervalls [OBS1min, OBSmax], zu denen die Verteilung berechnet werden soll.

OBS2: (*1,2,3,...,7*) Sofern eine Korrelation berechnet werden soll, wird hier die zweite Variable angegeben. Die Bedeutung der unterschiedlichen Werte ist identisch mit OBS1.

OBS2 bin number: (*integer* ≥ 1) Die Anzahl der Bins, in die das Intervall [OBS2min, OBS2max] unterteilt wird. Diese Zahl sollte relativ klein sein, um numerisch präzise Ergebnisse zu erhalten.

PT1min: (*double*) Die untere Grenze an den Transversalimpuls des Hadrons H_1 in GeV ab welcher das Hadron vom Detektor registriert wird.

PT2min: (*double*) Die untere Grenze an den Transversalimpuls des Hadrons H_2 in GeV ab welcher das Hadron vom Detektor registriert wird.

yminexp: (*double*) Der Minimalwert, welchen die Rapiditäten y_1 und y_2 der Hadronen H_1 und H_2 erreichen müssen, um beide Hadronen nachzuweisen.

ymaxexp: (*double*) Die maximalen Rapiditäten y_1 und y_2 der Hadronen H_1 und H_2 , welche erreicht werden müssen, um beide Hadronen nachzuweisen.

FF-Cutoff: (*double*) Da die Fragmentationsfunktionen $D_{Q_i}^{H_i}(z_i, \mu_F)$ üblicherweise bei kleinen Werten von z_i nur ungenau bekannt sind, wird hier ein Abschneideparameter $z_{i,0}$ eingeführt. Es wird $D_{Q_i}^{H_i}(z_i < z_{i,0}, \mu_F) = 0$ gesetzt.

Verbosity: (*0, 1*) Diese Variable variiert den Umfang der Bildschirmausgabe der numerischen Integration.

0: Es werden lediglich Endergebnisse, Fehler und χ^2 ausgegeben.

1: Es werden Zwischenergebnisse nach jeder Vegas-Iteration ausgegeben.

nstart: (*integer* > 0) Anfangswert für die Anzahl der Aufrufe des Integranden pro Vegas-Iteration. Diese Angabe bezieht sich auf den ersten Aufruf von Vegas.

nincrease: (*integer* > 0) Die Erhöhung der Aufrufe des Integranden pro Iteration. Diese Angabe bezieht sich auf den ersten Aufruf von Vegas.

maxeval: (*integer* > 0) Maximale Aufrufe des Integranden. Diese Angabe bezieht sich auf den ersten Aufruf von Vegas.

NSTART: (*integer* > 0) Anfangswert für die Anzahl der Aufrufe des Integranden pro Vegas-Iteration. Diese Angabe bezieht sich auf den zweiten Aufruf von Vegas.

NINCREASE: (*integer* > 0) Die Erhöhung der Aufrufe des Integranden pro Iteration. Diese Angabe bezieht sich auf den zweiten Aufruf von Vegas.

MAXEVAL: (*integer* > 0) Maximale Aufrufe des Integranden. Diese Angabe bezieht sich auf den zweiten Aufruf von Vegas.

Bingrenzen von OBS2: Unterhalb dieser Zeile werden die Grenzen der Bins der zweiten Observablen eingegeben. Die Anzahl dieser Zeilen ist vom Parameter OBS2 bin number abhängig und sollte OBS2 bin number+1 betragen. Weitere Zeilen werden vom Programm nicht gelesen. Die Grenzen müssen in aufsteigender Reihenfolge eingegeben werden.

Ein Beispiel für eine mögliche Wahl der Eingabeparameter findet sich in Anhang D.

Beitrag	enthaltene Subprozesse
Erster Beitrag	$gg \rightarrow c\bar{c}$
Zweiter Beitrag	$q\bar{q} \rightarrow c\bar{c}$
Dritter Beitrag	$gg \rightarrow gg$
Vierter Beitrag	$gg \rightarrow b\bar{b}$ $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$
Fünfter Beitrag	$gg \rightarrow q\bar{q}$ $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$ $gc \rightarrow gc + c.c.$ $gb \rightarrow gb + c.c.$ $gq \rightarrow gq + c.c.$ $c\bar{c} \rightarrow c\bar{c}$ $b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}$ $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ $cc \rightarrow cc + c.c.$ $bb \rightarrow bb + c.c.$ $qq \rightarrow qq + c.c.$ $cb \rightarrow cb + c.c.$ $cq \rightarrow cq + c.c.$ $bq \rightarrow bq + c.c.$ $qq' \rightarrow qq' + c.c.$ $c\bar{b} \rightarrow c\bar{b} + c.c.$ $c\bar{q} \rightarrow c\bar{q} + c.c.$ $b\bar{q} \rightarrow b\bar{q} + c.c.$ $q\bar{q}' \rightarrow q\bar{q}'$

Tabelle 5.1.: Zuordnung der Subprozesse auf Partonniveau zu den fünf ausgegebenen Beiträgen

5.2.3. Ausgabe

Die Ausgabe erfolgt in der Datei *log.txt*. Die Datei *log.txt* ist wie folgt aufgebaut:

Zunächst werden alle Eingabeparameter mit Namen und Wert im Format *#Parameter Wert* aufgeführt. Durch das Rautenzeichen werden diese Zeilen für das zum plotten verwendete Programm als Kommentar kenntlich gemacht.

Bei der Berechnung von Verteilungen hat jede Zeile das folgende Format:

In der ersten Spalte steht der aktuelle Wert von OBS1. Dieser wird in N Schritten variiert. N ist hier der Eingabeparameter OBS1 bin number. In der i -ten Zeile steht in der ersten Spalte also folgende Zahl: $\mathcal{O}_{1min} + i \cdot (\mathcal{O}_{1max} - \mathcal{O}_{1min})$, wobei \mathcal{O}_{1min} (\mathcal{O}_{1max}) für den Eingabeparameter

OBS1min (OBS1max) steht.

In den folgenden 10 Spalten sind paarweise die Beiträge der Summe und deren numerischer Fehler aufgelistet. In den letzten beiden Spalten steht die Summe aller Beiträge und ihr numerischer Fehler. Die in den einzelnen Beiträgen enthaltenen Subprozesse auf Partonniveau werden in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Wenn eine Korrelation berechnet wird, ist das Ausgabeformat analog dem oben Beschriebenen. Jede Zeile enthält hier OBS2 bin number mal die 12 Spalten mit Ergebnissen. Die ersten 12 dieser Spalten beziehen sich auf das erste Bin in der zweiten Observablen, die nächsten 12 Spalten auf das zweite Bin und so weiter. Die Spaltenzahl hängt in diesem Fall von der Anzahl der zu unterscheidenden Bins in der zweiten Observablen ab.

5.3. Technische Details

Dieser Abschnitt widmet sich den unterschiedlichen Klassen des Programms. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Klassen und die interne Funktionsweise des Programms erläutert.

5.3.1. Beschreibung der Klassen

Im Programm wurden die folgenden Klassen definiert: *subprocess*, *process*, *task*, *differentialCS* und *correlation*. Jede dieser Klassen ist in der Headerdatei *header.h* deklariert und in einer separaten Datei *Klassenname.cpp* definiert.

Es folgt eine Beschreibung der einzelnen Klassen.

subprocess: Diese Klasse beschreibt einen einzelnen partonischen Subprozess und enthält als lokale Variablen vom Typ *integer* die beteiligten Partonen a , b , h_1 und h_2 . Die Zuordnung der Zahlen von -6 bis 6 zu den unterschiedlichen Quark-Flavours wird entsprechend der Konvention der LHAPDF-Bibliothek vorgenommen:

\bar{t}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{u}	\bar{d}	g	d	u	s	c	b	t
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

process: Ein Objekt dieser Klasse beinhaltet eine als Liste realisierte Menge von Objekten des Typs *subprocess*. Die Subprozesse werden so zusammengefasst, dass allen das gleiche Matrixelement und identische Masse im Endzustand zugeordnet werden kann. Das Ziel ist Gl. 4.14 auf die Form

$$\sum_{\mathcal{I}} \int K_{\mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} PDF(a) \times PDF(b) \times FF(h_1) \times FF(h_2), \quad (5.1)$$

zu bringen.

In dieser Gleichung steht \mathcal{I} für einen Prozess und i für zugehörige Subprozesse. Das Integralzeichen repräsentiert die Integrationen, die in Gl. (4.14) angegeben sind. Dass die Massen im Endzustand aller Subprozesse $i \in \mathcal{I}$ identisch sind, hat insbesondere die Gleichheit der zugehörigen Integrationsgrenzen zur Folge. $K_{\mathcal{I}}$ steht für den Integranden aus Gl. (4.14) ohne Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen sowie fehlender δ -Funktion. Die Partonverteilungsfunktionen wurden mit PDF , die Fragmentationsfunktionen mit FF abgekürzt. Wesentliche Elementfunktionen der Klasse *process* sind *Matrixelement2* und *pdf2ff2*.

Matrixelement2 gibt das Betragsquadrat des zum jeweiligen Prozess gehörenden Matrixelementes zurück. *pdf2ff2* liefert die Summe über die Produkte der Fragmentations- und Partonverteilungsfunktionen.

task: Die Klasse *task* hat eine zentrale Rolle. Sie ist die einzige Klasse, deren Elementfunktionen in der *main*-Datei des Programms aufgerufen werden. Die Elementfunktion *task::gettask* liest die Steuerungsdatei *command.txt* ein und speichert die Eingabeparameter. Die Elementfunktion *task::performtask* erzeugt eine Liste mit Objekten des Typs *process*, durchläuft diese, ruft je nach zu berechnender Verteilung eine der Funktionen *differentialCS::calculate* und *correlation::calculate* auf und speichert die Ergebnisse in der Datei *log.txt*.

differentialCS: Die Klasse *differentialCS* übernimmt die Berechnung der differentiellen Wirkungsquerschnitte. Die Elementfunktion *differentialCS::Integrand* stellt den Integranden zur Verfügung. Die Elementfunktion *differentialCS::calculate* führt zwei Vegas-Integrationen durch. Die erste Integration dient der groben Vermessung des Integranden. Das so erhaltene Gitter dient als Grundlage für den zweiten Aufruf von Vegas, mit dem das endgültige Ergebnis bestimmt wird.

correlation Die Klasse *correlation* ist analog zur Klasse *differentialCS* aufgebaut. Wesentlicher Unterschied ist eine zusätzliche Θ -Funktion im Integranden, welche dafür sorgt dass der Wert der zweiten Observablen im jeweils relevanten Bin liegt.

5.4. Möglichkeiten zur Modifikation des Programms

5.4.1. Zusätzliche Observable

Zur Implementierung einer weiteren Observablen sind folgende Schritte erforderlich:

- Der neuen Observable wird eine ganze Zahl zugewiesen. Die Fallunterscheidungen bezüglich *obs1_type* und *obs2_type* werden mithilfe dieser Zahl ausgeführt. Bisher sind die Zahlen 1, 2, ..., 7 bereits im Programm in Benutzung und sollten nicht für neue Observablen verwendet werden.
- Hinzufügen des Namens der Observablen in den Elementfunktionen *task::obs1name* und *task::obs2name*. Diese Funktionen ordnen den zur Unterscheidung intern verwendeten Integer-Variablen Observablennamen zu.
- Zur Berechnung stehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung:
 1. Wenn die zu implementierende Observable explizit als Funktion der Integrationsvariablen vorliegt, sollte dieser Ausdruck nach innersten Integrationsvariable I aufgelöst werden. Dies ist nötig, da die Grenzen der äußeren Integrationsvariablen von inneren Integrationsvariablen abhängen. Die Reihenfolge von außen nach innen ist: $P_{T,1}$, y_1 , z_2 , z_1 und v .
Es sind nun die Grenzen dieser Integrationsvariablen I , welche eingeschränkt werden, um die Approximation der δ -Funktion gemäß Gleichung 4.15 im Integranden durchzuführen. Die Grenzen der Integrationsvariablen I werden mithilfe der Funktionen *differentialCS::Imax_xi* und *differentialCS::Imin_xi* eingeschränkt.

5. Aufbau des Programms zur numerischen Rechnung

2. Wenn die zu implementierende Observable zwar analytisch bekannt ist, aber nicht explizit als Funktion der Integrationsvariablen vorliegt, steht eine zweite Möglichkeit zur Verfügung. Diese kann auch verwendet werden, wenn der Zusammenhang zwischen Observable und Integrationsvariablen so kompliziert ist, dass die erste Methode zu aufwändig wird.

Zunächst wird in der Funktion `differentialCS::obs1_xi` die Observable als Funktion der Integrationsvariablen angegeben. Wichtig ist, dass alle Member-Funktionen der Klasse `differentialCS` verwendet werden können. Daher steht eine Vielzahl kinematischer Variablen zur Verfügung mithilfe derer die Observable angegeben werden kann. Im folgenden Schritt ist die Funktion `differentialCS::Integrand` so abzuändern, dass sofern eine Verteilung in der neuen Observablen berechnet werden soll, der Wert der Funktion `differentialCS::deltafunction` abgefragt wird. Wenn diese Funktion 0 zurückgibt, sollte der Integrand auf 0 gesetzt werden.

Unabhängig davon welche der beiden Methoden verwendet wurde, müssen zusätzlich alle vorgenommenen Änderungen an Funktionen in den gleichnamigen Funktionen der Klasse `correlation` vorgenommen werden. Außerdem ist in der Funktion `correlation::obs2_xi` die Observable als Funktion der Integrationsvariablen einzutragen. Dies ist nötig, um die zusätzliche Θ -Funktion im Integranden auswerten zu können.

5.4.2. Alternative Hadronen im Endzustand

Eine naheliegende Modifikation des Programms ist die Berechnung von differentiellen Wirkungsquerschnitten und Korrelationen zur Produktion eines anderen Paares von Hadronen.

Das genaue Vorgehen ist davon abhängig in welcher Form die zu verwendenden Fragmentationsfunktionen vorliegen. Daher ist die folgende Liste eher allgemein gehalten.

