

# **Bulk-Fermionen und Eichtheorie in Randall-Sundrum-Modellen**

**Diplomarbeit**

von

**Florian Goertz**

**Institut für Physik  
Johannes Gutenberg-Universität Mainz**

vorgelegt am 27. Dezember 2007



# Inhaltsverzeichnis

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Einleitung</b>   | <b>5</b>  |
| <b>I</b>  | <b>Motivation</b>   | <b>7</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Das Standardmodell der Teilchenphysik</b>                    | <b>9</b>  |
| 2.1       | Einführung . . . . .  | 9         |
| 2.2       | Das Standardmodell als effektive Feldtheorie . . . . .          | 15        |
| 2.3       | Probleme des Standardmodells . . . . .                          | 16        |
| <b>3</b>  | <b>Das Hierarchieproblem</b>                                    | <b>19</b> |
| <b>4</b>  | <b>Lösungsansätze für das Hierarchieproblem in 4D</b>           | <b>23</b> |
| 4.1       | Supersymmetrie . . . . .  | 23        |
| 4.2       | Composite-Modelle . . . . .                                     | 24        |
| 4.3       | Little-Higgs-Modelle . . . . .                                  | 24        |
| <b>II</b> | <b>Modelle mit Zusatzdimensionen zur Lösung des Hierarchie-</b> | <b>27</b> |
|           | <b>problems</b>   |           |
| <b>5</b>  | <b>Large Extra Dimensions und generelle Methoden</b>            | <b>29</b> |
| 5.1       | Motivation für Large Extra Dimensions . . . . .                 | 29        |
| 5.2       | Matching . . . . .  | 31        |
| 5.3       | Größe der Extradimensionen . . . . .                            | 34        |
| 5.4       | Kaluza-Klein-Zerlegung und effektive 4D-Theorie . . . . .       | 36        |
| 5.5       | Phänomenologie in Large Extra Dimensions . . . . .              | 39        |
| <b>6</b>  | <b>Das Randall-Sundrum-Modell</b>                               | <b>43</b> |
| 6.1       | Grundlagen . . . . .  | 43        |
| 6.2       | Lösung der Einsteingleichungen . . . . .                        | 46        |
| 6.3       | Gravitation . . . . .   | 49        |
| 6.4       | Lösung des Hierarchieproblems . . . . .                         | 52        |
| 6.5       | Physikalische Konsequenzen . . . . .                            | 54        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 6.6        | Goldberger-Wise-Stabilisierung . . . . .             | 55         |
| <b>III</b> | <b>Randall-Sundrum-Modelle</b>                       | <b>59</b>  |
| <b>7</b>   | <b>Eichbosonen im Bulk</b>                           | <b>63</b>  |
| 7.1        | Setup, Kaluza-Klein-Zerlegung und Spektrum . . . . . | 63         |
| 7.2        | Eichfixierung und Propagatoren . . . . .             | 68         |
| 7.3        | Kopplung an Brane-Fermionen . . . . .                | 71         |
| <b>8</b>   | <b>Spontan gebrochene Eichsymmetrie</b>              | <b>73</b>  |
| 8.1        | Setup . . . . .                                      | 73         |
| 8.2        | Eichfixierung . . . . .                              | 75         |
| 8.3        | Fermionkopplungen und Feynmanregeln . . . . .        | 81         |
| 8.3.1      | Propagatoren . . . . .                               | 82         |
| 8.3.2      | Vertices . . . . .                                   | 82         |
| 8.4        | $\xi$ -Unabhängigkeit von Amplituden . . . . .       | 84         |
| <b>9</b>   | <b>Fermionen im Bulk</b>                             | <b>87</b>  |
| 9.1        | Setup, Kaluza-Klein-Zerlegung und Spektrum . . . . . | 88         |
| 9.2        | Yukawa- und Eichboson-Wechselwirkung . . . . .       | 92         |
| 9.2.1      | Yukawa-Wechselwirkung . . . . .                      | 93         |
| 9.2.2      | Diagonalisierung der Massenmatrix . . . . .          | 95         |
| 9.2.3      | Eichboson-Wechselwirkung . . . . .                   | 106        |
| 9.3        | Feynmanregeln . . . . .                              | 108        |
| <b>10</b>  | <b>Phänomenologie</b>                                | <b>113</b> |
| 10.1       | Massenhierarchien . . . . .                          | 113        |
| 10.2       | Höherdimensionale Operatoren . . . . .               | 113        |
| 10.3       | Flavor Changing Neutral Currents . . . . .           | 114        |
| <b>11</b>  | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                  | <b>117</b> |
| <b>A</b>   | <b>Gravitonen im Randall-Sundrum-Modell</b>          | <b>119</b> |
| <b>B</b>   | <b>Feynmanregeln</b>                                 | <b>121</b> |
| B.1        | Reine Eichtheorie . . . . .                          | 121        |
| B.2        | Abelsches Higgs-Modell mit Brane-Fermionen . . . . . | 121        |
| B.3        | Bulk-Fermionen . . . . .                             | 122        |

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist ein detailliertes Studium von Bulk-Fermionen und -Eichfeldern in Randall-Sundrum-Modellen. Im Eichsektor werden insbesondere  $R_\xi$ -Eichungen (vor und nach spontaner Symmetriebrechung) behandelt, die essentiell sind, um Schleifenrechnungen durchzuführen. Es wird eine vierdimensionale Betrachtungsweise gewählt und dafür eine Kaluza-Klein-Zerlegung der 5D-Theorie durchgeführt. Der Übergang zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzuständen wird diskutiert und die Unabhängigkeit der Amplituden vom Eichparameter wird an einem Beispiel demonstriert. Im Fermion-Sektor wird besonderer Wert auf die Diagonalisierung der unendlichdimensionalen Massenzustände gelegt. Zudem werden Kopplungen zwischen Bulk-Fermionen und Bulk-Eichbosonen studiert. Feynmanregeln für die behandelten Modelle werden hergeleitet.

Randall-Sundrum-Modelle basieren auf einer zusätzlichen Raumdimension mit einer Ausdehnung etwas überhalb der Planck-Länge. Zusatzdimensionen im Bereich unserer täglichen Erfahrungswelt sind sicherlich ausgeschlossen, jedoch liegen mikroskopische Zusatzdimensionen im Bereich des Möglichen. Die Tatsache, dass rechenbare String-Theorien nur konsistent in einer höherdimensionalen Raumzeit formuliert werden können [1], liefert eine weitere Begründung, Modelle mit Extradimensionen zu studieren. Zudem bieten höherdimensionale Modelle interessante Interpretationsmöglichkeiten von im Standardmodell nicht erklärbar Sachverhalten. Ein klarer Vorteil von Randall-Sundrum-Modellen ist die experimentelle Überprüfbarkeit, vielleicht schon in Reichweite des LHC.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Randall-Sundrum-Modelle sind Erweiterungen des Standardmodells der Teilchenphysik. In Teil I werden deshalb allgemeine Motivationen zur Konstruktion solcher Erweiterungen dargelegt. In Kapitel 2 wird das Standardmodell selbst analysiert, Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Hierarchieproblem, zu dessen Lösung das Randall-Sundrum-Modell konzipiert wurde, und in Kapitel 4 werden Lösungsansätze für das Hierarchieproblem in vier Dimensionen angesprochen. Teil II der Arbeit führt höherdimensionale Modelle mit der Motivation das Hierarchieproblem zu lösen ein. In Kapitel 5 werden zunächst „Large Extra Dimensions“ behandelt und generelle Methoden besprochen. Kapitel 6 stellt eine Einführung in das Randall-Sundrum-Modell dar. Der Kernpunkt der Arbeit liegt in Teil III. Hier wird mit Erweiterungen des Randall-Sundrum-Modells gearbeitet. In Kapitel 7 und 8 werden  $U(1)$ -Eichbosonen im Bulk vor bzw. nach spontaner

Symmetriebrechung betrachtet und in Kapitel 9 Bulk-Fermionen. Schließlich wird in Kapitel 10 auf die Phänomenologie dieser Modelle eingegangen und Kapitel 11 liefert eine Zusammenfassung und einen Ausblick.

Es handelt sich bei der vorliegenden Version um eine korrigierte und geringfügig veränderte Fassung (Tippfehler entfernt, etc.) meiner Diplomarbeit.

Mainz, 15.3.2008

# Teil I

## Motivation





# Kapitel 2

## Das Standardmodell der Teilchenphysik

### 2.1 Einführung

Der Mikrokosmos wird derzeit durch das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM) beschrieben. Es besteht aus Quantenfeldtheorien für die elementaren Konstituenten der Materie und ihre Wechselwirkungen (WW) außer der Gravitation. Das SM wird, als lokale Theorie, durch eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  beschrieben. Diese lässt sich mit einfachen Forderungen aus dem beobachteten Teilchengehalt und den dazugehörigen (Eich-)ladungen konstruieren.<sup>1</sup>

Die Theorie muss zunächst einige allgemeine, sinnvolle Bedingungen erfüllen. Hierzu gehören:

*Unitarität:* Wahrscheinlichkeiten sollten erhalten sein. Dies erreicht man durch einen hermiteschen Hamiltonoperator, der eine unitäre Streu-Matrix gewährleistet.

*Stabilität:* Das Spektrum des Hamiltonoperators muss von unten beschränkt sein, damit ein Grundzustand existiert.

*Poincaréinvarianz:* Das SM ist eine *relativistische* Quantenfeldtheorie, welche auf einer vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit definiert ist. Die Teilchen werden nach Darstellungen der Poincarégruppe klassifiziert. Poincaréinvarianz wird explizit durch den Ansatz der Lagrangedichte als einen translationsinvarianten Lorentzskalar  $\mathcal{L}$ .

*Kausalität:* Dies bewirkt, dass  $\mathcal{L}$  die Teilchenoperatoren in Kombination mit Antiteilchenoperatoren enthalten muss. Die Forderung nach Kausalität ist u.a. auch ein Grund dafür, dass relativistische Quantenmechanik durch Felder beschrieben werden muss.

Mit diesen Kriterien im Hinterkopf ergibt sich die **Standardmodell Lagrangedichte**  $\mathcal{L}_{SM}$  als die allgemeinste Lagrangedichte, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

---

<sup>1</sup>Man beachte jedoch, dass das SM keine rechtshändigen Neutrinos und (deswegen) auch keine Neutrinomassenterme enthält.

### 1. Lokale Eichinvarianz unter der Eichgruppe

$$\boxed{SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$$

### 2. Renormierbarkeit.

„Allgemeinste Lagrangedichte“ ist in dem Sinne zu verstehen, dass erlaubte Zusatzterme, welche die Physik nicht ändern (z.B. Umformungen über partielle Integration in der Wirkung), weggelassen werden können und die Lagrangedichte o.B.d.A. so einfach wie möglich formuliert wird. Die erste Forderung implementiert auf elegante Weise die experimentell beobachtete starke und elektroschwache Wechselwirkung. Sie verbietet Massenterme für die Eichbosonen und chiralen Fermionen. Dies steht im Widerspruch zu den beobachteten massiven Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung und den Fermionmassen. Die elektroschwache  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie muss deshalb, zumindest bei niedrigen Energien, gebrochen sein. Im Standardmodell ist die **spontane Symmetriebrechung**

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{EWSB} U(1)_{EM}$$

durch den Higgs-Mechanismus implementiert, sodass man die bekannten Eichbosonen und massiven Fermionen erhält, doch dazu später mehr.

Abgesehen davon führt die Eichinvarianz<sup>2</sup> automatisch zu einem mathematischen Rahmen, der die Natur sehr gut zu beschreiben scheint. Konstruiert man z.B. die allgemeinste Lagrangedichte für das Elektronfeld, die konsistent mit den obengenannten Bedingungen ist, und fordert allerdings zunächst nur  $U(1)_{EM}$ -Eichinvarianz, so erhält man automatisch die Maxwell-Dirac-Lagrangedichte der QED (Der erlaubte P und T verletzende Term  $\mathcal{L}_\theta = \sum_i \frac{\theta_i g_i^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{i\mu\nu}^a F_{i\rho\sigma}^a$  hat keinen observablen Effekt für die  $U(1)$ - sowie die  $SU(2)$ -Eichgruppe und kann für diese weggelassen werden. Für die QCD gilt dies jedoch nicht.) Andere Wechselwirkungen werden durch andere Eichgruppen beschrieben.