- Als erstes ist der Quelltext der neuen Fragmentationsfunktionen in das Programm einzubinden. Dies geschieht durch Modifikation des Makefiles. An welcher Stelle das Makefile modifiziert werden muss, hängt von der verwendeten Programmiersprache ab. Grundsätzlich sollte es keine Schwierigkeiten geben C- oder C++-Code einzubinden. Auch Fortran-Code sollte sich ohne größere Schwierigkeiten einbinden lassen. Allerdings sind hier weitere Schritte erforderlich. Es wird empfohlen in der Datei `fortranheader.h` einen sogenannten Wrapper zu schreiben, also eine C++-Funktion, innerhalb derer die Fortranroutine zur Berechnung der Fragmentationsfunktionen aufgerufen wird. Dies hat den Vorteil, dass der Aufruf innerhalb des Hauptprogramms äußerst übersichtlich bleibt. Eine bekannte Schwierigkeit bei der Implementation dieses Wrappers ist, dass die Fortranroutine trotz korrektem Aufruf innerhalb des Wrappers vom Linker nicht erkannt wird. Ursache hierfür sind unterschiedliche Konventionen der Compiler g++ und g77 für die interne Benennung von Funktionen. Fehler dieser Art können durch Untersuchung der Objektdateien, zum Beispiel mithilfe des Shell-Befehls `nm`, aufgespürt werden.
- Der einzige Aufruf der Fragmentationsfunktionen im Hauptprogramm erfolgt in der Funktion `process::pdf2ff2`. Dort können die verwendeten Funktionen einfach ausgetauscht werden. Alternativ kann eine Variable angelegt werden, mit deren Hilfe eine Fallunterscheidung durchgeführt werden kann. Diese Variable kann analog zur Variablen `fforder` angelegt werden. Letztlich macht die Variable `fforder` nichts anderes als eine Fallunterscheidung zwischen den zu verwendenden Fragmentationsfunktionen zu treffen, allerdings wäre es unter dem Gesichtspunkt der Lesbarkeit des Codes nicht günstig diese Variable für andere Prozesse zu gebrauchen. Im Prinzip kann man sie natürlich umbenennen.

5.4.3. Optimierung der Laufzeit

Im Verlauf dieser Arbeit wurde das Programm nicht annähernd optimiert. Grund hierfür ist die Abwägung zwischen zur Verfügung stehender Programmier- und Rechenzeit. Da zum Rechnen der Linux-Cluster der THEP zur Verfügung stand und somit auf mehreren Rechnern parallel gerechnet werden konnte, hatte die Optimierung der Laufzeit keine hohe Priorität. Es gibt allerdings naheliegende Möglichkeiten die Laufzeit des Programms zu verbessern, sollte dies erforderlich werden.

- Zunächst bietet sich die Verwendung eines Profilers an, um die Funktionen zu identifizieren, die in hohem Maße zur Laufzeit des Programms beitragen. Diesen Funktionen kann man ihre Parameter per call-by-reference zuweisen. Dies sollte aufgrund der reduzierten Kopiervorgänge zu einem besseren Laufzeitverhalten beitragen.
- Eine einfache Möglichkeit besteht in der Verwendung der Compileroptimierung. Zur Berechnung der in dieser Arbeit vorliegenden Ergebnisse wurde diese nicht verwendet, jedoch legen erste Tests nahe, dass sich durch Compileroptimierung eine Reduktion der Laufzeit um etwa 10% erreichen lässt.
- Eine aufwändige Modifikation des Programms ist die Verwendung eines sogenannten Histogrammers. Dies kann die zur Berechnung von Korrelationen benötigte Laufzeit um den Faktor *OBS2 bin number*, also typischerweise 3-4 reduzieren. Hierbei wird die Θ -Funktion im Integranden, die sicherstellt dass die zweite Observable im gewünschten Bin liegt, entfernt. Stattdessen wird gezählt, wie oft die durch die Vegas-Integration zufällig ermittelten Phasenraumpunkte in den zu betrachtenden Bins liegen. Dies bewirkt, dass fast jeder Satz von Quasi-Zufallszahlen zum Ergebnis beiträgt. In der bisher realisierten Version des Programms wird der Großteil der generierten Sätze von Zufallszahlen verworfen, da der entsprechende Phasenraumpunkt nicht im gerade gewünschten Bin der zweiten Observablen liegt.

5. Aufbau des Programms zur numerischen Rechnung

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$

In diesem Kapitel wird der Prozess $pp \rightarrow D^* D^* X$ untersucht. Einerseits kann anhand dieses Prozesses die QCD getestet werden und andererseits ist die Kenntnis dieses Prozesses wichtig zur Untergrundunterdrückung bei der Suche nach neuer Physik.

Offene Fragen der QCD, die anhand dieses Prozesses untersucht werden können betreffen die Invarianz der QCD unter Ladungskonjugation und Parität, die Überprüfung der verwendeten Partonverteilungs- und Fragmentationsfunktionen, sowie die Ermittlung des Beitrags der Gluonen zum Spin des Protons.

Zahlreiche Theorien zur Physik jenseits des Standardmodells postulieren die Existenz schwerer Teilchen, die unter anderem in schwere Mesonen zerfallen könnten. Um den Nachweis dieser Prozesse zu ermöglichen, ist es notwendig die Vorhersage des Standardmodells zur Produktion schwerer Mesonen genau zu kennen.

6.1. Experimenteller Nachweis von D^* -Mesonen

Um den Prozess $pp \rightarrow D^* D^* X$ experimentell zu beobachten, ist es notwendig beide D^* -Mesonen im Endzustand nachzuweisen. In diesem Abschnitt wird exemplarisch eine Methode zum Nachweis von D^* -Mesonen vorgestellt.

Die Methode [12] macht sich den Zerfallskanal $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi_s^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi_s^+$ zunutze. π_s steht für ein Pion mit niedrigem Impuls bei einer Energie von ca. 145 MeV. Trotz seines niedrigen Verzweigungsverhältnisses von ungefähr 3% liefert dieser Zerfallskanal eine Nachweismöglichkeit hoher Güte. Da beide Mesonen nachzuweisen sind und die Effizienz des Detektors in Betracht gezogen werden muss, ist die Messung gleichwohl experimentell anspruchsvoll.

Den Spuren eines Ereignisses werden die Massen der Zerfallsprodukte im zu untersuchenden Zerfallskanal zugeordnet. Hierbei werden alle möglichen Kombinationen von Massen- und Ladungszuordnung berücksichtigt. Mithilfe dieser Massen und der gemessenen Impulse wird die invariante Masse der Zerfallsprodukte bestimmt. Um den Untergrund zu unterdrücken, wird sowohl die invariante Masse der D^0 -Mesonen, als auch die invariante Masse der D^* -Mesonen rekonstruiert. Es wird die Differenz der invarianten Massen $\Delta M = M_{K\pi\pi_s} - M_{K\pi}$ betrachtet. Anhand dieser Verteilung lassen sich D^* -Mesonen nachweisen.

Zum Nachweis eines Paares von D^* -Mesonen, lässt sich analog vorgehen, wobei sichergestellt werden muss, dass beide D^* -Mesonen demselben Ereignis zuzuordnen sind.

6.2. Numerische Ergebnisse

Die im folgenden Abschnitt vorgestellten Ergebnisse wurden im Hinblick auf den ATLAS-Detektor berechnet. Dies spiegelt sich insbesondere in der Wahl der Parameter wider. Bei den in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnissen wurden, sofern nicht explizit anders angegeben, die in Tabelle 6.1 angegebenen Parameter und Phasenraumschnitte verwendet. Diese Parameter wurden [13] entnommen.

Die in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnisse sind mit einem statistischen Fehler von $< 5\%$ behaftet, sofern nicht anders angegeben. Dieser statistische Fehler ist durch die Monte-Carlo-

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$

Parameter	Wertebereich
Schwerpunktenergie \sqrt{S}	14 TeV
Transversalimpuls $P_{T,1}$ des Hadrons H_1	> 5 GeV
Transversalimpuls $P_{T,2}$ des Hadrons H_2	> 5 GeV
Rapidity y_1 des Hadrons H_1	$ y_1 < 2,5$
Rapidity y_2 des Hadrons H_2	$ y_2 < 2,5$
Masse des Charm-Quarks m_c	1,5 GeV
Masse des Bottom-Quarks m_b	4,5 GeV

Tabelle 6.1.: Verwendete Phasenraumschnitte und Parameter

Integration bedingt und lässt sich beliebig verkleinern, sofern eine höhere Rechenzeit in Kauf genommen wird.

Allerdings wird sich herausstellen, dass der überwiegende Beitrag zur Gesamtunsicherheit der Ergebnisse von Skalenunsicherheiten herrührt.

Für sämtliche vorgestellten Rechnungen wurden die Partonverteilungsfunktionen CTEQ 6.6 (subset 0) [14], sowie die Fragmentationsfunktionen aus [11] verwendet. Grund für die Wahl dieser Fragmentationsfunktionen ist, dass diese LO-Fragmentationsfunktionen sind.

Die in diesem Abschnitt durchweg als σ bezeichnete Größe beinhaltet in symbolischer Schreibweise folgende Beiträge zum Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma(pp \rightarrow D^* D^*) = \sum_{i,j,k,l} f_{ij}^{pp} \otimes \sigma^{LO}(ij \rightarrow kl) \otimes D_{kl}^{D^* D^*}.$$

In obiger Gleichung steht f für die Partonverteilungs- und D für die Fragmentationsfunktionen. σ^{LO} ist der partonische Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung der Störungstheorie.

Alle in der Rechnung berücksichtigten Beiträge sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Der erste Beitrag $gg \rightarrow c\bar{c}$ ist der numerisch wichtigste Beitrag. Der zweite Beitrag $q\bar{q} \rightarrow c\bar{c}$ wird separat behandelt, da er ein $c\bar{c}$ -Paar im partonischen Endzustand enthält. Der dritte Beitrag berücksichtigt den Prozess $gg \rightarrow gg$. Der vierte Beitrag beinhaltet die Prozesse $gg \rightarrow b\bar{b}$ und $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$. Diese Prozesse mit einem $b\bar{b}$ -Paar im Endzustand tragen aus folgendem Grund zum Prozess $pp \rightarrow D^* D^*$ bei: Das b - beziehungsweise \bar{b} -Quark kann in ein B -Meson fragmentieren, welches daraufhin schwach in ein D^* -Meson zerfällt. Dieser zweischrittige Prozess wird von den verwendeten Fragmentationsfunktionen [11] als Fragmentation $b \rightarrow D^*$ behandelt. Der fünfte Beitrag fasst alle anderen berücksichtigten Prozesse zusammen. Diese Prozesse haben die Eigenschaft, dass alle beteiligten Quarks als masselos behandelt werden.

Die Anzahl der pro Zeit zu erwartenden, mithilfe des oben beschriebenen „goldenen Zerfallskanals“ nachgewiesenen Ereignisse \dot{N} kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\dot{N} = \sigma_{tot} \cdot \mathcal{L} \cdot \varepsilon^2 \cdot P^2(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi_s^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi_s^+), \quad (6.1)$$

wobei σ_{tot} für den totalen Wirkungsquerschnitt und \mathcal{L} für die Luminosität steht. ε ist ein Faktor der der begrenzten Akzeptanz, Effizienz und Auflöschung des Detektors Rechnung trägt und $P(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi_s^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi_s^+)$ die Wahrscheinlichkeit für den angegebenen Zerfall.

Mit $P^2(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi_s^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi_s^+) \approx 10^{-3}$, der nominalen ATLAS-Luminosität $\mathcal{L} = 10^{-2}/pbs$, einem totalen Wirkungsquerschnitt in der Größenordnung $\mathcal{O}(\sigma_{tot}) = 10^6 pb$ und einer Nachweiswahrscheinlichkeit der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon) = 0,1$ ergibt sich

$$\mathcal{O}(\dot{N}) = 0,1/s.$$

Einige der in diesem Kapitel dargestellten Kurven sind mit Spline-Interpolation geglättet worden. Hierzu wurde die Gnuplotroutine `acsplines` verwendet. Die durch die Interpolation verursachten Abweichungen von den berechneten Werten sind kleiner als der statistische Fehler.

6.2.1. $P_{T,1}$ -Verteilungen

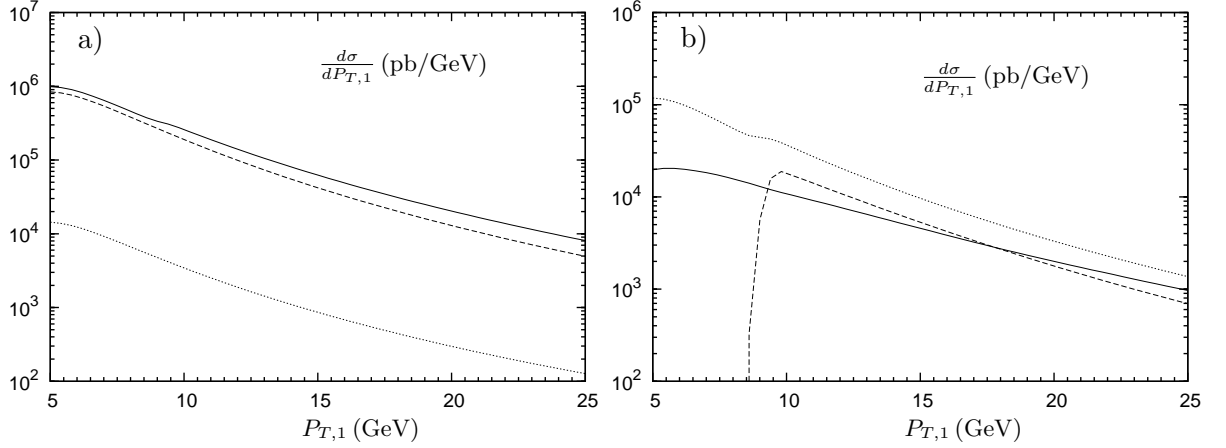


Abbildung 6.1.: $P_{T,1}$ -Verteilung aufgeschlüsselt nach partonischen Subprozessen.

a) zeigt die Beiträge $gg \rightarrow c\bar{c}$ (gestrichelte Linie) und $q\bar{q} \rightarrow c\bar{c}$ (gepunktete Linie) zur Gesamtverteilung (durchgezogene Linie). q steht hier für alle Flavours, abgesehen von c .

b) Die Summe der Prozesse $gg \rightarrow b\bar{b}$ und $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ (gestrichelte Linie). Hier steht q für alle Flavours außer b . Die durchgezogene Linie zeigt den Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow gg$. Die gepunktete Linie stellt den fünften Beitrag der in Tabelle 5.1 aufgeführten Prozesse dar.