Renormierbarkeit sichert die Vorhersagekraft der Theorie und erfordert, dass in einer vierdimensionalen Raumzeit Terme, die Wechselwirkungen beschreiben, höchstens Massendimension  $D=4$  haben dürfen, sodass keine Kopplungskonstanten mit negativen Massendimensionen auftauchen. Dadurch wird die Anzahl der Terme stark eingeschränkt. Renormierbarkeit ist weniger fundamental, wie wir bei der Interpretation des SM als effektive Theorie sehen werden (Abschnitt 2.2).

Die Forderung nach Eichinvarianz soll nun ein wenig genauer beleuchtet werden. Man könnte die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichinvarianz (und den Higgs-Mechanismus) zunächst aufgeben, von den experimentell beobachteten Austauschbosonen ausgehend, erlaubte Wechselwirkungsterme per Hand in  $\mathcal{L}$  einfügen (bzw. die kovariante Ableitung für die Fermionfelder einfach beibehalten), einen Massenterm für die W- und Z-Bosonen hinzufügen und die Konsequenzen studieren.<sup>3</sup> Tatsächlich ist die Invarianz von Spin-1-Boson-Termen gegenüber sogenannten „Eichtransformationen zweiter Art“ gar keine fundamentale Symmetrie der

<sup>2</sup>Mit Eichinvarianz ist im Folgenden immer *lokale* Eichinvarianz gemeint.

<sup>3</sup>Die  $U(1)_{EM}$ - und  $SU(3)_C$ -Eichinvarianz bleiben erhalten.

Natur wie z.B. Lorentzinvarianz. Sie spiegelt lediglich die Redundanz in der Beschreibung masseloser Spin-1-Teilchen, die zwei Freiheitsgrade (Polarisationen) besitzen, durch ein Vektorpotenzial wieder [2]. Dieses benutzt man aus Gründen der Lorentzinvarianz. Das Verwenden der kovarianten Ableitung für die Fermionfelder hingegen ist, auch aus geometrischer Sicht, sinnvoll. Bei Durchführung lokaler Phasentransformationen transformieren sich Felder an verschiedenen Raumzeitpunkten unterschiedlich. Man braucht jetzt einen Zusammenhang, um die Ableitung, welche Felder an verschiedenen Punkten vergleicht, sinnvoll zu definieren. Dieser ist hier gerade durch das Eichfeld mit seinem bekannten Transformationsverhalten gegeben.

Das Einführen eines Massenterms  $m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu}$  per Hand führt jedoch zu Problemen. Er bewirkt, dass der W-Propagator von der Form

$$\langle W^\mu W^\nu \rangle = \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2} \right] \quad (2.1)$$

ist. Der Term  $k_\mu k_\nu / m_W^2$  hat problematische UV-Divergenzen zur Folge. Diese stehen in Zusammenhang damit, dass der Limes  $m_W \rightarrow 0$  singulär ist. Die Theorie wäre so nicht renormierbar und nur bis zum TeV-Bereich brauchbar. (Für die QED verschwinden Terme  $\sim k_\mu k_\nu$ , da die Photonen an einen erhaltenen Strom koppeln, was hier nicht der Fall ist.)

Dies soll nun genauer erläutert werden. Ein Kriterium zur Überprüfung der Renormierbarkeit einer Theorie ist das „Power-Counting“ (vgl. hierzu [3] Kapitel 2.4), welches hier benutzt werden soll. Eine Lagrangedichte ist renormierbar, falls alle im Zuge der Renormierung induzierten Gegenterme in Redefinitionen der Parameter der Lagrangedichte absorbiert werden können. Dies ist nur dann möglich, wenn die kanonische Dimension der Wechselwirkungsterme  $\Delta_{int} \leq 4$  ist, da ansonsten unendlich viele Gegenterme mit beliebig hohen kanonischen Dimensionen benötigt werden. Die kanonische Dimension eines Wechselwirkungsterms ist die Summe der kanonischen Dimensionen der beteiligten Felder ( $d_i$ ), welche über das Hochenergieverhalten ihrer Propagatoren  $D(k^2)$  definiert ist. Für

$$D_A(k^2) \xrightarrow[k^2 \rightarrow \infty]{} (k^2)^{-\omega_A/2} \quad (2.2)$$

erhält man

$$\begin{aligned} d_i(A) &= (4 - \omega_A)/2 \\ \Delta_{int} &= \sum d_i. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Man sieht nun leicht, dass für Fermionen, Skalare und masselose Vektorfelder die kanonische Dimension mit der naiven Massendimension übereinstimmt:

$$d(\psi) = \frac{3}{2}, \quad d(\phi) = 1, \quad d(A_\mu) = 1. \quad (2.4)$$

Ableitungen haben eine kanonische Dimension von 1. Für massive Vektorfelder, deren Massenterme per Hand in die Lagrangedichte eingeführt wurden, ist die Situation jedoch

anders. Aus (2.1) erhält man  $D_{\mu\nu}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} O(1)$ , woraus sich eine kanonische Massendimension von

$$d(W_\mu) = 2 \quad (2.5)$$

ergibt. Es existieren nun keine lorentzinvarianten Operatoren, die Wechselwirkungen mit diesen massiven Vektorfeldern beschreiben und  $\Delta_{int} \leq 4$  erfüllen. Daran sieht man, dass die oben angedachte Theorie nicht renormierbar ist.

Die Problematik zeigt sich auch schon sehr deutlich im UV-Verhalten der Streuung in longitudinal polarisierte W-Bosonen auf Baumgraphen-Niveau. Es gibt hier Diagramme, deren zugehörige Amplitude schneller mit der Schwerpunktsenergie ansteigt als aufgrund von Unitarität erlaubt ist, was ebenfalls einen Hinweis auf die Nichtrenormierbarkeit liefert. Es wäre denkbar, dass die Unitarität durch Schleifenkorrekturen wieder hergestellt wird, doch würde dann immer noch bei  $E \sim 4\pi \frac{m_W}{g} \sim 1 \text{ TeV}$  die Theorie stark koppelnd werden und die schwache Wechselwirkung wäre nicht mehr perturbativ. Es wäre dann auch schwer zu verstehen, wie aus einer solchen Theorie bei niedrigen Energien die bekannte schwach wechselwirkende Theorie hervorgeht und die fehlende Renormierbarkeit bliebe bestehen.

Man beachte nun, im Kontext der angesprochenen Probleme, dass der Limes  $m \rightarrow 0$  für Spin-1-Teilchen nicht stetig ist. Er entspricht einem Übergang von drei zu zwei Freiheitsgraden. Was man braucht ist eine UV-Komplettierung der Theorie, die die longitudinalen Komponenten der schwachen Eichbosonen liefert und ein vernünftiges UV-Verhalten sichert. Eine solche UV-Ergänzung liefert der Higgs-Mechanismus, der einen Teil des Standardmodells bildet.<sup>4</sup> Bei hohen Energien hat man eine Theorie mit ungebrochener Eichsymmetrie und masselosen Eichbosonen. Die Freiheitsgrade, die den longitudinalen Eichbosonen entsprechen, stecken dann im Higgs-Dublett. Bei niedrigen Energien wird die Symmetrie spontan gebrochen und man erhält die beobachteten massiven schwachen Eichbosonen. Es ist die zugrundeliegende (versteckte) Eichinvarianz, die eine Eichfixierung erlaubt und das UV-Verhalten der Theorie zähmt. Sie ermöglicht es, den W-Propagator in einer Eichung zu schreiben, die ein unproblematisches UV-Verhalten besitzt. Bei Berechnungen müssen dann Goldstone-Bosonen und Faddeev-Popov-Geister berücksichtigt werden. In beliebiger  $R_\xi$ -Eichung gilt

$$\langle W^\mu W^\nu \rangle = \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_W^2} (1 - \xi) \right], \quad (2.6)$$

sodass für endliche  $\xi$  (die sogenannten „renormierbaren Eichungen“)  $d(W_\mu) = 1$  gilt und die Renormierbarkeit der **Eich**theorie der schwachen Wechselwirkung sichtbar wird.

Die Eichinvarianz führt ansonsten über sogenannte „Ward-Identitäten“ auch zu einem Wegheben problematischer Beiträge aus Feynman-Diagrammen, so auch z.B. in der  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ -Streuung, sodass schon auf Baumgraphenniveau nur Beiträge übrigbleiben, die für hohe Energien zu einem Wirkungsquerschnitt  $\sigma \sim 1/s$  führen und die Theorie schwach koppelnd bleibt. Ward-Identitäten führen auch zu einem Wegheben der unphysikalischen Pole in Rechnungen mit beliebiger  $R_\xi$ -Eichung. Es sei noch einmal betont, dass eine nicht-renormierbare Theorie nicht direkt wertlos ist. Gesehen als effektive Niederenergiethorie

<sup>4</sup>Das Higgs-Boson ist das einzige bisher noch nicht experimentell nachgewiesene SM-Teilchen.

(siehe Abschnitt 2.2) spricht nichts gegen eine Theorie mit ad-hoc eingeführten massiven Vektorbosonen. Genau diese ist es, die bisher experimentell gefunden wurde. Das Testen der UV-Komplettierung steht noch aus und wird vermutlich am LHC erfolgen.

Die Forderung nach Eichinvarianz unter der SM-Eichgruppe ist also sehr sinnvoll, da sie die Renormierbarkeit sichert und automatisch die Wechselwirkungen implementiert. Sie liefert einen beeindruckend erfolgreichen Rahmen zur vereinheitlichten Behandlung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung sowie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung. Des Weiteren trägt die SM-Eichgruppe sehr gut den in der Natur beobachteten (exakten und approximativen) Symmetrien und Erhaltungssätzen Rechnung, welche nicht zusätzlich eingebaut werden müssen.<sup>5</sup> Die Anzahl der erlaubten Terme in der Lagrangedichte wird stark eingeschränkt in einer Art und Weise, die sehr gut zu den experimentellen Beobachtungen passt. Auch die beobachtete Universalität der Kopplungen der Fermionen an die Wechselwirkungen vermittelnden Felder ist ein starker Hinweis auf eine spontan gebrochene Eichsymmetrie. Das Standardmodell wird aus diesem Grund als Eichtheorie bezeichnet. Man glaubt heute, dass das Prinzip der lokalen Eichinvarianz ein fundamentales Prinzip ist und alle elementaren Wechselwirkungen mittels Eichtheorien beschrieben werden sollten.

Der Higgs-Mechanismus als UV-Komplettierung erfüllt seine Aufgabe allerdings nur dann, falls er ins Spiel kommt bevor die Niederenergiethorie kollabiert. Mit  $4\pi\frac{m_W}{g} = 4\pi v$  muss gelten  $\sqrt{\lambda}v < 4\pi v$  (mit  $v = \langle H \rangle$ , dem Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes). Wird das Higgs zu schwer, sinkt der Cutoff der komplettierten Theorie auch immer weiter Richtung  $4\pi v \sim M_{EW}$ . Dies folgt aus Gründen der Konsistenz, die verlangt, dass die Higgs-Selbstkopplung endlich bleiben muss.<sup>6</sup> Unter anderem aufgrund dieser Überlegungen erwartet man ein leichtes Higgs-Boson

$$m_{H^{phys}}^2 \sim \lambda v^2 < (4\pi v)^2, \quad v = 246 \text{ GeV}. \quad (2.7)$$

Die SM-Lagrangedichte (vor elektroschwacher Symmetriebrechung) lautet schließlich [6]:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{Eich} + \mathcal{L}_{Fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (2.8)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Eich} &= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{Fermion} &= \bar{L}i\not{D}_L L + \bar{e}_R i\not{D}_e e_R + \bar{Q}i\not{D}_Q Q + \bar{u}_R i\not{D}_u u_R + \bar{d}_R i\not{D}_d d_R \\ \mathcal{L}_{Higgs} &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \\ \mathcal{L}_{Yukawa} &= -\left( \lambda_e^{ij} (\bar{L}^i \Phi) e_R^j + \lambda_d^{ij} (\bar{Q}^i \Phi) d_R^j + \lambda_u^{ij} (\bar{Q}^i \tilde{\Phi}) u_R^j + h.c. \right) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Eine Ausnahme bildet die Tatsache, dass aufgrund der beobachteten CP-Erhaltung der starken WW  $\theta_{QCD} = 0$  gesetzt werden muss. Dies bezeichnet man als das „starke CP-Problem“. Der bekannteste Lösungsansatz hierzu ist die Peccei-Quinn-Theorie [4].

<sup>6</sup>Für weitere Schranken an die Higgsmasse aus geforderter Tree-Level-Unitarität siehe [5].

sowie

$$\begin{aligned}
\cancel{D} &:= \gamma^\mu D_\mu \\
G_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_3 f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu \\
W_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu + g_2 \epsilon_{abc} W_b^\mu W_c^\nu \\
B^{\mu\nu} &= \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \\
L &= \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
Q &= \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
iD_L^\mu &= \left( i\partial^\mu + g_1 \left( -\frac{1}{2} \right) B^\mu + g_2 \frac{\sigma_a}{2} W_a^\mu \right) \\
iD_e^\mu &= (i\partial^\mu + g_1 (-1) B^\mu) \\
iD_Q^\mu &= \left( i\partial^\mu + g_1 \left( \frac{1}{6} \right) B^\mu + g_2 \frac{\sigma_a}{2} W_a^\mu + g_3 t_a G_a^\mu \right) \\
iD_u^\mu &= \left( i\partial^\mu + g_1 \left( \frac{2}{3} \right) B^\mu + g_3 t_a G_a^\mu \right) \\
iD_d^\mu &= \left( i\partial^\mu + g_1 \left( -\frac{1}{3} \right) B^\mu + g_3 t_a G_a^\mu \right) \\
D_\mu &= \left( \partial_\mu - ig_1 \left( \frac{1}{2} \right) B^\mu - ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_a^\mu \right) \\
V(\Phi) &= -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{2} (\Phi \Phi^*)^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda}, \quad \mu^2 > 0, \lambda > 0.
\end{aligned}$$

$G$  ist das  $SU(3)_C$ -Eichfeld,  $W$  das  $SU(2)_L$ -Eichfeld und  $B$  gehört zur  $U(1)_Y$ .  $\Phi$  bezeichnet das Higgs-Dublett.<sup>7</sup> Es wird über den jeweiligen Eichgruppenindex  $a$  sowie über die Fermionengenerationen  $u = (u, c, t)$ ,  $d = (d, s, b)$ ,  $e = (e, \mu, \tau)$ ,  $\nu = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$  summiert. Die Farbstruktur ( $SU(3)_C$ ) der Fermionfelder wurde unterdrückt.  $g_i$  sind die Eichkopplungskonstanten und  $\lambda^{ij}$  die Yukawa-Kopplungskonstanten.  $\mathcal{L}_{SM}$  ist invariant bezüglich der SM-Eichgruppe.

Aus der SM-Lagrangedichte können die Feynmanregeln für störungstheoretische Rechnungen abgeleitet werden. Die enthaltenen Terme respektieren u.a. Leptonzahlerhaltung (L) und Baryonzahlerhaltung (B), die auch in der Natur sehr gute Symmetrien sind. Auf D=4-Niveau gibt es keine erlaubten Operatoren, die L oder B verletzen, und es sei ausdrücklich herausgestellt, dass diese Symmetrien nicht künstlich eingebaut werden müssen.<sup>8</sup> Höherdimensionale Operatoren könnten jedoch einfach L- bzw. B-verletzende Prozesse induzieren. Diese Operatoren sind zwar wie erwähnt aus Gründen der Renormierbarkeit

---


$${}^7\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*$$

<sup>8</sup>Auf Quanten-Niveau gibt es bei sehr hohen Energien eine Verletzung der Baryonen- bzw. Leptonenzahl durch die sogenannte chirale Anomalie, jedoch bleibt B-L erhalten.

verboten, jedoch wollen wir nun zu einer etwas moderneren Interpretation des Standardmodells kommen: Es ist allgemein akzeptiert, dass das SM keine fundamentale Theorie ist, die bis zu beliebig hohen Energien gültig ist. Spätestens bei der Planck-Skala  $M_{PL} \sim 10^{19} \text{ GeV}$  werden Quanteneffekte der Gravitation relevant, welche nicht im Standardmodell enthalten sind. Die Divergenzen, die in Schleifenrechnungen im SM auftauchen, liefern einen starken Hinweis auf eine ausstehende UV-Komplettierung bzw. begrenzte Gültigkeit des SM. Außerdem ist die Idee der „großen vereinheitlichten Theorien“ (GUT) sehr attraktiv, da die Eichkopplungen sich bei  $\lambda_{GUT} \sim 10^{15} \text{ GeV}$  sehr nahe kommen.<sup>9</sup> Solche Theorien, die die SM-Wechselwirkungen in einer größeren Eichgruppe vereinigen, sagen auch generisch neue Teilchen voraus und das SM hat noch weitere Mängel, wie wir in Abschnitt 2.3 feststellen werden. So gesehen sollte man das Standardmodell als effektive Feldtheorie (EFT) ansehen, die nur bis zu einer gewissen Skala  $\lambda_{NP}$  gültig ist.

## 2.2 Das Standardmodell als effektive Feldtheorie

Aufgrund der Überlegungen des vorherigen Abschnitts sollte man das Standardmodell als EFT betrachten. Höherdimensionale Operatoren sind dann erlaubt und (weil die Wirkung in natürlichen Einheiten dimensionslos sein muss) mit entsprechenden Potenzen des Cutoffs unterdrückt.<sup>10</sup> Durch diese Unterdrückung ist, bei niedrigen Energien, jede EFT automatisch renormierbar, da nur eine endliche Anzahl an Operatoren in der Operator Product Expansion (OPE) berücksichtigt werden muss. Höherdimensionale Operatoren können etwa durch Ausintegrieren von Teilchen der zugrundeliegenden fundamentalen Theorie induziert werden. Unabhängig von den Details ihres Ursprungs, gibt es in der effektiven Theorie keinen Grund, warum sie nicht vorhanden sein sollten. Das Standardmodell, gesehen als EFT, die bis zu einer großen Skala (etwa  $\lambda_{GUT}$ ) gültig sein soll, erklärt sehr schön die beobachtete Unterdrückung ihrer Effekte. Man kann, dieser Sichtweise folgend, die SM-Lagrangedichte schreiben als:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_4 + \frac{1}{\lambda_{NP}} \mathcal{L}_5 + \frac{1}{\lambda_{NP}^2} \mathcal{L}_6 + \dots, \quad (2.9)$$

mit der ursprünglichen Standardmodell-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_4$  als erstem Term in der Reihe. Ein Beispiel für einen eichinvarianten D=5-Term wäre eben z.B. der leptonzahlverletzende Ausdruck  $O_\nu \sim \frac{1}{\lambda_{NP}} \nu^T H H \nu$ .<sup>11</sup> Nach spontaner Symmetriebrechung erhält man einen Neutrino Majorana-Massenterm mit  $m_\nu \sim \frac{v^2}{\lambda_{NP}}$ . So gesehen sagt das SM als EFT, auch ohne  $\nu_R$ , Neutrinomassen vorher. Diese sollten unter Annahme eines hohen Cutoffs natürlicherweise sehr klein sein. Die experimentellen Grenzen an die Neutrinomassen lassen einen

<sup>9</sup>Allerdings bedarf es noch einer Modifizierung der Renormierungsgruppenevolution gegenüber der SM-Vorhersage, damit sie sich wirklich treffen.

<sup>10</sup>Der Cutoff kann z.B. bei der Masse eines schweren Teilchens sein, das nicht mehr zur Theorie gehört. Er stellt die natürliche Massenskala dar, von deren Größenordnung dann alle dimensionsbehafteten Parameter der Theorie sein sollten („hypothesis of naturalness“).

<sup>11</sup>Dieser Term verletzt zudem B-L und könnte z.B. vom See-Saw-Mechanismus induziert werden.

Cutoff im Bereich von  $\lambda_{GUT}$  zu, was sehr attraktiv ist. Ein D=6-Term wäre z.B.  $\frac{1}{\lambda_{NP}^2} qqql$ . Dieser verletzt die Baryonenzahl. Aufgrund des nicht beobachteten Protonzerfalls sollte  $\lambda_{NP} \geq 10^{16} GeV$  gelten.

Effektive Theorien sind lange bekannt und erfolgreich, z.B. in Form der Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung für niedrige Energien. Hier konnte man aus Experimenten auf eine fundamentale Skala von  $M \sim 100 GeV$  schließen, und die Entdeckung der schwachen Eichbosonen genau bei dieser Skala war ein Meilenstein in der Teilchenphysik. Die Fermi-Theorie erhält man formal, indem man in der SM-Lagrangedichte die W- und Z-Bosonen ausintegriert. Dadurch werden, in führender Ordnung, 4-Fermion-Operatoren induziert, die eben, weil sie Massendimension D=6 haben, mit  $(E/M_W)^2$  unterdrückt sind. Dies erklärt die Schwäche der schwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien. Eine Einführung in effektive Feldtheorien findet sich in [7, 8].

## 2.3 Probleme des Standardmodells

Die Vorhersagen des Standardmodells haben bisher (bis  $O(100 GeV)$ ) allen experimentellen Überprüfungen standgehalten. Besonders beeindruckend war die Vorhersage der W- und Z-Bosonen sowie ihres Massenverhältnisses durch Glashow, Weinberg und Salam noch vor ihrer Entdeckung am CERN sowie allgemein der Mechanismus der elektroschwachen Vereinheitlichung. Der verifizierte Zusammenhang der Eichkopplungen und Massen der elektroschwachen Eichbosonen über denselben Faktor, den Weinbergwinkel, und auch die Struktur der Kopplungen ist im Einklang mit der elektroschwachen Theorie des SM. Die elektroschwache Vereinheitlichung wurde bei HERA experimentell bestätigt. Auch z.B. das Confinement bzw. die asymptotische Freiheit der starken Wechselwirkung kann durch den nichtabelschen Charakter der Eichgruppe erklärt werden. Weiter sind zu nennen: die Messung der hadronischen Breite des Z-Bosons, mit der man auf drei leichte Neutrinofamilien schließen konnte, sowie ganz allgemein eine exzellente Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Wirkungsquerschnitten, Asymmetrien, diversen Bestimmungen des Weinbergwinkels, usw. . Auch die Masse des Top-Quarks konnte schon vor Entdeckung indirekt, durch ihre großen Effekte in Loops, eingegrenzt werden. Der Standardmodell-Fit, der experimentelle Daten und theoretische Vorhersagen kombiniert, ist in sich konsistent. Einzig bei der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie  $A_{FB}^b(s \approx M_Z^2)$  gibt es eine Abweichung von knapp  $3\sigma$  gegenüber der SM-Vorhersage nach unten und CP-Asymmetrien in schleifendominierten Prozessen wie  $B \rightarrow \phi K_S$  zeigen Hinweise auf eine Abweichung vom SM.