In Abbildung 6.1 werden die einzelnen Beiträge zu σ als Funktion von $P_{T,1}$ dargestellt. Die durchgezogene Linie im linken Plot zeigt die Summe aller Beiträge. Der Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow c\bar{c}$ macht den Großteil der Gesamtsumme aus und wird durch die gestrichelte Linie dargestellt. Die gepunktete Linie stellt den Beitrag des Prozesses $q\bar{q} \rightarrow c\bar{c}$ dar. Alle drei Beiträge in diesem linken Plot fallen im dargestellten $P_{T,1}$ -Intervall von 5-25 GeV um ca. zwei Größenordnungen ab. Der leichte Knick bei $P_{T,1} \approx 8$ GeV wird durch den rechten Plot verständlich.

Die durchgezogene Linie im rechten Plot zeigt den Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow gg$. Die gestrichelte Linie stellt die Beiträge dar, die ein $b\bar{b}$ -Paar im partonischen Endzustand enthalten. Diese Prozesse tragen erst ab $P_{T,1} \approx 10$ GeV wesentlich bei. Die gepunktete Linie zeigt alle übrigen, bisher noch nicht genannten Prozesse. Dass manche dieser Prozesse b -Quarks im partonischen Endzustand enthalten, ist der Grund für den Knick der Kurve bei $P_{T,1} \approx 10$ GeV.

Die Ursache für den sprunghaften Anstieg der Beiträge mit b -Quarks im Endzustand ist das Erreichen der Schwelle zur Produktion eines $b\bar{b}$ -Paares. Die Funktionen $D_b^{D^*}(z, \mu_F)$ sind für Werte der Fragmentationsskala $\mu_F < 2m_b$ null. Für obige Plots wurden alle Skalen $\sqrt{P_{T,1}^2 + 4m_c^2}$ gesetzt, wobei m_c für die Masse des Charm-Quarks steht. Daraus folgt, dass Prozesse mit b -Quarks im partonischen Endzustand im Bereich $P_{T,1} \gtrsim 8,5$ GeV beitragen können.

Nachdem die Größe der verschiedenen Beiträge untersucht wurde, wird nun die Skalenabhängigkeit der Summe aller Beiträge betrachtet. Der Prozess $pp \rightarrow D^*D^*$ ist von der Renormierungsskala μ_R , der Faktorisierungsskala μ_I und der Fragmentationsskala μ_F abhängig. Die Renormie-

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^*D^*X$

rungsskala geht in α_s ein. Die Partonverteilungsfunktionen hängen von μ_I ab. Die Skala μ_F geht in die Fragmentationsfunktionen ein.

Jede der Skalen wird nach der Vorschrift $\mu_k = b_k \sqrt{P_{T,1}^2 + a^2 m_c^2}$ mit $k = R, I, F$ berechnet. Es wird $a = 2$ gesetzt um den beiden massiven Mesonen im Endzustand Rechnung zu tragen. Die Parameter b_I , b_J und b_R werden zwischen 0,5 und 2 variiert und zwar dergestalt, dass $0,5 \leq \frac{b_k}{b_l} \leq 2$ mit $k, l = R, I, F$ erfüllt ist. Als zentraler Wert wird im Folgenden die Summe aller Beiträge bei $b_R = b_I = b_F = 1$ bezeichnet.

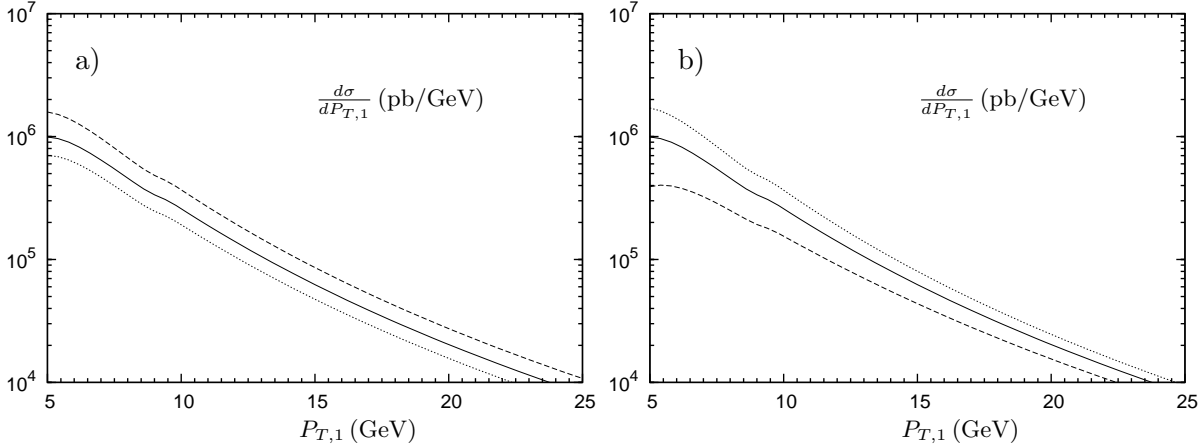


Abbildung 6.2.: In beiden Diagrammmen ist der zentrale Wert als durchgezogene Linie dargestellt.

a) zeigt die Variation der Skala b_R auf 0,5 (gestrichelte Linie) und 2 (gepunktete Linie). Für die anderen Parameter gilt $b_I = b_F = 1$.

In b) wird die Summe aller Beiträge bei $b_I = 0,5$ (gestrichelte Linie) und $b_I = 2$ (gepunktete Linie) dargestellt, wobei $b_R = b_F = 1$ festgehalten wird.

Die Abbildungen 6.2 bis 6.6 zeigen die durchgeführten Variationen der Skalen. Der zentrale Wert wird in all diesen Abbildungen durch die durchgezogene Linie dargestellt.

In Abbildung 6.2 a) wird der Einfluss von b_R bei ansonsten unveränderten Parametern dargestellt. Bei $b_R = 0,5$ ähnelt der Verlauf der Kurve der zentralen Verteilung, ist im Vergleich zu dieser jedoch um ungefähr 50% erhöht. Die Verteilung bei $b_R = 2$ liegt um etwa 30% unter der zentralen Verteilung. Dieses Verhalten bei einer Änderung von b_R lässt sich durch die Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstante α_S verstehen. Das Halbieren der Renormierungsskala hat eine größere Kopplungskonstante zur Folge. Die Verdopplung der Renormierungsskala hat den umgekehrten Effekt zur Folge. Abbildung 6.2 b) zeigt die Verteilung bei Variation der Faktorisierungsskala. Die Halbierung dieser Skala hat gegenüber dem zentralen Wert eine Erhöhung zur Folge. Diese beträgt ungefähr 70% bei $P_{T,1} = 5$ GeV sinkt auf circa 20% bei $P_{T,1} \approx 25$ GeV ab. Eine Verdopplung der Faktorisierungsskala bewirkt umgekehrt eine Absenkung gegenüber der zentralen Verteilung.

Abbildung 6.3 a) stellt den Einfluss der Fragmentationsskala b_F auf die Verteilung bei ansonsten unveränderten Skalen dar. Auffällig an der Verteilung bei $b_F = 0,5$ ist insbesondere die Schwelle bei $P_{T,1} \approx 20$ GeV. Diese Schwelle, die in der zentralen Verteilung bei $P_{T,1} \approx 10$ GeV liegt, wird durch die Halbierung von b_F verschoben. Dies bestätigt die bei der Diskussion von Abbildung 6.1 b) getroffene Aussage derzufolge der Knick durch die Skalenabhängigkeit der Fragmentationsfunktionen bedingt ist. Die Kurve für $b_F = 2$ weist diesen Knick nicht auf und verläuft ansonsten unterhalb der zentralen Verteilung. Die Ursache für das Fehlen des Knicks ist auf

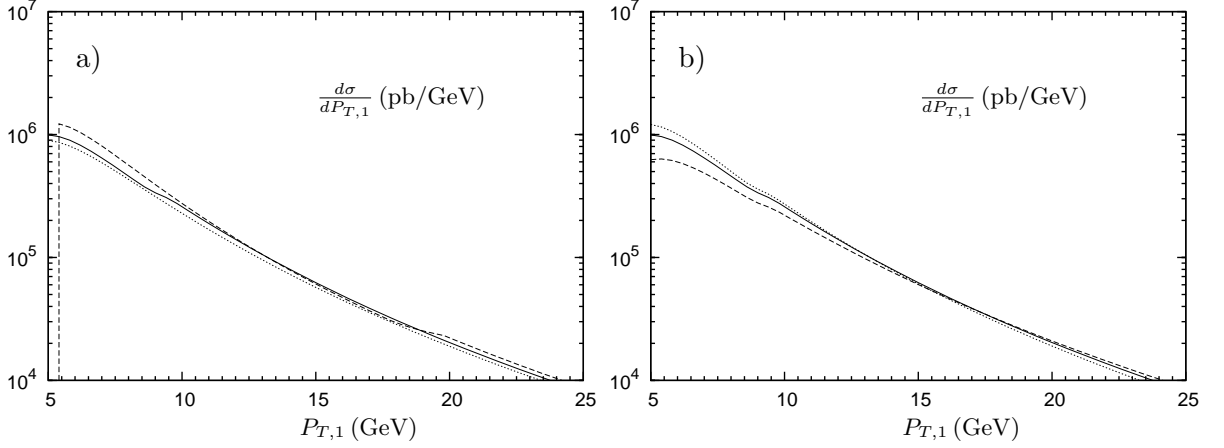


Abbildung 6.3.: Die durchgezogene Linie stellt in beiden Diagrammen den zentralen Wert dar. a) zeigt den Einfluss der Variation von b_F auf das Ergebnis. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für $b_F = 0,5$, die gepunktete Linie das Ergebnis für $b_F = 2$. Für die anderen Parameter gilt $b_R = b_I = 1$. In b) ist das Ergebnis bei $b_R = b_I = 0,5$ (gestrichelte Linie) und $b_R = b_I = 2$ bei $b_F = 1$ (gepunktete Linie) dargestellt.

den dargestellten $P_{T,1}$ -Bereich zurückzuführen, da sich der Knick im Intervall $0 < P_{T,1} < 5$ GeV befindet.

Außerdem beginnt die Kurve für $b_F = 0,5$ offensichtlich erst ab $P_{T,1} \gtrsim 5,5$. Dies ist auf die verwendeten Fragmentationsfunktionen zurückzuführen. Diese sind ab $\mu_F = 3$ GeV definiert. Durch Auflösen von $\mu_F = 0,5 \cdot \sqrt{P_{T,1}^2 + 4m_c^2}$ nach $P_{T,1}$ ergibt sich, dass die Fragmentationsfunktionen im Bereich $P_{T,1} \gtrsim 5,2$ GeV endliche Werte annehmen.

In Abbildung 6.3 b) werden Auswirkungen der gemeinsamen Variation von Renormierungs- und Faktorisierungsskala gezeigt. Bei $P_{T,1} \lesssim 18$ GeV verläuft die Kurve für $b_R = b_F = 0,5$ unterhalb der zentralen Verteilung. Bei $P_{T,1} \approx 18$ GeV kreuzt sie die zentrale Kurve und verläuft bei steigendem $P_{T,1}$ oberhalb von ihr. Die Verteilung bei $b_R = b_F = 2$ zeigt das umgekehrte Verhalten, jedoch schneidet sie die zentrale Verteilung bereits bei $P_{T,1} \approx 13$ GeV. Der Verlauf der Kurven lässt sich anhand der Abbildungen 6.2 a) und b) verstehen. Offensichtlich ist der Einfluss auf die Verteilung bei der Variation von b_R und b_I gegenläufig. Bei niedrigen Werten von $P_{T,1}$ dominiert der Einfluss der b_I -Variation, bei hohen Werten von $P_{T,1}$ ist die b_R -Variation dominant.

Abbildung 6.4 a) zeigt die $P_{T,1}$ -Verteilung bei gleichzeitiger Variation der Renormierungs- und Fragmentationsskala. Die Kurve für $b_R = b_F = 0,5$ verläuft oberhalb der zentralen Verteilung. Bei $P_{T,1} = 5,5$ GeV nimmt sie etwa das Doppelte des zentralen Wertes an. Bei $P_{T,1} = 23,5$ GeV ist sie im Vergleich zum zentralen Wert um etwa 50% erhöht. Der Knick in der Verteilung bei $P_{T,1} \approx 20$ GeV und die fehlenden Werte bei $P_{T,1} \lesssim 5,2$ GeV erklären sich analog zur in Abbildung 6.3 a) dargestellten Verteilung bei $b_F = 0,5$.

Die Kurve für $b_R = b_F = 2$ verläuft recht ebenmäßig bei ungefähr 60% der zentralen Verteilung. Abbildung 6.4 b) zeigt den Einfluss der gemeinsamen Variation von b_I und b_F auf die $P_{T,1}$ -Verteilung. Die Kurve bei $b_I = b_F = 0,5$ verläuft unterhalb der zentralen Verteilung. Sie beginnt bei $P_{T,1} \gtrsim 5,4$ GeV und weist bei $P_{T,1} \approx 20$ GeV einen Knick auf. Diese Merkmale sind analog zum Verhalten der Kurve bei $b_F = 0,5$ zu verstehen. Die Verteilung bei $b_R = b_F = 2$ ist gegenüber der zentralen Verteilung erhöht.

In Abbildung 6.5 wird die $P_{T,1}$ -Verteilung bei gleichzeitiger Variation der drei Skalen μ_R , μ_I und

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$

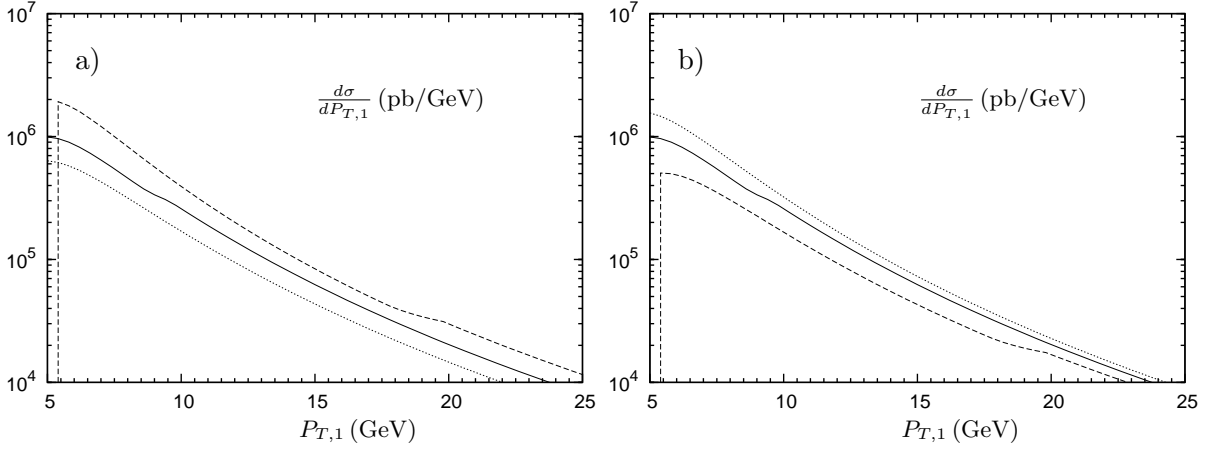


Abbildung 6.4.: Der zentrale Wert wird in beiden Diagrammen durch die durchgezogene Linie angegeben.

In a) wird das Ergebnis für $b_R = b_F = 0,5$ (gestrichelte Linie) und $b_R = b_F = 2$ bei $b_I = 1$ (gepunktete Linie) gezeigt.

b) stellt die Summe aller Beiträge bei $b_I = b_F = 0,5$ (gestrichelte Linie) und $b_I = b_F = 2$ (gepunktete Linie) dar, wobei $b_R = 1$ beibehalten wird.

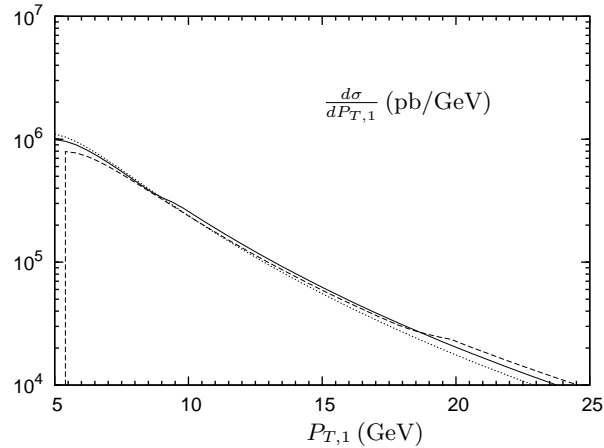


Abbildung 6.5.: Der zentrale Wert wird durch die durchgezogene Linie angegeben. Es wird der Einfluss der simultanen Variationen $b_R = b_I = b_F = 0,5$ (gestrichelte Linie) und $b_R = b_I = b_F = 2$ (gepunktete Linie) auf das Ergebnis dargestellt.

μ_F gezeigt. Bemerkenswert ist, dass im Vergleich zu den anderen bisher dargestellten Variationen die Abweichung von der zentralen Verteilung gering ausfällt.

Abbildung 6.6 zeigt die maximale Abweichung der bisher vorgenommenen Variationen von der zentralen Verteilung sowohl nach oben als auch nach unten. Die größte Abweichung nach oben wird über einen weiten $P_{T,1}$ -Bereich von der Kurve bei $b_R = b_F = 0,5$ verursacht. Im Bereich 13-19 GeV bestimmt die Kurve bei $b_R = 0,5$ die größte Abweichung nach oben. Die maximale Abweichung nach unten wird im Bereich von $5,5 \text{ GeV} \lesssim P_{T,1} \lesssim 14 \text{ GeV}$ mit der Kurve bei $b_I = 0,5$ erzielt. In den Bereichen $14 \text{ GeV} \lesssim P_{T,1} \lesssim 18 \text{ GeV}$ beziehungsweise $P_{T,1} \gtrsim 18 \text{ GeV}$ wird die untere Einhüllende durch die Verteilungen bei $b_I = b_F = 0,5$ beziehungsweise bei $b_R = b_F = 2$ gebildet.

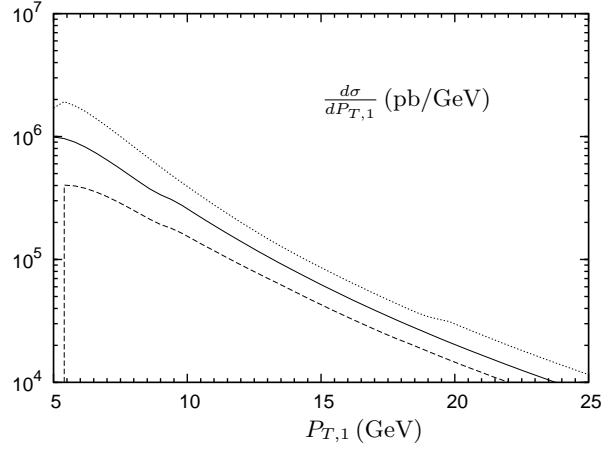


Abbildung 6.6.: Die durchgezogene Linie stellt den zentralen Wert dar. Die größten Abweichungen vom zentralen Wert nach unten (gestrichelte Linie) und nach oben (gepunktete Linie) werden in dieser Abbildung gezeigt. Die Kurven entsprechen den Einhüllenden aller bisher vorgestellten Variationen der Parameter b_R , b_I und b_F .

Die in 6.6 dargestellten maximalen Abweichungen von der zentralen Verteilung sind relevant, da sie die Skalenunsicherheit der Rechnung zeigen. Diese Skalenunsicherheit ist ein Maß für die störungstheoretische Unsicherheit der Rechnung.

Abbildung 6.7 a) zeigt die $P_{T,1}$ -Verteilung im Bereich von $P_{T,1} = 0$ GeV bis $P_{T,1} = 20$ GeV mit

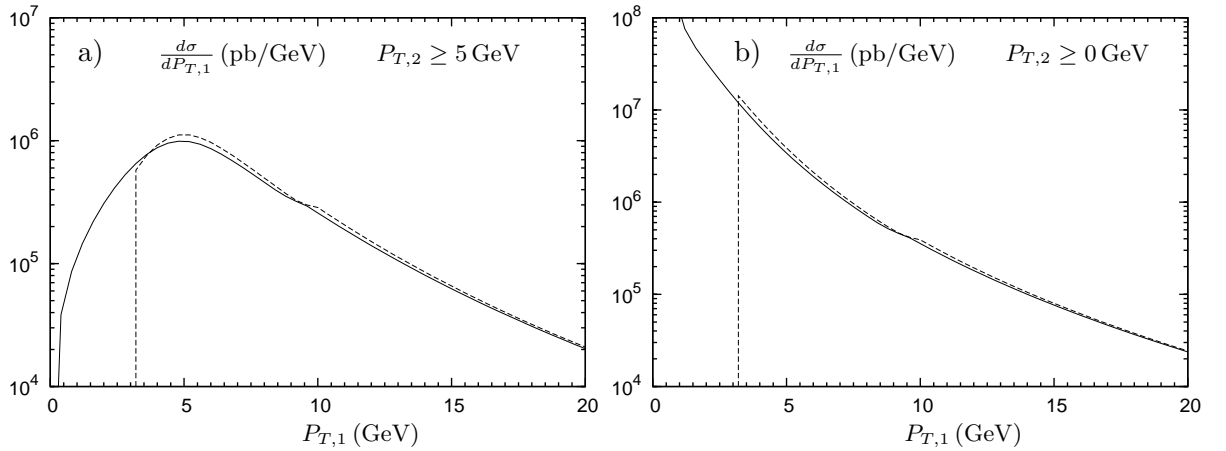


Abbildung 6.7.: In diesen Diagrammen wird die $P_{T,1}$ -Verteilung bei niedrigem $P_{T,1}$ untersucht. Der eingangs erwähnte Schnitt bei $P_{T,1} \geq 5$ wurde hier aufgehoben. In beiden Diagrammen werden jeweils die Verteilungen bei endlichen Massen (durchgezogene Linie) und masselos (gestrichelte Linie) dargestellt.

a) $P_{T,2} \geq 5$ GeV. b) $P_{T,2} \geq 0$ GeV.

endlichen Massen und für den masselosen Fall. Grund für diese Betrachtung ist Erwartung, dass bei kleinen Skalen, also niedrigem $P_{T,1}$ der Gültigkeitsbereich dieser Rechnung endet. Der Phasenraumschnitt an $P_{T,1}$ wurde hier nicht angewendet. Die Kurve für endliche Massen beginnt im Ursprung, erreicht ein Maximum von etwa 10^6 pb/GeV bei $P_{T,1} \approx 5$ GeV und fällt mit wach-

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$

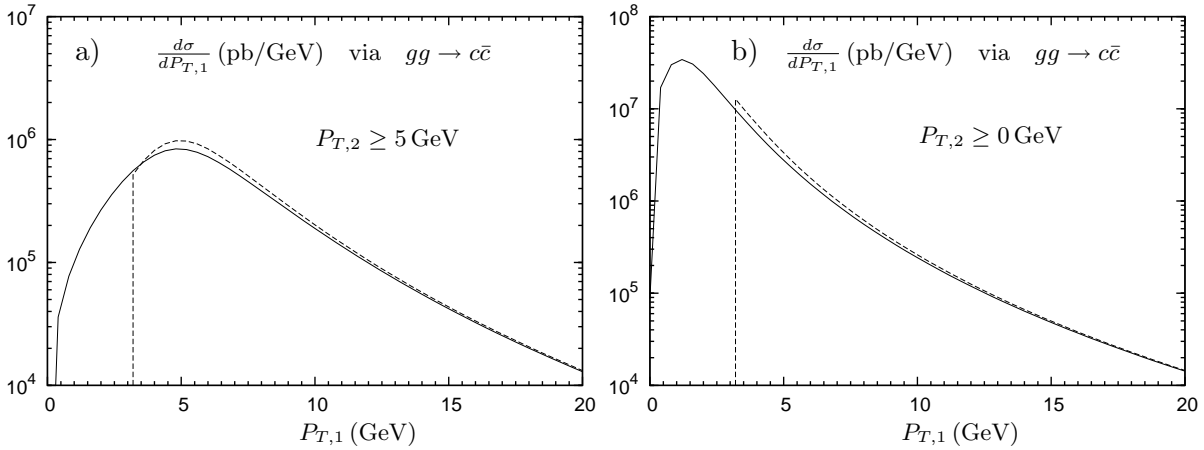


Abbildung 6.8.: In beiden Diagrammen wurde $P_{T,1} \geq 0$ GeV gesetzt. In beiden Diagrammen wird der Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow c\bar{c}$ zur $P_{T,1}$ -Verteilung gezeigt.

a) Beitrag von $gg \rightarrow c\bar{c}$ mit endlichen Massen (durchgezogene Linie) und masselos (gestrichelte Linie) bei $P_{T,2} \geq 5$ GeV.

b) Der Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow c\bar{c}$ bei endlichen Massen (durchgezogene Linie) und im masselosen Fall (gestrichelte Linie) mit $P_{T,2} \geq 0$ GeV.

sendem $P_{T,1}$ stark ab. Die Verteilung im masselosen Fall beginnt bei $P_{T,1} \approx 3$ GeV. Dies liegt an den verwendeten Skalen $\mu_k = P_{T,1}$, $k = R, I, F$ und der Eigenschaft $D_{h_i}^{D^*}(z_i, \mu_F < 3 \text{ GeV}) = 0$ der verwendeten Fragmentationsfunktionen. Ansonsten ist die masselose Verteilung gegenüber der massiven Verteilung leicht erhöht.

In Abbildung 6.7 b) wird die $P_{T,1}$ -Verteilung im Bereich von $P_{T,1} = 0$ GeV bis $P_{T,1} = 20$ GeV im masselosen und massiven Fall dargestellt. Im Unterschied zu Abbildung 6.7 a) wurde hier auch der Phasenraumschnitt an $P_{T,2}$ aufgehoben. Für den Verlauf der Kurve bei endlicher Masse hat dies zur Folge, dass sie für $P_{T,1} \rightarrow 0$ GeV divergiert. Für die masselose Kurve ist dieses Verhalten auch zu erwarten, kann aber mit den hier verwendeten Fragmentationsfunktionen aufgrund von $D_{h_i}^{D^*}(z_i, \mu_F < 3 \text{ GeV}) = 0$ bei der Skalenwahl $\mu_F = P_{T,1}$ nicht berechnet werden.

Die Abbildungen 6.8 a) und b) zeigen jeweils den Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow c\bar{c}$ im massiven und masselosen Fall. In Abbildung 6.8 a) wird die Bedingung $P_{T,2} \geq 5$ GeV aufrechterhalten, wohingegen diese in Abbildung 6.8 b) aufgehoben ist. Der Verlauf der Kurven in a) ist dem Verlauf der in Abbildung 6.7 a) gezeigten Gesamtverteilungen ähnlich und fast genauso groß wie diese. Auch in diesem Fall ist der Beitrag des Prozesses $gg \rightarrow c\bar{c}$ offensichtlich dominant.

Die massive Kurve in Abbildung 6.8 b) unterscheidet sich wesentlich von ihrem Pendant in Abbildung 6.7 b). Sie divergiert für $P_{T,1} \rightarrow 0$ GeV nicht, sondern geht gegen null. Die Divergenz der Gesamtverteilung wird offensichtlich durch andere Prozesse als den sonst dominanten Prozess $gg \rightarrow c\bar{c}$ hervorgerufen. Der Grund hierfür sind Beiträge von Prozessen mit masselosen Partonen. Bei Subprozessen, die im partonischen Endzustand masselos sind wird der Phasenraum für $P_{T,1} \rightarrow 0$ GeV nicht hinreichend schnell klein, um trotz divergierender Matrixelementquadrate einen endlichen Beitrag zu erhalten.