Daneben hat das SM, wie schon angedeutet, auch Mängel, die nahelegen, dass es nicht der Weißheit letzter Schluss ist. Diese sollen in diesem Abschnitt näher erläutert werden. Wie schon erwähnt, beinhaltet das SM keine Theorie der Gravitation und auch die anderen drei Wechselwirkungen werden zwar durch die Produkt-Eichgruppe  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  beschrieben, es ist jedoch nicht klar, warum ausgerechnet diese Eichgruppen realisiert sind und es wäre schöner, die Wechselwirkungen in einer einzigen Eichgruppe zu vereinen. Trotzdem sprechen diese Punkte prinzipiell nicht dagegen, dass das SM bis zu sehr hohen Energien  $\sim 10^{15} GeV$  die korrekte Theorie ist. Viele Fragen, die das Standardmodell



unbeantwortet lässt, liegen im Flavorbereich. Die großen vorkommenden Massenhierarchien zwischen z.B. dem Elektron mit einer Yukawakopplung von  $\lambda_e \sim 10^{-6}$  und dem Top-Quark mit  $\lambda_t \sim 1$  sind unverstanden. (Hierauf wird in Abschnitt 9.2.1 und 10.1 zurückgekommen.) Es ist auch schon unklar, warum die Fermionen überhaupt in drei Generationen auftreten, die sich nur durch die Massen unterscheiden. Das SM hat auch dadurch insbesondere im Higgs-Sektor relativ viele Inputparameter, die nicht theoretisch vorhergesagt werden können. Die 18 Parameter<sup>12</sup> des SM sind:

- Die 3 Eichkopplungen  $(g_1, g_2, g_3)$
- 15 Parameter im Higgs-Sektor:
  - 6 Quarkmassen, 3 Leptonmassen
  - $m_H, v$
  - 4 Parameter der Quarkmischungsmatrix (CKM-Matrix).<sup>13</sup>

Das SM liefert auch keinen Dunkle-Materie-Kandidaten, was angesichts der starken Hinweise hierfür ein Manko ist, und die CP-Verletzung im Quark-Sektor reicht nicht aus, um die Materie-Antimaterie-Asymmetrie (Baryogenese) zu erklären.

Eine Entdeckung, die allgemein als Physik jenseits des Standardmodells angesehen wird, sind die nichtverschwindenden Neutrinomassen, auf die man aus der Beobachtung von Neutrinooszillationen schließen kann. Im ursprünglichen Standardmodell kommen keine rechtshändigen Neutrinos und somit auch keine Dirac-Massenterme für Neutrinos vor. Es wäre jedoch kein Problem, diese einfach hinzuzufügen. Allerdings ist es dann unnatürlich, dass die Neutrino-Yukawakopplungen um so viele Größenordnungen kleiner sind als die restlichen. Eine andere Option wäre der schon erwähnte Majorana-Massenterm, der die kleinen Neutrinomassen natürlich erklären kann. Wenn man das SM als EFT ansieht, spricht nichts gegen diese Möglichkeit, z.B. mit dem See-Saw-Mechanismus als Grundlage. Auf eine weitere Möglichkeit, die kleinen Neutrinomassen zu erklären, wird im Rahmen der Randall-Sundrum-Modelle in Kapitel 10 eingegangen.

All diese Punkte liefern eine gute Begründung dafür, solche Theorien zu entwickeln und zu untersuchen, die das ursprüngliche Standardmodell erweitern. Dieses selbst ist bei niedrigen Energien so erfolgreich, dass man es keinesfalls komplett verwerfen sollte.

<sup>12</sup>Der CP-Verletzungs-Parameter der starken WW wird zu  $\theta_{QCD} = 0$  angenommen.

<sup>13</sup>Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM) beschreibt die Stärke der flavorändernden Kopplungen im SM. Sie kommt dadurch zustande, dass die Masseneigenzustände der Quarks nicht mit den Flavoreigenzuständen (den Eigenzuständen der schwachen Wechselwirkung) übereinstimmen, da die Quark-Massenmatrix in der Flavorbasis nicht diagonal ist. Sie enthält eine CP verletzende Phase, die erst möglich wird, weil drei Familien von Quarks existieren. In der Wolfensteinparametrisierung lautet sie:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \quad (2.10)$$

mit  $\lambda = |V_{us}| = 0.22$ .

Die neue Theorie sollte das Standardmodell als Grenzfall enthalten und idealerweise seine Mängel beseitigen, indem sie dort ansetzt, wo das Standardmodell versagt und Erklärungen liefert, wo das Standardmodell willkürlich anmutende Parameter bzw. Annahmen benötigt. Ein bekanntes Problem, das in der Teilchenphysik existiert und das Erweiterungen des SM lösen sollten, ist das sogenannte Hierarchieproblem (HP). Dieses wird im nächsten Abschnitt erläutert.

# Kapitel 3

## Das Hierarchieproblem

In Kapitel 2 wurde motiviert warum, wenn ein (SM-)Higgs-Boson existiert, dieses leicht sein sollte (siehe (2.7)) und elektroschwache Präzisionsmessungen unterstützen dies. Sein Vakuumerwartungswert (VEV) ist auch bekannt zu  $v = 246 \text{ GeV} \sim M_{EW}$ . Man erwartet eine Higgsmasse in der Größenordnung dieses VEVs. Eine stark davon abweichende Masse wäre auch deshalb unnatürlich, weil für die dimensionslose Kopplung  $\lambda \sim O(1)$  gelten sollte. Es existieren nun also scheinbar zwei fundamentale Skalen im Mikrokosmos, die sich um 16 Größenordnungen unterscheiden: Die elektroschwache Skala  $M_{EW} \sim 1 \text{ TeV}$ , bei der die Higgsmasse und die Massen der schwachen Eichbosonen anzusiedeln sind, und die Planck-Skala  $M_{PL} \sim 10^{19} \text{ GeV}$ , die Skala der Gravitation. Die Planck-Skala fungiert nun zunächst als natürlicher Cutoff der Quantenfeldtheorie.

Aus der enormen Diskrepanz der beiden Skalen resultiert das Hierarchieproblem. Abgesehen davon, dass nicht klar ist, warum überhaupt zwei solch unterschiedliche Skalen existieren sollten, ist diese Hierarchie ohne neue Mechanismen nicht radiativ stabil. Die (quadratische) Higgsmasse erhält jetzt nämlich Korrekturen proportional zum Quadrat des Cutoffs

$$\Delta m_H^2 \sim M_{PL}^2 \quad (3.1)$$

und deshalb würde man eine physikalische Higgsmasse bei der Planck-Masse erwarten. Der Unterschied zu den anderen Elementarteilchen liegt darin, dass ein fundamentaler Higgs-Massenterm nicht durch Eichinvarianz verboten ist.<sup>1</sup> Ohne Brechung der elektroschwachen Symmetrie wären alle bekannten Fermionen und Eichbosonen masselos, wodurch der Cutoff für die Theorie massiver Eichbosonen und Fermionen bei  $M_{EW}$  und nicht bei  $M_{PL}$  liegt. Die Eichinvarianz erweist sich auch hier als sehr nützlich. Zudem sind die Korrekturen zu den Fermionmassen proportional zu ihren Massen selbst  $\Delta m_f \sim m_f \log(\frac{\lambda_{UV}}{m_f})$ , mit  $\lambda_{UV} = M_{EW}$ , und deshalb unproblematisch.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Auch ein ursprünglich masseloses Higgs würde direkt durch radiative Korrekturen eine Masse erhalten. Da das Higgsfeld ein Skalarfeld ist, gibt es keinen Unterschied in den Freiheitsgraden zwischen dem masselosen und dem massiven Fall.

<sup>2</sup>Dass die Korrekturen zu den Fermionmassen prinzipiell nur logarithmisch divergent sind und im Gegensatz dazu diejenigen zur Higgsmasse quadratisch, ist jedoch hier nicht der direkt entscheidende Punkt (s.u.).

Die einzige Möglichkeit so auf eine Higgsmasse im Bereich von  $M_{EW}$  zu kommen, wäre eine unglaubliche Feinabstimmung im Zuge der Renormierung in der Größenordnung 1 zu  $10^{30}$  !

In der Festkörperphysik kennt man eine Situation, in der ein Erwartungswert viel kleiner als sein zu vermutender Wert ist, aus der Theorie der Phasenübergänge. An einem kritischen Punkt verhält sich ein Ferromagnet wie ein Kontinuum fast masseloser Skalarfelder. Allerdings geschieht dies hier, wenn jemand anwesend ist, der z.B. die Temperatur feinjustiert bis der kritische Punkt erreicht wird. Solch ein Eingreifen von außen ist in der Teilchenphysik nicht beobachtbar (siehe jedoch Abschnitt 4.1).

Man könnte nun argumentieren, dass man es in Schleifenrechnungen dauernd mit Divergenzen zu tun hat, die aus dem unbekanntem UV-Verhalten der Theorie stammen, und dass die quadratischen Divergenzen<sup>3</sup> nicht auftreten, wenn man dimensionelle Regularisierung verwendet. Dann gibt es aber immer noch eine Summe von Beiträgen, die jeweils proportional zum Quadrat der Masse der in den Schleifen umlaufenden Teilchen sind. Es ist zu beachten, dass alle Teilchen beitragen, die unterhalb des Cutoffs der Theorie liegen, der hier  $M_{PL}$  ist. Somit würde man die Higgsmasse bei der Masse des schwersten in der Natur vorkommenden Teilchens erwarten, was in der Größenordnung der Planck-Skala liegen sollte. Dann wäre übrigens auch nicht einzusehen, warum der Higgs-VEV bei  $v = 246 \text{ GeV}$  liegt. Es ist zwar nicht zwingend nötig, dass Teilchen mit solch großen Massen existieren, jedoch mutet es ziemlich unwahrscheinlich an, dass zwischen  $M_{EW}$  und  $M_{PL}$  sozusagen eine Wüste herrscht und überhaupt nichts passiert. Rein von der Logik ausgeschlossen wäre eine solche Theorie ohne neue Teilchen bis hin zur Planck-Skala aber nicht. Diese Theorie könnte z.B. das jetzige Standardmodell sein, jedoch wäre dies aufgrund der bisher ausgeführten Überlegungen alles andere als befriedigend. Abgesehen davon hätte man dann mit der Higgsmasse immer noch einen kleinen Parameter in der Theorie, den man erklären müsste.<sup>4</sup> Dieser wäre dann aber radiativ stabil, sodass es kein wirkliches Hierarchieproblem im Sinne eines Feinabstimmungsproblems mehr gäbe. In diesem Sinne wäre es nicht korrekt zu sagen: „Das Standardmodell hat ein Hierarchieproblem“. (Im Übrigen ist diese Aussage sowieso problematisch, da das SM per Definition keine extrem schweren Teilchen enthält. Vielmehr ist es die *übergeordnete Theorie*, die es wegen der vielen Mängel des SM bei hohen Energien geben sollte, welche, wenn sie schwere Teilchen enthält und keinen Mechanismus zur Stabilisierung der elektroschwachen Skala bereitstellt, ein Hierarchieproblem hat. Man könnte dann auch sagen, der *standardmodellartige Higgs-Mechanismus* hat ein Hierarchieproblem.) Kleine Parameter in der Theorie kennt man auch z.B. schon von der Elektron-Yukawa-Kopplung („Flavor-Puzzle“). Es kam allerdings in der Physik bisher noch nie vor, dass über 16 Größenordnungen überhaupt keine Veränderung aufgetreten ist und zudem spricht vor allem das Argument der „großen Vereinheitlichung“ stark gegen dieses Wüstenszenario.

Es gibt also neben der am Anfang des Kapitels angesprochenen Motivation zur Er-

---

<sup>3</sup>bzw. Terme  $\sim \lambda_{UV}^2$

<sup>4</sup>Vom EFT Standpunkt würde man aus Gründen der „naturalness“ den Koeffizienten  $m^2$  des D=2-Operators  $\phi^2$  beim Cutoff  $M_{PL}^2$  erwarten.

weiterung des SM genügend Gründe nach Theorien zu suchen, die das Hierarchieproblem lösen. Es sei hier schon einmal eine radikale Möglichkeit angesprochen das HP zu lösen bzw. besser gesagt zu beseitigen. Bisher sind wir davon ausgegangen, dass  $M_{PL}$  wirklich eine fundamentale Skala ist. Wenn man jedoch diese Annahme fallenlässt und nur  $M_{EW}$  als Cutoff und einzige fundamentale Skala der Theorie beibehält, wäre das HP eliminiert. Die Higgsmasse würde keine großen Korrekturen erhalten und eine Quantengravitation, die schon bei  $M_{EW}$  ins Spiel kommen würde, könnte z.B. die UV-Divergenzen regulieren. Man würde  $M_{PL}$  nun als effektive Skala auffassen, deren enorme Größe man allerdings erklären sollte. Mit anderen Worten: Man müsste erklären, warum die Gravitation so schwach ist.