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Beiträge zum Wirkungsquerschnitt reichen offenbar nicht aus um bei niedrigem $P_{T,1}$ korrekte Vorhersagen zu liefern. Die Erwartung an eine vollständige NLO-Rechnung ist, dass zusätzlich Terme auftreten, die die Divergenz des Wirkungsquerschnitts bei niedrigem $P_{T,1}$ kompensieren.

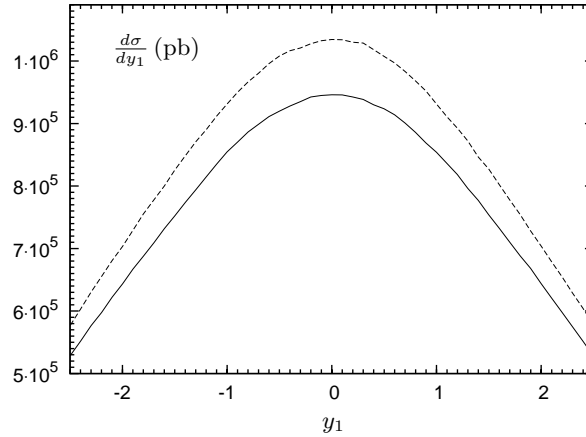
6.2.2. y_1 -Verteilung

Abbildung 6.9.: Rapidityverteilung im massiven (durchgezogene Linie) und masselosen Fall (gestrichelte Linie).

Abbildung 6.9 zeigt eine Verteilung in der Rapidity y_1 des Hadrons H_1 sowohl im massiven wie auch im masselosen Fall. Beide Verteilungen sind symmetrisch um $y_1 = 0$. Der Verlauf beider Verteilungen ist ähnlich, wobei die masselose Verteilung gegenüber der massiven Verteilung erhöht ist. Das Maximum der Verteilungen liegt bei $y_1 = 0$. Sie fallen bis $y_1 = 2, 5$ auf etwa 55% ihres Maximums ab.

Alle relevanten Skalen wurden $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + 4m_c^2}$ mit $k = R, I, F$ gesetzt. Die Symmetrie der Verteilung ist eine zu erwartende Eigenschaft, da der Anfangszustand symmetrisch unter Raumpiegelung am Kollisionspunkt ist und die starke Wechselwirkung P-invariant ist. Der Anfangszustand ist symmetrisch, da das Laborsystem das Schwerpunktsystem der kollidierenden Protonen ist.

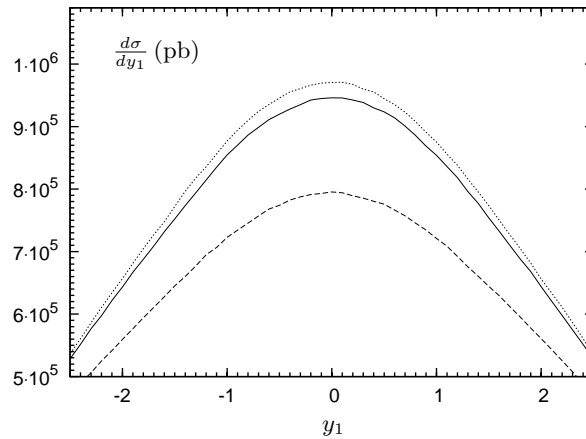


Abbildung 6.10.: y_1 -Verteilungen mit unterschiedlicher Wahl der Skalen. Die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis bei $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + 4m_c^2}$, die gestrichelte Linie zeigt die Verteilung für $\mu_k = \sqrt{4m_c^2}$ und die gepunktete Linie stellt die Verteilung bei $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ dar.

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^*D^*X$

Abbildung 6.10 stellt die Rapiditätsverteilung bei unterschiedlicher Wahl der Skalen und endlichen Massen dar. Die Verteilung ist bei $\mu_k = \sqrt{4m_c^2}$ gegenüber der massiven Verteilung aus Abbildung 6.9 abgesenkt. Bei der Wahl $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ ist die Verteilung erhöht.

Da die hier dargestellten Variationen der Skalen gemeinsame Variationen aller Skalen sind, lässt sich das Verhalten unter der Skalenvariation anhand der in Abbildung 6.5 dargestellten $P_{T,1}$ -Verteilung verstehen. Diese $P_{T,1}$ -Verteilung zeigt, dass die Halbierung der Skalen bei niedrigem $P_{T,1}$ eine Absenkung der Verteilung zur Folge hat. Bei den hier diskutierten y_1 -Verteilungen ist dieser Effekt über den gesamten zugänglichen Rapiditätsbereich zu beobachten. $P_{T,1}$ und y_1 sind unabhängige Integrationsvariablen. Somit wurde bei der y_1 -Verteilung über alle Werte von $P_{T,1}$ integriert. Die $P_{T,1}$ -Verteilung zeigt jedoch, dass zu einer Integration über $P_{T,1}$ im Wesentlichen niedrige $P_{T,1}$ -Werte beitragen. Daher dominiert das Verhalten der $P_{T,1}$ -Verteilung bei niedrigem $P_{T,1}$ unter Skalenvariationen das Verhalten der y_1 -Verteilung unter diesen Variationen.

6.2.3. Δy -Verteilung

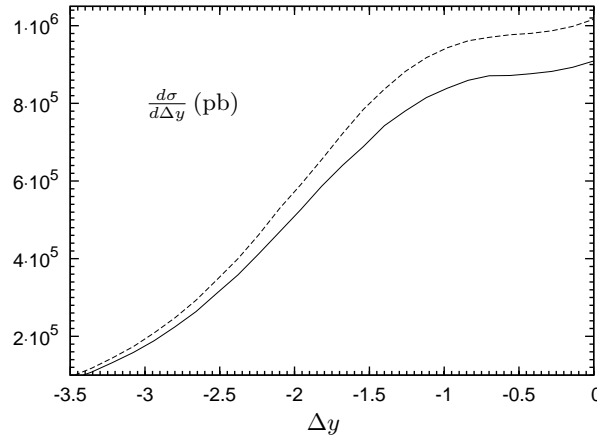


Abbildung 6.11.: Verteilung in der Rapiditätsdifferenz $\Delta y = y_2 - y_1$ im massiven (durchgezogene Linie) und masselosen Fall (gestrichelte Linie).

In Abbildung 6.11 wird eine Verteilung in der Rapiditätsdifferenz $\Delta y = y_2 - y_1$ gezeigt. Da diese Verteilung aufgrund der Konstruktion der Observablen Δy symmetrisch ist, wird nur $\Delta y < 0$ dargestellt. Die durchgezogene Linie zeigt die Verteilung bei endlichen Massen, die gestrichelte Linie stellt die Verteilung bei $m = 0$ dar. Beide Verteilungen nehmen ihr Maximum bei $\Delta y = 0$ an und fallen mit wachsendem Betrag der Rapiditätsdifferenz hin ab. Der Anstieg beider Kurven am rechten Rand des Diagramms ist durch den Einschränkung der Rapiditäten $|y_1|, |y_2| < 2,5$ bedingt. Gegenüber der massiven Verteilung ist die masselose Verteilung erwartungsgemäß erhöht. Für die Skalen wurde hier $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ verwendet.

6.3. Korrelationen

Als Korrelationen werden Verteilungen in zwei Observablen bezeichnet, die sich auf beide Teilchen im Endzustand beziehen. In der ersten Observablen wird eine Verteilung berechnet. Die Verteilung in der zweiten Observablen wird in 3-4 Bins unterteilt. Die hier berechneten Korrelationen sind demnach Verteilungen in einer Observablen unter der Bedingung, dass eine zweite

Observable in einem der gewählten Bins liegt. Daher gibt es für jede Korrelation zwei Darstellungsmöglichkeiten, die durch Vertauschung der Observablen auseinander hervorgehen. Je nach betrachteter Observablenkombination können die Darstellungen unter Vertauschung der Observablen symmetrisch sein. In diesem Fall wird im Folgenden nur eine Darstellung angegeben. Korrelationen sind von Interesse, da sie es ermöglichen Information über die Fragmentationsfunktionen zu erhalten. Die Korrelation der Transversalimpulse $P_{T,1}$ und $P_{T,2}$ etwa gibt Aufschluss darüber wie sich die auf Partonniveau exakte Beziehung $p_{T,Q_1} = p_{T,Q_2}$ auf das Hadronniveau überträgt.

6.3.1. Korrelation der Transversalimpulse $P_{T,1}$ und $P_{T,2}$

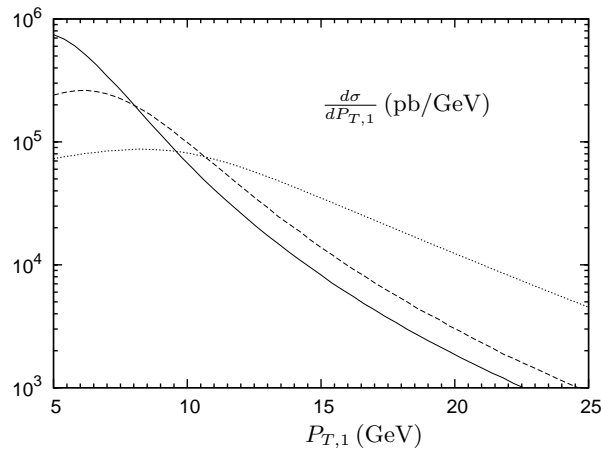


Abbildung 6.12.: $P_{T,1}$ -Verteilung bei $5 \text{ GeV} < P_{T,2} < 7 \text{ GeV}$ (durchgezogene Linie), $7 \text{ GeV} < P_{T,2} < 10 \text{ GeV}$ (gestrichelte Linie) und $10 \text{ GeV} < P_{T,2} < 25 \text{ GeV}$ (gepunktete Linie).

Abbildung 6.12 zeigt die Korrelation zwischen den Transversalimpulsen $P_{T,1}$ und $P_{T,2}$. Die Korrelation zwischen den Transversalimpulsen ist symmetrisch unter Vertauschung der Transversalimpulse. Dies liegt an den verwendeten Fragmentationsfunktionen, die nicht zwischen der Fragmentation eines Partons in D^{*+} und D^{*-} unterscheiden.

Die Skalen werden hier $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ gesetzt. Die $P_{T,1}$ -Verteilung bei $5 \text{ GeV} < P_{T,2} < 7 \text{ GeV}$ wird durch die durchgezogene Linie dargestellt. Diese Verteilung fällt im dargestellten $P_{T,1}$ -Bereich von 5-25 GeV um drei Größenordnungen ab. Die gestrichelte Linie zeigt die $P_{T,1}$ -Verteilung bei $7 \text{ GeV} < P_{T,2} < 10 \text{ GeV}$. Diese steigt bis $P_{T,1} \approx 6 \text{ GeV}$ leicht an und fällt bis $P_{T,1} = 25 \text{ GeV}$ um etwa 2 Größenordnungen ab. Die Verteilung bei $10 \text{ GeV} < P_{T,2} < 25 \text{ GeV}$ wird durch die gepunktete Linie angegeben. Sie steigt bis $P_{T,1} \approx 9 \text{ GeV}$ leicht und fällt bis $P_{T,1} = 25 \text{ GeV}$ um eineinhalb Größenordnungen.

Der unterschiedliche Verlauf der drei Kurven deutet darauf hin, dass die Observablen $P_{T,1}$ und $P_{T,2}$ korreliert sind. Grund hierfür ist die Gleichheit $p_{T,Q_1} = p_{T,Q_2}$ der Transversalimpulse auf Partonniveau. Diese Gleichheit wird durch die Fragmentationsfunktionen verschmiert und gilt daher auf Hadronniveau nicht mehr exakt.

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$

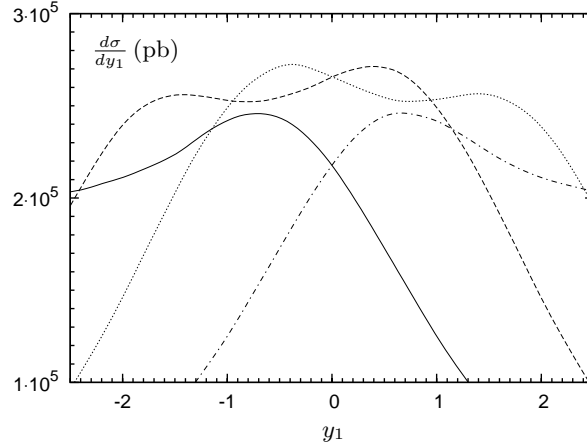


Abbildung 6.13.: y_1 -Verteilung bei $-2,5 < y_2 < -1,25$ (durchgezogene Linie), $-1,25 < y_2 < 0$ (gestrichelte Linie), $0 < y_2 < 1,25$ (gepunktete Linie) und $1,25 < y_2 < 2,5$ (gestrichpunktete Linie).

6.3.2. Korrelation der Rapiditäten y_1 und y_2

Abbildung 6.13 stellt die Korrelation zwischen den Rapiditäten y_1 und y_2 dar. Da diese Korrelation unter Vertauschung der Observablen symmetrisch ist, genügt eine Abbildung zur Untersuchung der Korrelation. Sämtliche in dieser Abbildung dargestellten Kurven sind durch Spline-Interpolation geglättet. Alle Skalen werden hier $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ gesetzt. Die y_1 -Verteilung bei $-2,5 < y_2 < -1,25$ wird durch die durchgezogene Linie dargestellt. Sie nimmt ein Maximum bei $y_1 \approx -0,7$ an und fällt bei wachsendem y_1 ab. Symmetrisch zu dieser Verteilung ist die Verteilung bei $1,25 < y_2 < 2,5$, die durch die gestrichpunktete Linie dargestellt wird. Die gestrichelte Linie zeigt die Verteilung bei $-1,25 < y_2 < 0$. Diese Kurve erreicht ein erstes Maximum bei $y_1 \approx -1,5$, erreicht bei $y_1 \approx -0,8$ ein Minimum, um bei $y_1 \approx 0,4$ ein zweites Maximum abzunehmen und im weiteren Verlauf abzufallen. Die durch die gepunktete Linie angegebene Verteilung bei $0 < y_2 < 1,25$ ist symmetrisch zur Verteilung bei $-1,25 < y_2 < 0$. Die genannten Symmetrien entsprechen einer Symmetrie der y_1 -Verteilung unter der gleichzeitigen Transformation von $y_1 \mapsto -y_1$ und $y_2 \mapsto -y_2$. Diese Transformation entspricht einer Paritätstransformation am Kollisionspunkt. Da die starke Wechselwirkung paritätserhaltend ist und der Anfangszustand symmetrisch unter Raumspiegelung ist, ist diese Symmetrie zu erwarten. Der stark unterschiedliche Verlauf der in Abbildung 6.13 gezeigten Kurven lässt darauf schließen, dass die Rapiditäten y_1 und y_2 statistisch korreliert sind. Dies entspricht der Erwartung, da für die Rapiditäten im partonischen Schwerpunktsystem aufgrund der Impulserhaltung $y_{Q_1}^{cms} = -y_{Q_2}^{cms}$ gilt.

6.3.3. Korrelation von Transversalimpuls und Rapidität

Zur Untersuchung dieser Korrelation werden die Skalen $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + 4m_c^2}$ gewählt. Die Abbildungen 6.14 a) und b) zeigen jeweils $P_{T,1}$ -Verteilungen mit unterschiedlichen Einschränkungen der Rapidität y_2 . In Abbildung a) zeigt die durchgezogene Linie die Verteilung bei $-2,5 < y_2 < -1,25$. Die Verteilung bei $-1,25 < y_2 < 0$ wird durch die gestrichelte Linie angegeben. In Abbildung b) stellt die gestrichelte Linie die $P_{T,1}$ -Verteilung bei $0 < y_2 < 1,25$ dar. Die Verteilung bei $1,25 < y_2 < 2,5$ wird durch die durchgezogene Linie angegeben.

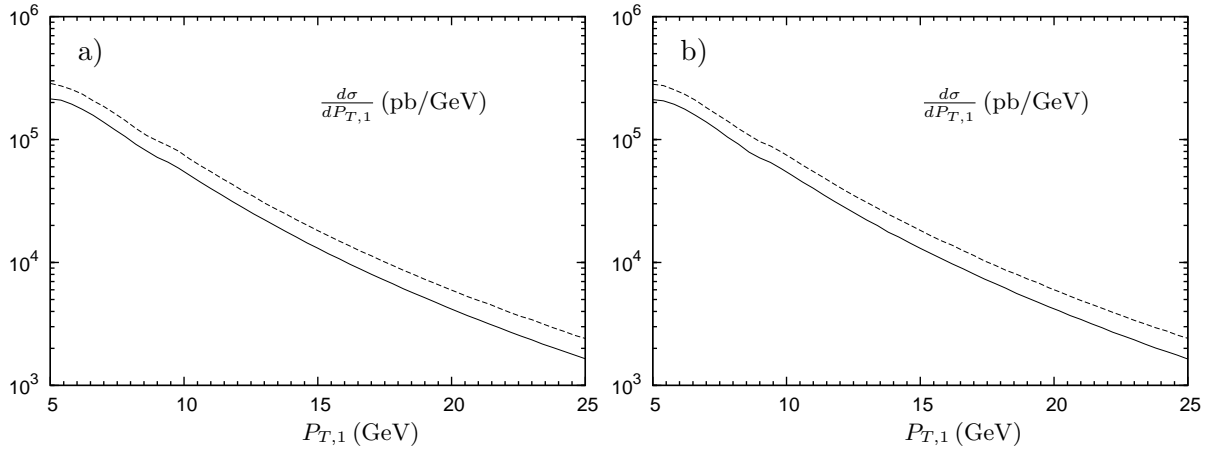


Abbildung 6.14.: $P_{T,1}$ -Verteilungen mit unterschiedlichen Bedingungen an y_2 .

- a) $-2,5 < y_2 < -1,25$ (durchgezogene Linie) und $-1,25 < y_2 < 0$ (gestrichelte Linie).
 b) $0 < y_2 < 1,25$ (gestrichelte Linie) und $1,25 < y_2 < 2,5$ (durchgezogene Linie).

Alle vier Verteilungen fallen im dargestellten $P_{T,1}$ -Bereich von 5-25 GeV um zwei Größenordnungen ab. Die durchgezogenen Kurven in beiden Diagrammen sind identisch. Ebenso gleichen sich die gestrichelten Linien in beiden Diagrammen. Diese Symmetrie ist Ausdruck der P-Invarianz der starken Wechselwirkung.

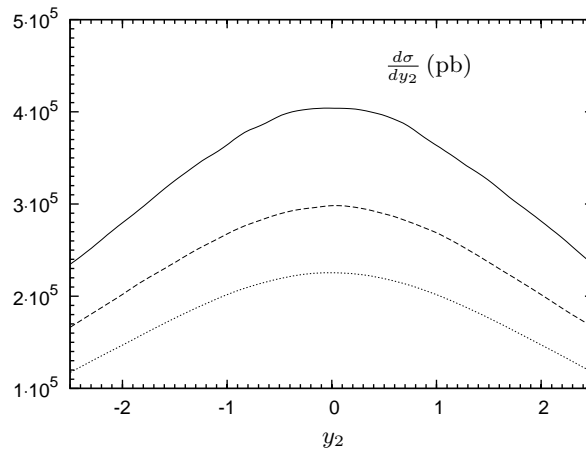


Abbildung 6.15.: y_2 -Verteilung mit $5 \text{ GeV} < P_{T,1} < 7 \text{ GeV}$ (durchgezogene Linie), $7 \text{ GeV} < P_{T,1} < 10 \text{ GeV}$ (gestrichelte Linie) und $10 \text{ GeV} < P_{T,1} < 25 \text{ GeV}$ (gepunktete Linie).

Abbildung 6.15 zeigt eine y_2 -Verteilung mit verschiedenen Einschränkungen von $P_{T,1}$. Die in dieser Abbildung dargestellten Kurven wurden durch Spline-Interpolation geglättet.

Die Verteilung bei $5 \text{ GeV} < P_{T,1} < 7 \text{ GeV}$ wird durch die durchgezogene Kurve angegeben. Die gestrichelte Linie zeigt die Verteilung bei $7 \text{ GeV} < P_{T,1} < 10 \text{ GeV}$. Die gepunktete Linie zeigt die Verteilung bei $10 \text{ GeV} < P_{T,1} < 25 \text{ GeV}$. Alle drei Verteilungen sind symmetrisch, haben ihr Maximum bei $y_2 = 0$ und fallen mit steigendem Betrag von y_2 auf etwa 55% ihres jeweiligen

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^*D^*X$

Maximalwertes. Je höher der $P_{T,1}$ -Bereich der Verteilung, desto stärker fällt die Verteilung bei wachsendem Betrag von y_2 .

Die Ähnlichkeit im Verlauf der hier diskutierten Kurven, sowie der ähnliche Verlauf der in Abbildung 6.14 a) und b) dargestellten Kurven spricht dafür, dass die Observablen $P_{T,1}$ und y_2 schwach korreliert sind.

Die Ursache für die schwache Korrelation dieser Observablen ist auf Partonniveau gut zu verstehen. Die Transversalimpulse p_{T,Q_1} und p_{T,Q_2} sind auf Partonniveau gleich, y_1 und y_2 sind auf Partonniveau korreliert. Jedoch sind p_{T,Q_1} und y_1 unabhängige kinematische Variablen, eine Beziehung die sich auf das Hadronniveau überträgt. Wegen der Symmetrie der Verteilungen in y_1 und y_2 ist somit auch keine Korrelation im statistischen Sinne zwischen dem Transversalimpuls $P_{T,1}$ und der Rapidität y_2 zu erwarten.

6.3.4. Korrelation von Transversalimpuls und Rapiditätsdifferenz

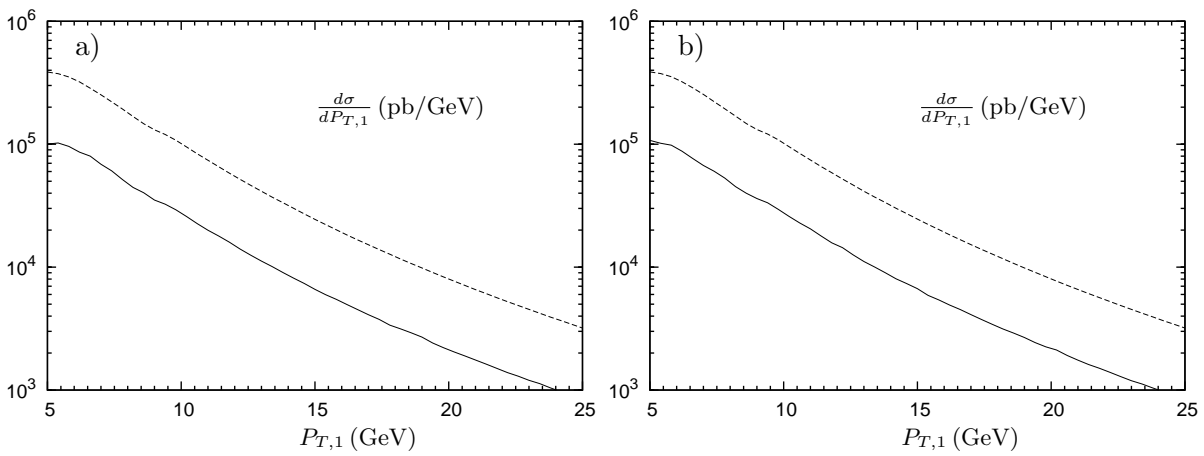


Abbildung 6.16.: $P_{T,1}$ -Verteilungen mit unterschiedlichen Bedingungen an Δy .

- a) $-5 < \Delta y < -2$ (durchgezogene Linie) und $-2 < \Delta y < 0$ (gestrichelte Linie).
- b) $0 < \Delta y < 2$ (gestrichelte Linie) und $2 < \Delta y < 5$ (durchgezogene Linie).

Die Abbildungen 6.16 a) und b) stellen $P_{T,1}$ -Verteilungen mit unterschiedlichen Einschränkungen der Rapiditätsdifferenz Δy dar. Die Skalen werden hier $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + 4m_c^2}$ gesetzt. In Abbildung a) zeigt die durchgezogene Linie die Verteilung bei $-5 < \Delta y < -2$. Die gestrichelte Linie stellt die $P_{T,1}$ -Verteilung bei $-2 < \Delta y < 0$ dar. In Abbildung b) wird die $P_{T,1}$ -Verteilung bei $0 < \Delta y < 2$ durch die gestrichelte Linie angegeben. Die durchgezogene Linie zeigt die Verteilung bei $2 < \Delta y < 5$.

Jede dieser vier Verteilungen fällt im dargestellten $P_{T,1}$ -Bereich von 5-25 GeV um zwei Größenordnungen ab. Die durchgezogenen Kurven haben in beiden Diagrammen denselben Verlauf, auch die gestrichelten Linien sind in beiden Diagrammen identisch. Diese Symmetrie ist zu erwarten, da der Ausgangszustand symmetrisch unter Paritätstransformationen ist, die starke Wechselwirkung P-invariant ist und die verwendeten Fragmentationsfunktionen symmetrisch unter Ladungskonjugation sind.

Abbildung 6.17 zeigt Verteilungen in der Rapiditätsdifferenz Δy bei unterschiedlichen Einschränkungen von $P_{T,1}$. Die durchgezogene Linie zeigt die Δy -Verteilung bei $5 \text{ GeV} < P_{T,1} < 7 \text{ GeV}$. Die Verteilung bei $7 \text{ GeV} < P_{T,1} < 10 \text{ GeV}$ wird durch die gestrichelte Linie angegeben. Die ge-

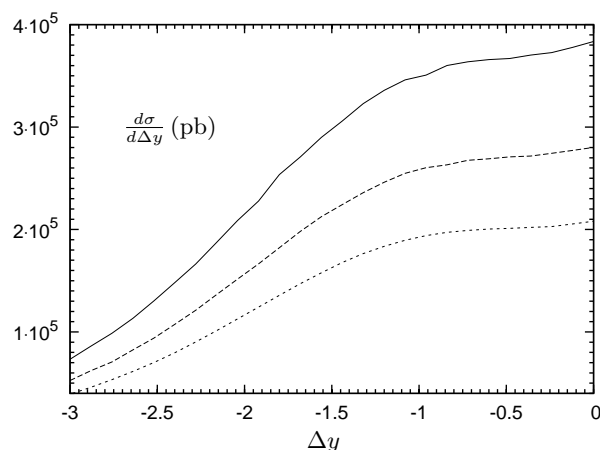


Abbildung 6.17.: Δy -Verteilung mit $5 \text{ GeV} < P_{T,1} < 7 \text{ GeV}$ (durchgezogene Linie), $7 \text{ GeV} < P_{T,1} < 10 \text{ GeV}$ (gestrichelte Linie) und $10 \text{ GeV} < P_{T,1} < 25 \text{ GeV}$ (gepunktete Linie).

punktete Linie stellt die Δy -Verteilung bei $0 \text{ GeV} < P_{T,1} < 25 \text{ GeV}$ dar.

Die drei Verteilungen sind symmetrisch und haben ihr Maximum bei $\Delta y = 0$. Sie fallen von ihrem Maximalwert auf etwa 20% ihres Maximalwertes bei $|\Delta y| = 2,5$ ab.

Die Ähnlichkeit im Verlauf der hier dargestellten Verteilungen, sowie der in Abbildung 6.16 a) und b) dargestellten Kurven legt nahe, dass die Observablen $P_{T,1}$ und Δy im Sinne der Statistik schwach korreliert sind.