# Kapitel 4

## Lösungsansätze für das Hierarchieproblem in 4D

Kommen wir nun zu konkreten Möglichkeiten zur Lösung des Hierarchieproblems. Es sollen hier zunächst Modelle vorgestellt werden, die nicht auf die Existenz zusätzlicher Dimensionen angewiesen sind, und dann im Hauptteil der Arbeit höherdimensionale Modelle behandelt werden.

### 4.1 Supersymmetrie

Ein sehr populärer Ansatz zur Lösung des HP ist das Einführen einer neuen Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, der sogenannten Supersymmetrie (SUSY). In der minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells (MSSM) gibt es zu jedem SM-(Weyl)Fermion ein neues Boson, den sogenannten Superpartner. Analog gibt es zu jedem SM-Boson einen fermionischen Superpartner, sodass am Ende die Anzahl der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade gleich ist. Zusätzlich benötigt man ein zweites Higgs-Dublett. Im MSSM fordert man auch noch die Erhaltung der sogenannten R-Parität<sup>1</sup>, sodass Superpartner nur paarweise erzeugt werden können. Bei einer exakten SUSY sind die Massen der Teilchen und ihrer Superpartner gleich. Dies hat zur Folge, dass sich alle Korrekturen zur Higgsmasse, aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens in Boson- und Fermionschleifen, genau wegheben. Da man aber noch keine Superpartner der SM-Teilchen gefunden hat, muss SUSY gebrochen sein. Dies stellt jedoch kein Problem dar, solange die SUSY-Brechungsskala im Bereich der elektroschwachen Skala liegt:  $m_{soft} \sim M_{EW}$ . Eine solche „weiche“ Brechung wird durch relevante Operatoren in der Lagrangedichte erreicht. Dann sind die Korrekturen zur Higgsmasse gerade proportional zu  $m_{soft}^2$ . Falls SUSY das Hierarchieproblem lösen soll, müsste man also am LHC SUSY-Teilchen finden. Es gibt hier allerdings auch ein Problem der naturalness: Der (SUSY-)Higgs-Massenparameter  $\mu$  und die SUSY-Brechungsskala sind sehr klein im Vergleich zur Planck-Skala. Dies bezeichnet man als  $\mu$ -Problem. Es sei noch erwähnt, dass sich die Kopplungen der SM-Eichgruppen

---

<sup>1</sup> $R = (-1)^{2s+3B+L}$ , s: spin

bei  $\lambda_{GUT}$  treffen können, wenn man das Laufen der Kopplungskonstanten in supersymmetrischen Theorien berechnet (siehe Abb. 4.1). Des Weiteren verknüpft die SUSY-Algebra innere und äußere Symmetrien, und eine lokale SUSY ist deswegen prädestiniert für eine Eichtheorie der Gravitation (Supergravity). Eine Einführung in supersymmetrische Theorien findet sich in [9].

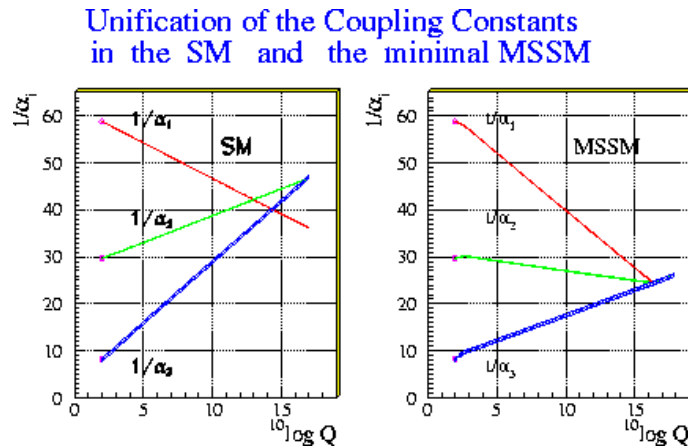


Abbildung 4.1: Vereinigung der Kopplungskonstanten (aus [10])

## 4.2 Composite-Modelle

Andere Ansätze zur Lösung des HP bieten Modelle, in denen kein fundamentaler Higgs-Skalar existiert, sondern dieser als Bindungszustand einer stark wechselwirkenden Theorie entsteht und so die elektroschwache Symmetriebrechung (EWSB) realisiert wird. Formfaktoren regularisieren dann das UV-Verhalten. Ein Beispiel hierfür wäre das Top-Quark-Kondensat ( $t\bar{t} \rightarrow H$ ), wobei hier auch natürlich erklärbar wäre, warum  $m_t$  im Bereich von  $M_{EW}$  liegt. Eine allgemeine, lange bekannte Theorie, die EWSB durch Kondensate neuer Fermionen erklärt, heißt Technicolor. Die Kondensate werden durch eine neue starke Wechselwirkung einer größeren Eichgruppe erzeugt. Im Falle des Top-Quark-Kondensates heißt die zugrundeliegende Theorie „Topcolor“ und es existieren noch weitere Composite-Higgs-Modelle. Die ursprünglichen Technicolor-Modelle sind allerdings schon weitgehend durch elektroschwache Präzisionsmessungen ausgeschlossen. Eine Übersicht zu solchen Modellen bietet [11].

## 4.3 Little-Higgs-Modelle

Ein ähnlicher Vorschlag, das Hierarchieproblem durch das Einführen einer neuen Symmetrie zu lösen, sind die Little-Higgs-Modelle [12]. Hierbei wird ein leichtes Higgs als Pseudo-



Goldstone-Boson einer bei der TeV-Skala gebrochenen erweiterten Symmetriegruppe realisiert.

Man kann sich noch mehr Modelle dieser Art vorstellen, die durch Einführen neuer Physik, typischerweise bei der TeV-Skala, versuchen das Hierarchieproblem zu lösen, indem sie zumindest diese Skala stabilisieren. Diese werden sich jedoch häufig von ihren grundlegenden Konzepten kaum von den bisher vorgestellten unterscheiden. Wir wollen uns nun mit interessanten Möglichkeiten beschäftigen, das HP durch das *Einführen zusätzlicher Dimensionen* zu lösen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Little-Higgs-Modelle können durch „Dimensional deconstruction“ auch als höherdimensionale Theorien interpretiert werden, jedoch ist diese Interpretation nicht notwendig.



## Teil II

# Modelle mit Zusatzdimensionen zur Lösung des Hierarchieproblems



# Kapitel 5

## Large Extra Dimensions und generelle Methoden

### 5.1 Motivation für Large Extra Dimensions

Das Hierarchieproblem hängt direkt mit der Schwäche der Gravitation zusammen, durch die man auf eine sehr große Planck-Skala schließt

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{PL}^2} \frac{1}{r}. \quad (5.1)$$

Nun ist es so, dass im Gegensatz zur elektroschwachen Skala, bei der die SM-Wechselwirkungen sehr gut überprüft wurden, die Planck-Skala experimentell überhaupt nicht erprobt ist. Die Gravitation wurde bei weitem nicht bis zu Skalen  $\frac{1}{M_{PL}} \sim 10^{-35} m$  getestet. Man bewegt sich hier vielmehr in einer Größenordnung von 0.1 mm. Die Interpretation von  $M_{PL}$  als fundamentale Skala geht davon aus, dass das Newton'sche Gravitationsgesetz (5.1) über weitere 31 Größenordnungen unverändert gültig bleibt. Es ist nur legitim, dies in Frage zu stellen. Aufgrund dieser Überlegung haben Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos und Gia Dvali (ADD) im Sinne der schon angesprochenen Eliminierung des HP eine Theorie aufgestellt, deren **einzige fundamentale Skala**  $M_{EW}$  ist [13]. Sie postulieren dazu die Existenz von zusätzlichen kompakten Raumdimensionen. Die Schwäche der Gravitation resultiert dann dynamisch, was im Folgenden illustriert werden soll.

Wir gehen von einer 4+n dimensionalen Raumzeit aus, deren n zusätzliche räumliche Dimensionen durch eine kompakte Mannigfaltigkeit  $M_n$  mit Volumen  $V_{(n)} \sim R^n$  beschrieben seien. Für die Felder müssen nun Randbedingungen an den Begrenzungen der Zusatzdimensionen festgelegt werden. Die Metrik im Vakuum sei die auf 4+n Dimensionen erweiterte Minkowski-Metrik

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - R^2 d\Omega_{(n)}^2, \quad (5.2)$$

wobei  $\Omega_{(n)}$  dem Linienelement der extradimensionalen Raumzeit entspricht. Die Signatur der Metrik ist in dieser Arbeit immer (+ - ... -). Da die Gravitation direkt mit der

Struktur der Raumzeit verwoben ist, muss diese natürlich in die zusätzlichen Dimensionen vordringen können. Für die restlichen Felder ist dies jedoch nicht notwendig.

Die fundamentale (Planck-)Skala in der erweiterten Raumzeit sei mit  $M_{PL}^{(4+n)}$  bezeichnet. Das Gravitationspotenzial zwischen zwei Testmassen, deren Abstand viel kleiner als die Ausdehnung der zusätzlichen Dimensionen ist, ergibt sich nun mittels des Gauß'schen Satzes zu

$$V^{4+n}(r) \sim \frac{m_1 m_2}{[M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (r \ll R). \quad (5.3)$$

Für Abstände, die viel größer als die Länge der Zusatzdimensionen sind, können die Flusslinien der Gravitation nicht in die Zusatzdimensionen eindringen, d.h. diese können nicht aufgelöst werden, und man erhält:

$$V^{4+n}(r) \sim \frac{m_1 m_2}{[M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2}} \frac{1}{R^n} \frac{1}{r} \quad (r \gg R). \quad (5.4)$$

Dies kann man mit dem vierdimensionalen Newton'schen Gravitationsgesetz (5.1) identifizieren und man erhält die Beziehung

$$M_{PL}^2 \sim [M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2} R^n. \quad (5.5)$$

Die uns wohl bekannte, jetzt effektive, Planck-Skala  $M_{PL}$  wird nun also aus einer fundamentalen Planck-Skala  $M_{PL}^{(4+n)}$  durch Multiplikation mit einem Volumenfaktor  $R^n$  erzeugt. Um das Hierarchieproblem zu lösen, setzen wir

$$M_{PL}^{(4+n)} \sim M_{EW} \quad (5.6)$$

und haben nun nur noch die elektroschwache Skala als fundamentale Skala. Die Schwäche der Gravitation resultiert jetzt geometrisch aus dem Volumen der Extradimensionen, in die sie eindringt. Man sieht an (5.5), dass die Gravitation in 4D gegenüber der höherdimensionalen Theorie geschwächt wird, falls

$$R \stackrel{!}{>} \frac{1}{M_{PL}^{(4+n)}} \sim \frac{1}{M_{EW}} \quad (5.7)$$

gilt. Dies ist Voraussetzung für die Lösung des HP in diesem Setup.

Man würde nun eine Abweichung der gravitativen Wechselwirkung vom Newton'schen Gesetz (5.1) für  $r < R$  erwarten, wo die Welt nun  $4+n$  dimensional wäre. Hier würde man jetzt die fundamentale Stärke der Gravitation sehen und die Hierarchie zwischen den Kräften würde verschwinden. Wir wollen später studieren, welchen „Radius“  $R$  wir in Abhängigkeit von der Anzahl der Extradimensionen erhalten, falls wir annehmen, dass die effektive Planck-Skala aus einer fundamentalen Skala  $M_{EW}$  erzeugt wird. Um keinen Widerspruch zum Experiment zu liefern, muss

$$R < 0.1 \text{ mm} \quad (5.8)$$

gelten.<sup>1</sup> Dies liefert eine Grenze für die Ausdehnung der Extradimensionen, die aber prinzipiell erstaunlich groß sein könnten, solange nur die Gravitation in sie vorzudringen vermag. Genau dies macht es möglich das HP zu lösen. Man nennt diese Szenarien aufgrund der möglichen erheblichen Ausdehnung der Zusatzdimensionen „Large Extra Dimensions“.