6.3.5. Korrelation von Rapidität und Rapiditätsdifferenz

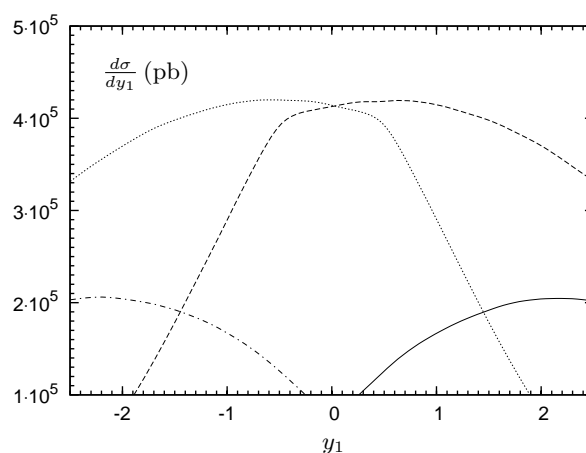


Abbildung 6.18.: y_1 -Verteilung mit unterschiedlichen Bedingungen an Δy . $-5 < \Delta y < -2$ (durchgezogene Linie), $-2 < \Delta y < 0$ (gestrichelte Linie), $0 < \Delta y < 2$ (gepunktete Linie) und $2 < \Delta y < 5$ (gestrichpunktete Linie).

In Abbildung 6.18 ist eine Verteilung in der Rapidität y_1 mit unterschiedlichen Einschränkungen der Rapiditätsdifferenz Δy dargestellt. Die Skalen sind hier $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ gesetzt. Alle hier dargestellten Verteilungen sind geglättet. Die Verteilung bei $-5 < \Delta y < -2$ wird

6. Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$

durch die durchgezogene Linie angegeben und steigt von 10^5 pb bei $y_1 \approx 0,3$ auf etwa $2 \cdot 10^5$ pb bei $y_1 = 2,5$. Die Rapiditätsverteilung bei $-2 < \Delta y < 0$ wird durch die gestrichelte Kurve dargestellt und steigt von 10^5 pb bei $y_1 = -1,9$ auf ein Maximum bei $y_1 \approx 0,8$, um bei weiter steigendem y_1 leicht abzufallen. Die Verteilung bei $0 < \Delta y < 2$ wird durch die gepunktete Linie angegeben und ist symmetrisch zur Verteilung bei $-2 < \Delta y < 0$. Die y_1 -Verteilung bei $2 < \Delta y < 5$ wird durch die gestrichpunktete Linie dargestellt und ist symmetrisch zur Verteilung bei $-5 < \Delta y < -2$.

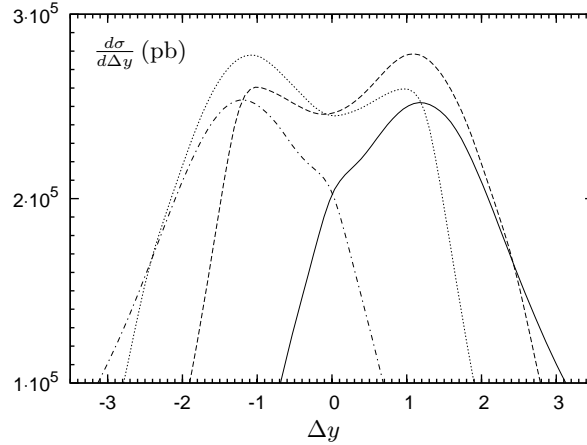


Abbildung 6.19.: Δy -Verteilung mit verschiedenen Bedingungen an y_1 . $-2,5 < y_1 < -1,25$ (durchgezogene Linie), $-1,25 < y_1 < 0$ (gestrichelte Linie), $0 < y_1 < 1,25$ (gepunktete Linie) und $1,25 < y_1 < 2,5$ (gestrichpunktete Linie).

Abbildung 6.19 zeigt Verteilungen in der Rapidity-Differenz Δy mit unterschiedlichen Einschränkungen der Rapidity y_1 . Für die Skalen wird $\mu_k = \sqrt{P_{T,1}^2 + P_{T,2}^2 + 4m_c^2}$ verwendet. Die dargestellten Verteilungen sind geglättet worden. Die Δy -Verteilung bei $-2,5 < y_1 < -1,25$ wird von der durchgezogenen Linie angegeben. Diese Verteilung hat ein Maximum von etwa $2,5 \cdot 10^5$ pb bei $\Delta y \approx 1,2$ und fällt bei $\Delta y = -0,7$ und $\Delta y = 3,1$ auf 10^5 pb ab. Die Verteilung bei $-1,25 < y_1 < 0$ wird durch die gestrichelte Kurve dargestellt, hat bei $\Delta y \approx -1$ ein erstes Maximum, erreicht bei $\Delta y = -0,1$ ein Minimum und bei $\Delta y \approx 1,1$ ein zweites Maximum. Die Verteilung bei $0 < y_1 < 1,25$ wird durch die gepunktete Kurve angegeben und ist symmetrisch zur Verteilung bei $-1,25 < y_1 < 0$. Die gestrichpunktete Linie zeigt die Δy -Verteilung bei $1,25 < y_1 < 2,5$, welche symmetrisch zur Verteilung bei $-2,5 < y_1 < -1,25$ ist.

Der große Unterschied im Verlauf der in Abbildung 6.18 und 6.19 dargestellten Verteilungen deutet darauf hin, dass die Observablen y_1 und Δy stark korreliert sind. Wieder ist es eine Relation auf Partonniveau, die den Zusammenhang zwischen den Observablen herstellt:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = y_2^{cms} - y_1^{cms} = -2y_1^{cms}.$$

y_i^{cms} bezeichnet hier die Rapidity des Partons i im partonischen Schwerpunktsystem. Aufgrund dieses Zusammenhangs auf Partonniveau erscheint es plausibel, dass die Observablen y_1 und Δy auf Hadronniveau statistisch korreliert sind.

7. Ausblick

Im Verlaufe der Arbeit wurden Beiträge zum Wirkungsquerschnitt des Prozesses $pp \rightarrow D^* D^* X$ untersucht. Zunächst wurde die Kinematik und mittels des Faktorisierungstheorems der Wirkungsquerschnitt zum allgemeineren Prozess $A + B \rightarrow H_1 + H_2 + X$ analytisch ausgearbeitet. Anschließend wurde ein C++-Programm zur numerischen Berechnung von differentiellen Wirkungsquerschnitten und Korrelationen entwickelt. Mithilfe dieses Programms wurden die in Kapitel 6 dargestellten Ergebnisse berechnet.

Die Ergebnisse wirken im Rahmen der verwendeten Näherung plausibel, allerdings sind sie bei niedrigen Skalen unzuverlässig. Dies kann in Zukunft durch eine NLO-Rechnung verbessert werden. Eine NLO-Rechnung wäre auch wünschenswert, um die generelle Skalenabhängigkeit der Ergebnisse zu reduzieren und hätte den Vorteil mit der Genauigkeit experimenteller Daten konkurrieren zu können. Dies würde den Vergleich von Theorie und Experiment ermöglichen, der letztlich das Ziel jeder phänomenologischen Rechnung sein sollte.

Eine weitere Möglichkeit diese Arbeit weiterzuführen besteht in der Anwendung des C++-Programms auf andere Paarproduktionsprozesse schwerer Mesonen. Im Prinzip sollte dies ohne Schwierigkeiten durchführbar sein. Auch eine Modifikation des Programms zur $p\bar{p}$ -Streuung könnte, möglicherweise zur Untersuchung von TEVATRON-Prozessen, interessant sein.

Die hier vorgelegte Rechnung könnte auch auf polarisierte Wirkungsquerschnitte verallgemeinert werden. Diese Größen sind von Interesse, da sich so Erkenntnisse über die Polarisationsstruktur des Gluons gewinnen lassen. Es wird erwartet, dass die Gluonen einen Großteil des Nukleonenspins tragen, da gezeigt wurde [15] dass Quarks und Antiquarks zusammen nur etwa ein Viertel des Spins eines Nukleons tragen.

A. Feynmanregeln der QCD

Einlaufendes Fermion:  = $u^s(p)$

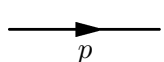
Auslaufendes Fermion:  = $\bar{u}^s(p)$

Einlaufendes Antifermion:  = $\bar{v}^s(p)$


Auslaufendes Antifermion:  = $v^s(p)$

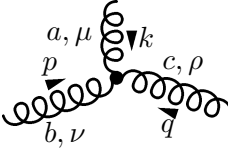
Einlaufendes Gluon:  = $\epsilon_\mu(p)$

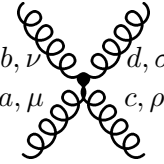
Auslaufendes Gluon:  = $\epsilon_\mu^*(p)$

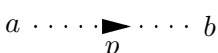
Diracpropagator:  = $\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}$

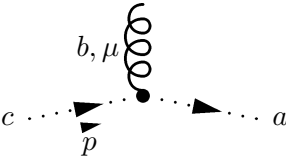
Gluonpropagator:  = $\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$

Fermionvertex:  = $ig\gamma^\mu t^a$

3-Gluon-Vertex:  = $gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$

4-Gluon-Vertex:  = $-ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]$

Geistpropagator:  = $\frac{i\delta^{ab}}{p^2}$

Geist-Vertex:  = $-gf^{abc}p^\mu$

B. Exemplarische Berechnung eines Matrixelements

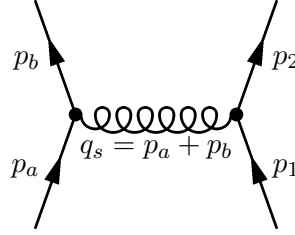


Abbildung B.1.: Feynmandiagramm zum Prozess $q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q}$.

In diesem Anhang wird beispielhaft das Matrixelementquadrat zum Prozess $q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q}$ berechnet. Es handelt sich hierbei um einen relativ einfachen Prozess, da es nur ein beitragendes Feynmandiagramm gibt.

Der erste Schritt zur Berechnung eines Matrixelementquadrates besteht in der Identifikation der zugehörigen Feynmandiagramme. Für den Fall des hier betrachteten Prozesses ist das Diagramm in Abbildung B dargestellt. Mithilfe der in Anhang A angegebenen Feynmanregeln lässt sich das Matrixelement direkt aufschreiben:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}_1^k (ig\gamma^\mu t^\alpha) v_2^l \frac{-ig_{\mu\nu}}{s} \bar{v}_b^m (ig\gamma^\nu t^\alpha) u_a^n, \\ &= i \frac{g^2 g_{\mu\nu}}{s} \bar{u}_1^k \gamma^\mu v_2^l \bar{v}_b^m \gamma^\nu u_a^n \cdot t^\alpha t^\alpha. \end{aligned}$$

Für die Spinoren wurde die abkürzende Schreibweise $u_1^k = u^k(p_1, \sigma_1)$ sowie die Mandelstamvariable $s = q_s^2$ eingeführt. Zur Bildung des Betragsquadrat des Matrixelementes wird zunächst das komplex konjugierte Matrixelement \mathcal{M}^* benötigt:

$$\mathcal{M}^* = -i \frac{g^2 g_{\rho\sigma}}{s} \bar{u}_a^n \gamma^\rho v_b^m \bar{v}_2^l \gamma^\sigma u_1^k \cdot t^\beta t^\beta.$$

Anschließend wird durch Mittelung im Anfangszustand beziehungsweise Summation im Endzustand über Spin- und Farbfreiheitsgrade das Betragsquadrat des Matrixelementes berechnet:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{4N^2 s^2} \underbrace{\sum_{k,l,m,n}}_{\text{Spins}} \bar{u}_1^k \gamma^\mu v_2^l \bar{v}_b^m \gamma^\nu u_a^n \bar{u}_a^n \gamma^\rho v_b^m \bar{v}_2^l \gamma^\sigma u_1^k \cdot \underbrace{\sum_{\alpha,\beta;w,x,y,z}}_{\text{Farben}} t_{wx}^\alpha t_{yz}^\alpha t_{zy}^\beta t_{xw}^\beta. \quad (\text{B.1})$$

B. Exemplarische Berechnung eines Matrixelements

Zunächst wird die Farbstruktur vereinfacht:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha,\beta;w,x,y,z} t_{wx}^\alpha t_{yz}^\alpha t_{zy}^\beta t_{xw}^\beta, \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \text{Tr}(t^\alpha t^\beta) \text{Tr}(t^\alpha t^\beta), \\
&= \sum_{\alpha,\beta} T_F^2 (\delta^{\alpha\beta})^2, \\
&= 8T_F^2. \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt der Gleichung B.2 wurde die Relation $\text{Tr}(t^\alpha t^\beta) = T_F \delta^{\alpha\beta}$ mit $T_F = \frac{1}{2}$ verwendet. Mit diesem Ergebnis und den explizit ausgeschriebenen Spinorindizes a, b, \dots, h , für die Summenkonvention vereinbart wird, nimmt Gleichung B.1 die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^4 g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{4N^2 s^2} \sum_{\substack{k,l,m,n \\ \text{Spins}}} u_a^k(p_1) \gamma_{ab}^\mu v_b^l(p_2) \bar{v}_c^m(p_b) \gamma_{cd}^\nu u_d^n(p_a) \bar{u}_e^n(p_a) \gamma_{ef}^\rho v_f^m(p_b) \bar{v}_g^l(p_2) \gamma_{gh}^\sigma u_h^k(p_1) \cdot 8T_F^2, \\
&= \frac{2g^4 T_F^2 g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{N^2 s^2} \left[(\not{p}_1 + m)_{ha} \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_2 - m)_{bg} \gamma_{gh}^\sigma (\not{p}_b - m)_{fc} \gamma_{cd}^\nu (\not{p}_a + m)_{de} \gamma_{ef}^\rho \right], \\
&= \frac{2g^4 T_F^2 g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{N^2 s^2} \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^\sigma \right] \cdot \text{Tr} \left[(\not{p}_b - m) \gamma^\nu (\not{p}_a + m) \gamma^\rho \right]. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Hier wurden im ersten Schritt zur Auswertung der Polarisationssummen die Identitäten

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad \text{und} \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m,$$

verwendet. Im zweiten Schritt wurden die erhaltenen Ergebnisse als Spuren im Spinorraum identifiziert. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie zum einen übersichtlich ist, andererseits ist für Spuren über Produkte aus γ -Matrizen auch bekannt, wie diese auszuwerten sind. In diesem Fall sind nur die folgenden Identitäten relevant:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= g^{\mu\nu}, \\
\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}),
\end{aligned}$$

da die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen immer identisch Null ist.