Extradimensionen wurden schon in den 1920ern von Theodor Kaluza [14] und Oskar Klein [15] eingeführt im Zuge des Versuchs Elektromagnetismus und Gravitation zu vereinigen. Die Möglichkeit, dass nur eine bestimmte WW in die neuen Dimensionen vordringt, wurde aber bis in die 90er Jahre nicht wirklich bedacht. Man schloss deshalb, wie gleich erläutert wird, auf eine natürliche Ausdehnung möglicher Extradimensionen von  $R \sim 1/M_{PL}$ , was jenseits aller Testbarkeit lag und auch bezüglich des HP keinen Nutzen zu haben schien (siehe (5.7)).

## 5.2 Matching

Um diesen Gedankengang nachzuvollziehen, wird zunächst die im Folgenden häufig gebrauchte Methode des „Matching“ einer höherdimensionalen Theorie auf eine effektive 4D-Theorie allgemein eingeführt. Man geht dabei meist von einer Wirkung in  $4+n$  Dimensionen aus. Wenn man sich nun z.B bei Energien befindet, die es nicht zulassen die kompaktifizierten Zusatzdimensionen aufzulösen oder aus anderen Gründen die höherdimensionale Theorie nicht direkt betrachtet wird, ist es sinnvoll im Wirkungsfunktional das Integral über die  $n$  kompaktifizierten Dimensionen auszuwerten. Man will sehen, wie die bekannte 4D-Welt aus der höherdimensionalen hervorgeht. Durch das Ausintegrieren erhält man eine vierdimensionale Theorie, die man mit der entsprechenden bekannten 4D-Wirkung vergleicht und so Relationen für die Felder bzw. Kopplungen erhält. Bei niedrigen Energien sollte die Theorie aussehen wie das Standardmodell mit den bekannten Kopplungen bzw. die vierdimensionale allgemeinen Relativitätstheorie. Deren Wirkungen sollten reproduziert werden können und den Niederenergielimes der kompletten Theorie bilden. Es sei darauf hingewiesen, dass die 4D-Theorie zwar oft prinzipiell „effektiv“ genannt wird, sie aber, wenn man sie nicht trunkiert (siehe Abschnitt 5.4), trotzdem völlig äquivalent zur höherdimensionalen Theorie ist. Die Lagrange*funktionen* sind identisch und die Physik ändert sich nicht durch das Ausintegrieren der Zusatzdimensionen. Eine Art Matching haben wir auch schon beim Vergleich des höherdimensionalen Gravitationsgesetzes mit dem Newton'schen durchgeführt. Auf dieselbe Relation kommt man, wenn man die Einstein-Hilbert-Wirkung in  $(4+n)$ -D aufstellt und die  $n$  kompaktifizierten Dimensionen ausintegriert, was nun demonstriert werden soll. Zudem wird das Matching einer Eichkopplung durchgeführt.

---

<sup>1</sup>Wir gehen hier davon aus, dass alle Extradimensionen die gleiche Ausdehnung haben. Andere Szenarien ändern nichts an der prinzipiellen Argumentation.

## Gravitation

Wir gehen aus von

$$S_{4+n} = -[M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2} \int d^{4+n}x \sqrt{g^{(4+n)}} R^{(4+n)}. \quad (5.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\sqrt{g^{(4+n)}}$  die Wurzel aus der Determinante der 4+n dimensionalen Metrik. Die Potenz der fundamentalen Skala  $M_{PL}^{(4+n)}$  ergibt sich aus der Forderung, dass die Wirkung in natürlichen Einheiten ( $\hbar = c = 1$ ) dimensionslos sein muss. Man beachte, dass der Ricci-Skalar  $R^{(4+n)}$  für eine beliebige Anzahl von Dimensionen immer Massendimension D=2 hat. Die Metrik (5.2) wurde zum Zwecke des Matchings durch 4D-Fluktuationen ergänzt. Es gilt dann  $R^{(4+n)} = R^{(4)}$  und

$$S_{4+n} = -[M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2} \underbrace{\int d\Omega_{(n)} R^n}_{V_{(n)}} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)}. \quad (5.10)$$

Dies vergleicht man mit

$$S_4 = -M_{PL}^2 \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)} \quad (5.11)$$

und erhält schließlich wieder den bekannten Zusammenhang (5.5) über den Volumenfaktor  $R^n$ :

$$M_{PL}^2 \sim [M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2} R^n.$$

## Eichkopplung

Nun wollen wir das Matching für eine generische Eichkopplung durchführen. Wir wählen hier eine Notation, in der die Eichkopplung in die Definition des Eichfeldes aufgenommen wird:  $A_N \rightarrow gA_N$ .<sup>2</sup> Der Feldstärketensor ist dann  $F_{MN}^a = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a - i\epsilon^{abc} A_N^b A_M^c$  und hat in dieser Notation für beliebige n Massendimension D=2, da nun  $D[A_N] = D[\partial_N]$  gelten muss. Im Niederenergielimes ( $E \ll 1/R$ ) gilt  $\partial_N A_M \equiv 0$  für  $N \geq 4$ .<sup>3</sup> Man kann für diesen deshalb das Integral über die Zusatzdimensionen trivial ausführen. Aus Vergleich von

$$\begin{aligned} S_{4+n} &= -\frac{1}{4} \int d^{4+n}x \sqrt{g^{(4+n)}} \frac{1}{g_{(4+n)}^2} F_{MN} F^{MN} \\ &\stackrel{E \ll 1/R}{=} -\frac{1}{4} \int d\Omega_{(n)} R^n \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \frac{1}{g_{(4+n)}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

<sup>2</sup>Große lateinische Buchstaben indizieren die komplette Raumzeit:  $M, N = 0, \dots, 3+n$  während  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ .

<sup>3</sup>Dies liegt daran, dass der Impuls in den Zusatzdimensionen quantisiert ist und die Energie nicht zur Anregung ausreicht, siehe dazu auch Abschnitt 5.4.



mit

$$S_4 = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \frac{1}{g_{(4)}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.13)$$

erhält man für die effektive 4D-Eichkopplung

$$\frac{1}{g_{(4)}^2} \sim \frac{R^n}{g_{(4+n)}^2}. \quad (5.14)$$

Die höherdimensionale Kopplung erhält eine negative Massendimension, was jedoch kein Problem darstellt, da man auch die volle 5D-Theorie als effektive Theorie ansehen sollte, die wie schon angesprochen z.B. von einer Quantengravitation komplettiert wird.

Für die dimensionsbehaftete Kopplung in (5.14) sollte aus Gründen der naturalness gelten:

$$g_{(4+n)} \sim \frac{1}{[M_{PL}^{(4+n)}]^{n/2}}. \quad (5.15)$$

Mit (5.5) und (5.14) ergibt sich nun der Zusammenhang:

$$R \sim \frac{1}{M_{PL}} g_{(4)}^{-\frac{n+2}{n}}, \quad (5.16)$$

woraus man auf eine Ausdehnung der Extradimensionen im Bereich der Planck-Länge schloss.

Wenn man jedoch davon absieht, dass alle WW gleich in die Extradimensionen propagieren müssen, also unterschiedliche extradimensionale Ausdehnungen  $R_{grav}$  für die Gravitation und  $r_{SM}$  für die restlichen WW ansetzt, erhält man

$$\frac{r_{SM}^{n+2}}{R_{grav}^n} \sim \frac{1}{M_{PL}^2} g_{(4)}^{-\frac{2(n+2)}{n}}, \quad (5.17)$$

sodass größere Zusatzdimensionen möglich sind und eine Lösung für das Hierarchyproblem konstruiert werden kann. Insbesondere gilt dies, falls die SM-Felder gar nicht in die Extradimension eindringen können. Für den Fall, dass sie prinzipiell dazu in der Lage sind, folgen nun einige Kommentare:

## Eindringtiefe des SM

Die SM-Wechselwirkungen sind bis  $O(100 \text{ GeV})$  sehr gut getestet und verhalten sich vierdimensional. Die SM-Felder müssen deshalb auf einer Untermannigfaltigkeit lokalisiert sein, deren Ausdehnung in die Zusatzdimensionen höchstens  $r_{SM} \sim [100 \text{ GeV}]^{-1}$  betragen kann. Solch eine Lokalisierung könnte z.B. dynamisch durch topologische Defekte (Stringtheorie,...) geschehen. Genauer gesagt sollte die Ausdehnung, falls die SM-Teilchen prinzipiell in die Extradimension eindringen können,  $\frac{1}{M_{PL}^{(4+n)}} \sim \frac{1}{M_{EW}}$  betragen. Eine größere Ausdehnung

würde, zumindest falls viele Extradimensionen vorhanden sind, auch zu einer ungewünschten Schwächung der SM-Wechselwirkungen führen. Eine kleinere Ausdehnung als  $\sim \frac{1}{M_{EW}}$  würde, wegen  $\frac{1}{g_{(4)}^2} = r_{SM}^n M_{EW}^n$  (siehe (5.14), mit  $M_{EW}$  als fundamentaler Skala), rein formal zu einer Stärkung der SM-Wechselwirkungen gegenüber der höherdimensionalen Theorie führen. Eine kleinere Ausdehnung als die fundamentale Skala der Theorie wäre jedoch auch prinzipiell nicht sinnvoll. Wir halten also fest, dass gelten sollte

$$r_{SM} = \frac{1}{M_{EW}} \quad (5.18)$$

und somit (vgl. (5.7))  $r_{SM} < R_{grav}$ , was auch sinnvoll ist, da ja die Gravitation geometrisch gegenüber den anderen WW geschwächt werden soll.

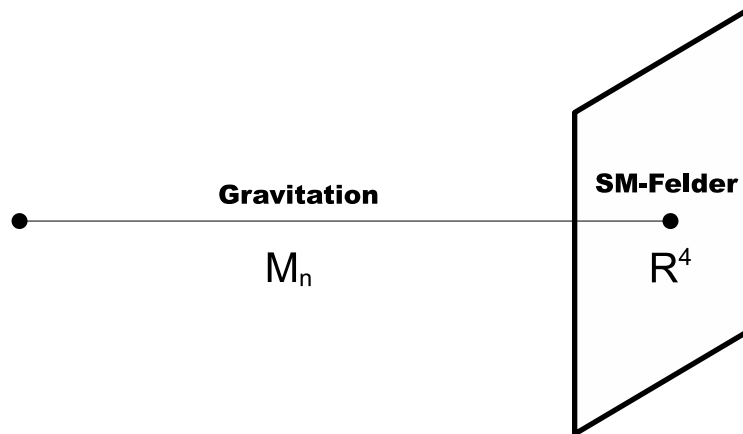


Abbildung 5.1: Lokalisierung der SM-Felder in der Raumzeit

### 5.3 Größe der Extradimensionen

Im Folgenden wollen wir die mögliche endliche Ausdehnung der SM-Felder in die Zusatzdimensionen, soweit nicht anders erwähnt, wieder vernachlässigen. Die SM-Felder seien an einer Begrenzung der Raumzeit auf einer sogenannten „(3-)Brane“ lokalisiert. Dabei handelt es sich um eine vierdimensionale Untermannigfaltigkeit, welche eine Verallgemeinerung einer Membran auf drei Raum- und eine Zeitdimension darstellt. Wir wollen diese Brane im folgenden SM-Brane nennen. Wenden wir uns nun wieder dem Radius der Extradimensionen  $R_{grav} \equiv R$  zu. Wir wollen studieren, wie groß dieser, in Abhängigkeit von der Anzahl der Extradimensionen, sein muss, um die Planck-Skala aus der elektroschwachen Skala zu erzeugen und so das HP zu beseitigen. Es gilt nun mit (5.5) und der Beziehung

200 MeV fm  $\approx$  1:

$$R \sim M_{PL}^{\frac{2}{n}} [M_{EW}]^{-\frac{2}{n}-1} \sim 2 \cdot 10^{\frac{32}{n}-19} m \times \left[ \frac{TeV}{M_{EW}} \right]^{\frac{2}{n}+1}, \quad (5.19)$$

wobei wir  $M_{PL}^{(4+n)} \sim M_{EW}$  gesetzt haben.

Für  $n=1$  ergibt sich  $R \sim 10^{13} m$ . Falls also genau eine zusätzliche Dimension existiert, müsste diese, um das HP zu lösen, eine Ausdehnung haben, die in etwa der unseres Sonnensystems entspricht (ca.  $7 \cdot 10^{12} m$ ), was sicherlich ausgeschlossen ist.