Mit den oben angegebenen Gleichungen kann man die erste Spur aus Gleichung B.3 folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^\sigma \right] &= \text{Tr} \left[\gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\rho \right] p_{1\kappa} p_{2\lambda} - m^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\sigma] \\
&= 4 \left(g^{\kappa\mu} g^{\lambda\sigma} - g^{\kappa\lambda} g^{\mu\sigma} + g^{\kappa\sigma} g^{\mu\lambda} \right) p_{1\kappa} p_{2\lambda} - m^2 g^{\mu\sigma} \\
&= 4 \left(p_1^\mu p_2^\sigma - p_1 \cdot p_2 g^{\mu\sigma} + p_1^\sigma p_2^\mu \right) - m^2 g^{\mu\sigma} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Analog folgt für die zweite Spur aus Gleichung B.3:

$$\text{Tr} \left[(\not{p}_b - m) \gamma^\nu (\not{p}_a + m) \gamma^\rho \right] = 4 \left(p_b^\nu p_a^\rho - p_b \cdot p_a g^{\nu\rho} + p_b^\rho p_a^\nu \right) - m^2 g^{\nu\rho} \tag{B.5}$$

Gleichung B.4 und Gleichung B.5 werden in Gleichung B.3 eingesetzt:

$$\begin{aligned}
& \frac{2g^4 T_F^2 g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{N^2 s^2} [4(p_1^\mu p_2^\sigma - p_1 \cdot p_2 g^{\mu\sigma} + p_1^\sigma p_2^\mu) - m^2 g^{\mu\sigma}] \cdot [4(p_b^\nu p_a^\rho - p_b \cdot p_a g^{\nu\rho} + p_b^\rho p_a^\nu) - m^2 g^{\nu\rho}] \\
&= \frac{8g^4 T_F^2}{N^2 s^2} \{8[(p_1 \cdot p_b)(p_a \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_a)(p_b \cdot p_2)] + 2m^2[(p_1 \cdot p_2) + (p_a \cdot p_b)] + m^4\} \\
&= g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + u^2 - 6m^2(t + u) + 14m^4}{s^2} \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden die Mandelstamvariablen auf Partonniveau wie in den Gleichungen 4.1 und 4.2 eingeführt, sowie die Relation $s + t + u = 2m^2$ verwendet.

Die Berechnung der anderen in Anhang C angegebenen Quadrate der Matrixelemente ist im Allgemeinen komplizierter als die hier dargestellte Rechnung. Zu den meisten Prozessen gehören jeweils unterschiedliche Diagramme. Die zugehörigen Amplituden können zudem interferieren, wodurch die Berechnung deutlich umfangreicher ausfallen kann. Daher wurde zur Berechnung der Betragsquadrate der Matrixelemente auf das Computeralgebrasystem Mathematica und das Paket FeynCalc [16] zurückgegriffen.

B. Exemplarische Berechnung eines Matrixelements

C. Liste aller Matrixelemente

Alle angegebenen Matrixelemente wurden mit den in [17] gegebenen differentiellen Wirkungsquerschnitten im Limes $m \rightarrow 0$ verglichen und stimmen mit diesen überein. Zum Vergleich wurde folgende Relation benutzt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4s} \cdot \frac{\alpha_s^2}{g^4} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{C.1})$$

C.1. Matrixelemente mit zwei schweren Quarks im Endzustand

$$|\mathcal{M}(gg \rightarrow Q\bar{Q})|^2 = \frac{g^4}{N_A^2} \left\{ 6C_F^2 \left(\frac{tu - m^2(3t+u) - m^4}{(t-m^2)^2} + \frac{tu - m^2(3u+t) - m^4}{(u-m^2)^2} \right) \right. \\ \left. - 3C_A C_F \frac{4t^2 + 4u^2 + 4tu - m^2(20u + 20t - 28m^2)}{s^2} \right. \\ \left. + 12C_F \left(C_F - \frac{1}{2}C_A \right) \frac{m^2(s-4m^2)}{(t-m^2)(u-m^2)} \right. \\ \left. - 6C_A C_F \left(\frac{t^2 + m^2(s-2t+m^2)}{s(t-m^2)} + \frac{u^2 + m^2(s-2u+m^2)}{s(u-m^2)} \right) \right\}$$

$$|\mathcal{M}(q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q})|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + u^2 - 6m^2(t+u) + 14m^4}{s^2}$$

C.2. Matrixelemente ohne schwere Quarks im Endzustand

$$|\mathcal{M}(gg \rightarrow gg)|^2 = \frac{9}{2} g^4 \left\{ 3 - \frac{ut}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right\}$$

$$|\mathcal{M}(gg \rightarrow q\bar{q})|^2 = \frac{g^4}{N_A^2} \left\{ 6C_F^2 \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) - 12C_A C_F \frac{t^2 + tu + u^2}{s^2} - 6C_A C_F \left(\frac{t}{s} + \frac{u}{s} \right) \right\}$$

$$|\mathcal{M}(q\bar{q} \rightarrow gg)|^2 = \frac{g^4}{N^2} \left\{ 6C_F^2 \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) - 12C_A C_F \frac{t^2 + tu + u^2}{s^2} - 6C_A C_F \left(\frac{t}{s} + \frac{u}{s} \right) \right\}$$

$$|\mathcal{M}(gq \rightarrow gq)|^2 = \frac{g^4}{NN_A} \left\{ -6C_F^2 \left(\frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right) + 3C_A C_F \frac{4u^2 + 4us + s^2}{t^2} + 6C_A C_F \left(\frac{u}{t} + \frac{s}{t} \right) \right\}$$

$$|\mathcal{M}(gq \rightarrow qg)|^2 = \frac{g^4}{NN_A} \left\{ -6C_F^2 \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) + 3C_A C_F \frac{4t^2 + 4ts + s^2}{u^2} + 6C_A C_F \left(\frac{t}{u} + \frac{s}{u} \right) \right\}$$

C. Liste aller Matrixelemente

$$|\mathcal{M}(g\bar{q} \rightarrow g\bar{q})|^2 = \frac{g^4}{NN_A} \left\{ -6C_F^2 \left(\frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right) + 3C_A C_F \frac{4u^2 + 4us + s^2}{t^2} + 6C_A C_F \left(\frac{u}{t} + \frac{s}{t} \right) \right\}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{q}g \rightarrow g\bar{q})|^2 = \frac{g^4}{NN_A} \left\{ -6C_F^2 \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) + 3C_A C_F \frac{4t^2 + 4ts + s^2}{u^2} + 6C_A C_F \left(\frac{t}{u} + \frac{s}{u} \right) \right\}$$

$$|\mathcal{M}(q\bar{q} \rightarrow q\bar{q})|^2 = g^4 \left\{ \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{12C_F(C_F - \frac{1}{2}C_A)}{N^2} \frac{u^2}{st} \right\}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{q}q \rightarrow q\bar{q})|^2 = g^4 \left\{ \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{12C_F(C_F - \frac{1}{2}C_A)}{N^2} \frac{t^2}{su} \right\}$$

$$|\mathcal{M}(qq \rightarrow qq)^2 = g^4 \left\{ \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + s^2}{u^2} + \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{12C_F(C_F - \frac{1}{2}C_A)}{N^2} \frac{s^2}{tu} \right\}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q})|^2 = g^4 \left\{ \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + s^2}{u^2} + \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{12C_F(C_F - \frac{1}{2}C_A)}{N^2} \frac{s^2}{tu} \right\}$$

$$|\mathcal{M}(q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

$$|\mathcal{M}(qq' \rightarrow qq')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

$$|\mathcal{M}(q'q \rightarrow qq')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{q}\bar{q}' \rightarrow \bar{q}\bar{q}')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{q}'\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

$$|\mathcal{M}(q\bar{q}' \rightarrow q\bar{q}')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{q}'q \rightarrow q\bar{q}')|^2 = g^4 \frac{16T_F^2}{N^2} \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

D. Beispielhafte Datei zur Programmsteuerung

```
name of the pdf set: cteq66
type of the pdf set(0=evolution,1=interpolation): 1
CS type(1=differentialCS, 2=correlation): 1
PTtype(1=PT1; 2=PT2;3=sqrt(PT1^2+PT2^2)): 1
a_R: 2
b_R: 2
a_I: 2
b_I: 2
a_F: 2
b_F: 1
charm mass: 1.5
bottom mass: 4.5
sqrt(S): 14E3
OBS1 (PT1=1,PT2=2,y1=3,y2=4,y2-y1=5,invm=7) 1
OBS1min: 5.002
OBS1max: 25.005
OBS1 bin number: 50
OBS2 (PT1=1,PT2=2,y1=3,y2=4,y2-y1=5,inv mass=7) 1
OBS2 bin number: 4
PT1min: 5.0
PT2min: 5.0
yminexp: -2.5
ymaxexp: 2.5
FF-order (0=L0-FF, 1=NLO-FF) 0
FF-Cutoff(fuer x<x0 wird FF 0 gesetzt) 0.05
Verbosity(0=no vegas output; 1=some vegas output) : 0
nstart: 500
nincrease: 1000
maxeval: 2500
NSTART: 2500
NINCREASE: 2000
MAXEVAL: 10000
Bingrenzen von OBS2:
5
8
15
25
55
```

D. Beispielhafte Datei zur Programmsteuerung

Literaturverzeichnis

- [1] G. Altarelli, [[hep-ph/0204179](#)].
- [2] R. Brock et al. (CTEQ), *Rev. Mod. Phys.* **67**, 157 (1995).
- [3] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [4] T. Muta, *World Sci. Lect. Notes Phys.* **5**, 1 (1987).
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*, Westview Press (1995).
- [6] Y. L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46**, 641 (1977).
- [7] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15**, 438 (1972).
- [8] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126**, 298 (1977).
- [9] T. Hahn, *Comp. Phys. Commun.* **168**, 78 (2005), [[hep-ph/0404043](#)].
- [10] M. R. Whalley, D. Bourilkov and R. C. Group, [[hep-ph/0508110](#)].
- [11] J. Binnewies, B. A. Kniehl and G. Kramer, *Phys. Rev.* **D58**, 014014 (1998), [[hep-ph/9712482](#)].
- [12] S. Chekanov et al. (ZEUS), *Phys. Rev.* **D69**, 012004 (2004), [[hep-ex/0308068](#)].
- [13] J. Baines et al., [[hep-ph/0601164](#)].
- [14] P. M. Nadolsky et al., *Phys. Rev.* **D78**, 013004 (2008), [[hep-ph/0802.0007](#)].
- [15] STAR Collaboration, *Physical Review Letters* **100**, 232003 (2008).
- [16] R. Mertig, M. Boehm and A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **64**, 345 (1991).
- [17] W. M. Yao et al. (Particle Data Group), *J. Phys.* **G33**, 1 (2006).

Danksagung

Ich danke apl. Prof. Dr. Hubert Spiesberger für die Ermöglichung dieser Diplomarbeit, für die intensive Betreuung, die sich durch umfangreiche Erklärungen und der Beantwortung jeder meinerseits gestellten Frage äußerte, sowie seiner Gelassenheit ob meines unorthodoxen Arbeitsrythmus. Während der Erstellung dieser Diplomarbeit habe ich viel über Physik, Programmierung, verschiedenste Software und auch über mich gelernt. Dafür möchte ich Ihnen herzlich danken.

Ich danke meinem Bürokollegen Christian Bogner – ich darf noch nicht Dr. schreiben oder? – der mir bei vielen meiner Probleme und Fragen behilflich war, die Atmosphäre im Büro durch zahlreiche Grünpflanzen bereicherte und mir nachhaltig durch seine leger anmutende Arbeitsweise imponierte.

Ich danke Dr. Alimujiang Kadeer für seine stete Hilfsbereitschaft bei technischen und nicht-technischen Problemen aller Art. Wenn Du diesen Satz, so wie er hier steht, ohne im Wörterbuch nachzuschlagen, vollumfänglich verstehen kannst Alim, dann war Dein Volkshochschulkurs zum Erlernen der deutschen Sprache sein Geld wirklich wert.

Ich danke meinem Bürokollegen Dr. Karl-Heinz Georgi für die unterhaltsamen Schwänke aus seinem Leben, mit denen er die Arbeitsatmosphäre zuverlässig auflockerte, sowie für seinen Einsatz für mein kaputtes Handy und die Gespräche mit ihm über Gott und die Welt.

Ich danke den Mitgliedern der THEP, die mich bei meiner Arbeit verschiedentlich unterstützten. Seien es praktische Tips, unterhaltsame Pausen oder interessante Gespräche. Alldies war mir beim Verfassen dieser Arbeit gleichermaßen behilflich.

Ich danke Andreas Höfler, der als angehender Deutschlehrer hart mit meiner Arbeit ins Gericht gegangen ist und mir vor Augen geführt hat, wie schlecht mein Stil eigentlich ist. Das heißt für mich: Nachsitzen!

Ich danke meiner Kollegin Birte, die Samstag Nacht spontan für mich eingesprungen ist und mir so ermöglicht hat noch ein Wochenende den Fehlerteufel zu jagen.

Ich danke meinen zahlreichen Arbeitgebern, die mir die Finanzierung meines Studiums ermöglichten.

Ich danke den Entwicklern von C++ für den segmentation fault. Dieser hat mir Laufe meiner Arbeit tagelangen Rätselspaß bereitet. Danke.

Ich danke auch all meinen Freunden, denen ich es verdanke während des Studiums nicht völlig verrückt geworden zu sein. Die Zeit, die ich mit Euch bei unterhaltsamen Aktivitäten aller Arten verbrachte, anstatt zu lernen, möchte ich nicht missen.

Ich danke meiner Freundin Kathrin, dass sie mich während der stressigen Phasen meiner Arbeit ertragen hat.

Besonders danke ich meiner Familie für die fortwährende Unterstützung.