Falls mehrere Extradimensionen existieren sollten, ergeben sich jedoch interessante Möglichkeiten.

Für  $n=2$  erhält man  $R \sim 1 mm$ , was im Bereich der aktuellen Experimente liegt und nicht realisiert zu sein scheint.

Umgekehrt kann man auch von einem maximal möglichen Radius ausgehend eine untere Grenze für die fundamentale Skala  $M_{PL}^{(4+n)}$  erhalten. Aus  $R \leq 0.1 mm$  erhält man für  $n=2$ :  $M_{PL}^{(6)} \geq 4TeV$ , was keine wirkliche Hierarchie darstellen würde. Allerdings gibt es für  $n=2$  noch stärkere Limits aus der Astrophysik.

Für  $n \geq 3$  ergibt sich  $R \leq 10^{-8} m$ , wofür in näherer Zukunft keine direkten Tests möglich sind.

Diese Szenarien lösen scheinbar das HP. Wenn man die Situation jedoch genau betrachtet, stellt man fest, dass es sich hierbei nicht um eine komplett zufriedenstellende Lösung, sondern eher um eine Verlagerung handelt. Statt der Frage, warum  $M_{PL}$  so viel größer als  $M_{EW}$  ist, muss man sich nun fragen, warum die Zusatzdimensionen so viel größer sind als ihr natürlicher Wert von  $\frac{1}{M_{EW}}$ :

$$\frac{R}{(1/M_{EW})} \sim \left[ \frac{M_{PL}}{M_{EW}} \right]^{\frac{2}{n}}. \quad (5.20)$$

Man hat nun allerdings nicht mehr einen kleinen Parameter in der Lagrangedichte, der zudem nicht radiativ stabil war, sondern einen kleinen Parameter in der Lösung von fundamentalen Gleichungen was eher akzeptabel ist und in der Natur häufiger vorkommt.

Einen vielversprechenden Ausweg aus dem Problem stellen Theorien mit einer komplizierteren Metrik dar, worauf ab Kapitel 6 eingegangen wird. Eine weitere Möglichkeit im Rahmen des bisher behandelten Modells sieht man, wenn man den Limes  $n \rightarrow \infty$  bildet. In diesem Limes geht  $R \rightarrow 1/M_{EW}$ . In diesem Fall wäre die Ausdehnung gerade durch die Skala der Theorie gegeben. Um das HP zu lösen, müsste  $R$  nur infinitesimal größer als  $1/M_{EW}$  sein, dann kann jede beliebige effektive Skala aus der elektroschwachen erzeugt werden. Die SM-Felder könnten dann auch praktisch die kompletten Extradimensionen ausfüllen. Dieses Szenario nennt man „Universal Extra Dimensions“ [16].

Was die Anzahl und Entstehung der Zusatzdimensionen und auch die Lokalisierung gewisser Felder auf Untermannigfaltigkeiten angeht, liefert die hier behandelte Theorie keine Antworten. Wie schon erwähnt handelt es sich um eine effektive Theorie, die bei  $M_{EW}$  UV-ergänzt werden muss. Diese UV-Ergänzung sollte dann diese Fragen beantworten. Ein

Kandidat dafür wäre die Stringtheorie, z.B. könnte man sich eine 11D-Superstringtheorie mit sieben kompaktifizierten Dimensionen vorstellen, von denen z.B. zwei sich im sub-Millimeterbereich bewegen, und die anderen fünf sehr viel kleiner sind, oder aber im Sinne der Universal Extra Dimensions alle sieben Zusatzdimensionen mit  $R \sim 1/M_{EW}$ .

Ein Problem, welches durch den niedrigen Cutoff der Theorie entsteht, ist die Tatsache, dass nun höherdimensionale Operatoren, die z.B. zu Protonzerfall und Flavor Changing Neutral Currents (FCNC) führen können, nicht mehr ausreichend unterdrückt sind. Außerdem werden nun generisch große Neutrinomassen vorhergesagt. Man braucht einen Mechanismus, der diese Probleme behebt. Eine Möglichkeit ist das sogenannte „Split fermions“-Szenario, bei dem die Fermionen an unterschiedlichen Stellen in den Extradimensionen lokalisiert sind und die Effekte durch einen kleinen Wellenfunktionsüberlapp unterdrückt werden. Des Weiteren sei betont, dass die Gravitation aufgrund von  $M_{PL}^{(4+n)} \sim TeV$  nun schon im TeV-Bereich stark koppelt und man in Reichweite des LHC Quanteneffekte der Gravitation, wie z.B. Produktion von micro black holes, erwartet. Eine mögliche Grand-Unification sollte jetzt schon im TeV-Bereich passieren (siehe hierzu [17], Abschnitt 4.4).

## 5.4 Kaluza-Klein-Zerlegung und effektive 4D-Theorie

In diesem Abschnitt soll auf die für das Matching oft benutzte Kaluza-Klein-Zerlegung (KK-Zerlegung) von höherdimensionalen Feldern eingegangen werden. Wenn man eine Theorie betrachten will, bei der gewisse kompakte Dimensionen, mit Koordinaten  $y^i$ , ausintegriert sein sollen, ist es sinnvoll eine Entwicklung der Felder nach Funktionen dieser Koordinaten durchzuführen. Man erreicht so eine Zerlegung der Felder in Anteile, die nur von den Koordinaten der auszuintegrierenden Dimensionen abhängen und Anteile, die von den restlichen Koordinaten abhängen und kann dann prinzipiell das Integral ausführen.<sup>4</sup> Wir wollen zur Illustration im Folgenden ein **Skalarfeld** in (4+1)-D studieren. Das Prinzip ist für Teilchen mit anderem Spin genau dasselbe. Auf diese wird im Rahmen der Randall-Sundrum-Modelle genauer eingegangen (Teil III). Wir kompaktifizieren die Extradimension einfach auf einem Intervall  $[0, R]$ , für das wir dann Randbedingungen für die Felder festlegen müssen. Die generische Wirkung in 5D hat folgende Gestalt:

$$S_5 = \frac{1}{2} \int d^4x \int_0^R dy \partial_M \Phi(x, y) \partial^M \Phi(x, y) - m_5^2 \Phi^2(x, y). \quad (5.21)$$

Für die KK-Zerlegung wählen wir uns einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen  $\{f_n(y)\}$  auf  $[0, R]$  mit:

$$\int_0^R dy f_n(y) f_m(y) = \delta_{nm} \quad (5.22)$$

---

<sup>4</sup>In Abschnitt 5.2 haben wir nur den Niederenergielimes betrachtet und brauchten deshalb keine KK-Zerlegung.

und schreiben:

$$\Phi(x, y) = \sum_n \phi_n(x) f_n(y). \quad (5.23)$$

Wir wollen nun die Integration über die zusätzliche Dimension ausführen. Nach Einsetzen der Zerlegung in die Wirkung, Ausnutzen der Orthonormalität und einer partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sum_n \{ \partial_\mu \phi_n(x) \partial^\mu \phi_n(x) - m_5^2 \phi_n^2(x) \} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \int_0^R dy \sum_{m,n} \phi_m(x) \phi_n(x) f_m(y) \partial_y^2 f_n(y) \\ &- \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{m,n} \phi_m(x) \phi_n(x) (f_m(R) f_n'(R) - f_m(0) f_n'(0)). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Man vergleicht dies nun mit der Wirkung für ein 4D-Skalarfeld und erhält dann mit den Relationen<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \partial_y^2 f_n(y) &= -a_n^2 f_n(y) \\ \text{mit } f_n(y) &= 0 \vee f_n'(y) = 0 \quad \text{für } y = 0, R \end{aligned} \quad (5.25)$$

die 4D-Wirkung:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sum_n \{ \partial_\mu \phi_n(x) \partial^\mu \phi_n(x) - m_n^2 \phi_n^2(x) \} \\ &\quad \text{mit } m_n^2 = m_5^2 + a_n^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Man sieht nun, wie ein 5D-Skalarfeld äquivalent zu unendlich vielen 4D-Skalarfeldern verschiedener Masse ist.<sup>6</sup> Diese Zerlegung nennt man *Kaluza-Klein-Zerlegung*. Die entstehende Kaskade massiver 4D-Felder nennt man KK-Tower. Man kann sich das Ganze analog zur „klassischen“ Quantenmechanik vorstellen, als die diskreten Energieniveaus eines im Kastenpotenzial (kompaktifizierte Extradimension) eingesperrten Teilchens. Die verschiedenen Anregungen  $\phi_n(x)$  bezeichnet man als KK-Moden. Die **Trunkierung** auf  $n = 0$  entspricht der **effektiven Niederenergiethorie** auf Baumgraphenniveau. Eine Lösung für das *Profil* der Felder in der Extradimension  $f_n(y)$  (5.25) ist durch eine komplexe e-Funktion bzw. allgemein durch eine beliebige Überlagerung von sinus und cosinus gegeben:

$$f_n(y) = c_n \cos(a_n y) + d_n \sin(a_n y). \quad (5.27)$$

<sup>5</sup>Die orthogonalen Funktionen  $f_n$  werden als Eigenfunktionen des hermiteschen Operators  $\partial_y^2$  konstruiert.

<sup>6</sup>Dass man in 4D unendlich viele Felder zur äquivalenten Beschreibung braucht, ist auch leicht einzusehen, da mit der Zusatzdimension unendlich viele Freiheitsgrade ausintegriert werden.

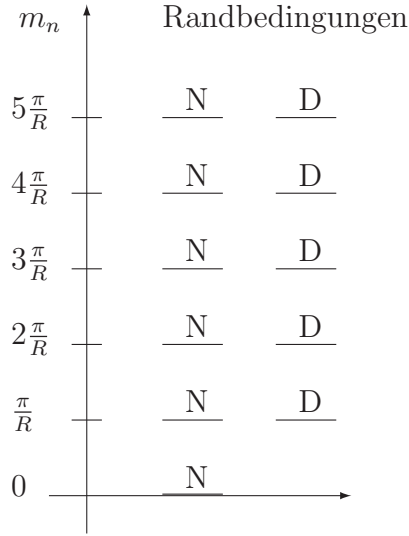


Abbildung 5.2: KK-Spektrum eines masselosen 5D-Teilchens

Man hat nun die Wahl zwischen  
Dirichlet-Randbedingungen:  $f_n(0) = f_n(R) = 0$

$$\Rightarrow c_n = 0; a_n = \frac{n\pi}{R}; n \in \mathbb{N} \tag{5.28}$$

und Neumann-Randbedingungen:  $f'_n(0) = f'_n(R) = 0$

$$\Rightarrow d_n = 0; a_n = \frac{n\pi}{R}; n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.29}$$

Durch die Randbedingungen sind nun auch die Massen der 2-fach entarteten KK-Anregungen festgelegt (siehe Abb. 5.2). Die Nullmode, womit die niedrigste KK-Mode  $f_0(y)$  (mit  $a_0 = 0$ ) gemeint sei, ungeachtet dessen ob sie eine fundamentale Masse  $m_5$  besitzt, hat wie man sieht ein flaches Profil

$$f_0(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{R}}. \tag{5.30}$$

Falls die Nullmode masselos ist ( $m_5 = 0$ ), gibt es ein äquidistantes Spektrum mit

$$m_n = n \frac{\pi}{R}. \tag{5.31}$$

Dies gilt auch für Gravitonen, mit deren Phänomenologie wir uns nun zum Abschluss des Kapitels über Large Extra Dimensions noch etwas beschäftigen wollen.

## 5.5 Phänomenologie in Large Extra Dimensions

Gravitonen sind die einzigen Felder, die im ursprünglichen ADD-Modell in die Extra-dimension propagieren, deshalb ist es interessant, sie genauer zu studieren. Sie koppeln an den Energie-Impuls-Tensor der SM-Teilchen.<sup>7</sup> Die Graviton-Nullmode hat ein Profil  $f_0(y) \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$ , sodass man die Schwäche der Gravitation auch durch den kleinen Überlapp der Graviton-Wellenfunktion mit der SM-Brane erklären kann, welcher die Kopplung bestimmt. Als Teilchenspektrum in ADD hat man in 4D dann die bekannten SM-Teilchen, eine masselose Graviton-Nullmode sowie eine Kaskade massiver KK-Gravitonen. Diese koppeln alle mit  $\frac{1}{M_{PL}}$  an SM-Teilchen. Wir nehmen ab jetzt wieder die Existenz von  $n$  Zusatzdimensionen an, was qualitativ keine Änderung der Betrachtungen des letzten Abschnitts zur Folge hat.

### Gravitonemission

Wenn man nun nach der Größe neuer Effekte durch die KK-Gravitonen fragt, kann man zunächst an Gravitonemission denken und sollte deshalb untersuchen, wie viele Moden bei momentanen Beschleunigerenergien kinematisch verfügbar sind. Mit (5.19) erhalten wir

$$\Delta m \sim \frac{1}{R} \sim 10^{19-\frac{32}{n}} \frac{1}{m} \sim 10^{12-\frac{32}{n}} eV, \quad (5.32)$$

sodass man für eine nicht zu große Anzahl von Zusatzdimensionen bei heutigen Beschleunigerenergien ein praktisch kontinuierliches Spektrum von Gravitonen erwartet. Die Anzahl möglicher Graviton-Endzustände ergibt sich zu  $\left(\frac{E}{\Delta m}\right)^n \sim (ER)^n$  (vgl. [13]), sodass wir mit (5.5) eine grobe Abschätzung für den Wirkungsquerschnitt für Gravitonemission erhalten:

$$\sigma \sim \frac{1}{M_{PL}^2} (ER)^n \sim \frac{E^n}{[M_{PL}^{(4+n)}]^{n+2}}. \quad (5.33)$$

Bei Schwerpunktsenergien in der Größenordnung von  $M_{EW}$  erhält man also

$$\sigma \sim \frac{1}{M_{EW}^2}, \quad (5.34)$$

was im Bereich typischer Wirkungsquerschnitte bei diesen Energien liegt und nicht vernachlässigt werden kann. Die Größe des Effekts wird durch die enorme Anzahl verfügbarer Gravitonmoden verursacht. Gravitonen werden im Experiment aufgrund ihrer geringen Wechselwirkung als missing energy auftreten. Das würde z.B. beim LHC zu dem charakteristischen Ereignis eines einzigen Jets gegen missing energy führen, bzw. bei einem  $e^+e^-$ -Collider zu einem Photon gegen missing energy:

$$\begin{aligned} e^+e^- &\rightarrow \gamma + E_{miss} \\ p\bar{p} &\rightarrow jet + E_{miss}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

<sup>7</sup>Wir beschränken uns hier auf den Spin-2-Anteil, welcher im linken oberen Block der  $(4+n) \times (4+n)$ -Matrix des Bulk-Gravitons anzusiedeln ist (siehe [18]).

### Limits aus Collider-Experimenten

Aus Vergleich von LEP 2- bzw. Tevatron-Daten mit der berechneten Rate für Gravitonemission kann man Constraints für die fundamentale Planck-Skala  $M_{PL}^{(4+n)}$  bzw. den Radius der Extradimensionen erhalten. Mirabelli, Perelsetin und Peskin [19] haben diese Analyse durchgeführt<sup>8</sup> und erhielten für  $n=2$  mit 95 % CL:

$$\begin{aligned} \text{LEP 2: } M_{PL}^{(6)} &> 1.2 \text{ TeV } (R < 0.48 \text{ mm}) \\ \text{Tevatron: } M_{PL}^{(6)} &> 0.75 \text{ TeV } (R < 1.1 \text{ mm}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dieses Limit könnte durch den LHC in den Bereich von 4 TeV verbessert werden. Für  $n=4$  bzw. 6 sind die angegebenen Limits schwächer. Die Limits aus Colliderexperimenten können also momentan kein Szenario für die Anzahl der Extradimensionen zur Lösung des HP ausschließen.

### Astrophysikalische Constraints

Stärkere Limits kann man aus der Analyse der Supernovadaten von SN1987A erhalten. Gravitonen können wie Neutrinos oder Axionen Energie wegtragen und so zu einem beschleunigten Abkühlen der Supernova führen. Die gute Übereinstimmung des gemessenen Neutrinoefflusses mit der theoretischen Vorhersage für Typ-II-Supernovae setzt eine obere Grenze an die Gravitonemissionsrate. Daraus folgt mit Hilfe der theoretisch berechneten Rate eine untere Schranke für  $M_{PL}^{(4+n)}$ . Cullen und Perelstein haben eine Analyse dieser Art durchgeführt [20]. Sie betrachten als dominanten Gravitonemissionsprozess die „Gravi-Strahlung“

$$N + N \rightarrow N + N + G \quad (5.37)$$

und modellieren die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch ein-Pion-Austausch. Aufgrund der im Vergleich zu Beschleunigerenergien relativ geringen Kerntemperatur der Supernova (30-70 MeV), sind starke Limits nur für  $n \leq 4$  zu erwarten, da ansonsten das KK-Massensplitting (5.32) in den Bereich der verfügbaren Energie kommt und nur noch wenige Moden emittiert werden können. Man erhält:

$$\begin{aligned} M_{PL}^{(6)} &\geq 50 \text{ TeV}, & n &= 2 \\ M_{PL}^{(7)} &\geq 4 \text{ TeV}, & n &= 3 \\ M_{PL}^{(8)} &\geq 1 \text{ TeV}, & n &= 4. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die größte Unsicherheit kommt durch die nicht genau bekannte Temperatur im Kern der Supernova. Die Autoren nehmen hier konservativerweise  $T=30$  MeV an. Mit realistischeren Annahmen sind noch stärkere Limits an  $M_{PL}^{(4+n)}$  erzielbar. Für  $n=2$  ist demnach eine fundamentale Planck-Skala im Bereich von  $M_{EW}$  durch die Supernovadaten praktisch ausgeschlossen. Für größere  $n$  wäre dieses Szenario durchaus möglich.

<sup>8</sup>Vom Tevatron wurde eine Analyse der ersten  $4.7 \text{ pb}^{-1}$  durch die CDF-Kolaboration benutzt und für die Wirkungsquerschnitte wurden Rechnungen in niedrigster Ordnung der Störungstheorie verwendet.



Weil das ADD-Modell wie schon erläutert wegen  $R \gg \frac{1}{M_{EW}}$  immer noch eine nichtverstandene Hierarchie hat, wollen wir uns nun für den Rest der Arbeit einer sehr attraktiven Möglichkeit zuwenden, die eine wirkliche Lösung des Hierarchieproblems anbietet und nur auf die Existenz einer einzigen kompakten Extradimension angewiesen ist. Es handelt sich hierbei um das Randall-Sundrum(RS)-Modell.



# Kapitel 6

## Das Randall-Sundrum-Modell

Lisa Randall und Raman Sundrum schlugen 1999 ein Modell in einer fünfdimensionalen Raumzeit vor, welches das Hierarchieproblem durch eine nichttriviale Geometrie eben dieser lösen kann [21]. Das Modell wird in diesem Kapitel in seiner ursprünglichen Form eingeführt und analysiert (siehe auch [18, 22]). In Abschnitt 6.1 werden die Grundlagen behandelt. In 6.2 wird gezeigt, dass die RS-Metrik die Einsteingleichungen löst und sie wird dadurch genauer spezifiziert. Abschnitt 6.3 beschäftigt sich mit der Gravitation in RS. Es wird demonstriert, wie die effektive vierdimensionale Planck-Skala aus der 5D-Planck-Skala hervorgeht und wie die effektive 4D kosmologische Konstante durch die Wahl des Ansatzes für die Metrik verschwindet. In 6.4 wird erläutert, wie RS das Hierarchieproblem löst, in 6.5 werden erste phänomenologische Konsequenzen studiert und zum Abschluss des Kapitels beschäftigt sich Abschnitt 6.6 mit der Stabilisierung des Radius der Zusatzdimension.

### 6.1 Grundlagen

Das RS-Modell basiert auf einer fünfdimensionalen Raumzeit  $R^4 \times M$  mit einer nichtfaktorisierenden Metrik

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - r^2 d\phi^2. \quad (6.1)$$

Längen im vierdimensionalen Minkowskiraum  $R^4$  ( $\phi = const.$ ), dessen Koordinaten wie gewohnt mit  $x^\mu$  bezeichnet seien, werden nun mit einem sich entlang der Extradimension exponentiell ändernden Faktor reskaliert. Man kann hier schon erahnen, dass es gerade die Präsenz eines solchen Faktors ist, welche die Hierarchie zwischen den beobachteten Skalen  $M_{EW}$  und  $M_{PL}$  erklärt. Die Metrik ist so angesetzt, dass sie 4D-Poincaréinvarianz bezüglich  $x^\mu$  respektiert. Die Zusatzdimension, deren Koordinate durch  $\phi$  gegeben ist, kompaktifizieren wir auf einem sogenannten „Orbifold“  $M = S^1/Z_2$ . Dies entspricht einem Kreis mit Radius  $r$ , bei dem gegenüberliegende Punkte identifiziert werden (siehe Abb. 6.1).

$$(x^\mu, \phi) \Leftrightarrow (x^\mu, -\phi), \quad \phi \in [-\pi, \pi] \quad (6.2)$$

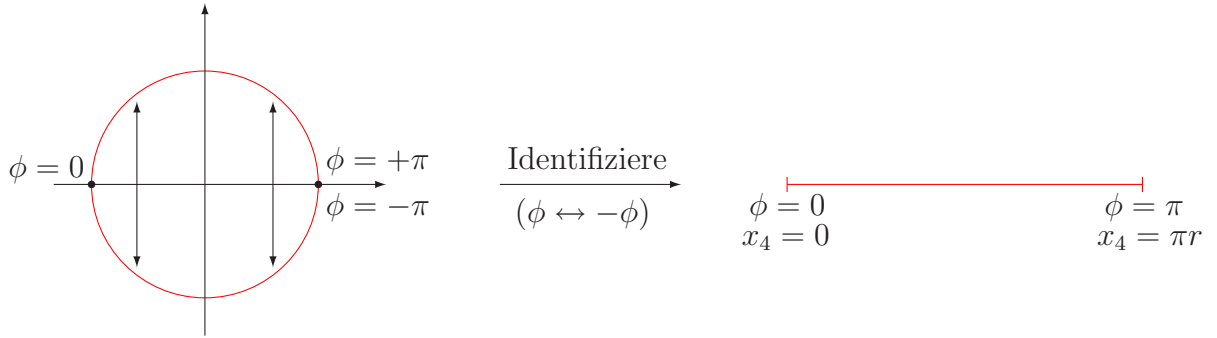


Abbildung 6.1: Orbifold

Man erhält also effektiv ein Intervall der Länge  $\pi r$ . Für das komplette Intervall  $[-\pi r, \pi r]$  gelten periodische Randbedingungen. Die Felder müssen an identifizierten Punkten nur gleich sein bis auf eine Symmetrietransformation, die die Wirkung invariant lässt. Man definiert deshalb eine Paritätsoperation  $Z$  auf dem Orbifold, die  $Z_2$ -Parität, unter der die Felder gerade oder ungerade sein können ( $Z^2 = id$ ):

$$A(x^\mu, -\phi) = ZA(x^\mu, \phi) = \pm A(x^\mu, \phi).$$

An den Fixpunkten  $\phi = 0, \pi$  seien als Begrenzung der 5D-Raumzeit zwei 3-Branes lokalisiert, deren Ausdehnung entlang der  $x^\mu$ -Richtungen verlaufe. Auf diesen können nun vierdimensionale Feldtheorien definiert werden. Die Brane bei  $\phi = 0$  wird mit UV- bzw. Planck-Brane bezeichnet, die bei  $\phi = \pi$  mit IR- bzw. TeV-Brane. Die Rechtfertigung dieser Namensgebung wird später ersichtlich werden. Die komplette Raumzeit zwischen den beiden Branen nennt man „Bulk“. Es reicht aufgrund der Orbifoldsymmetrie ( $\phi \leftrightarrow -\phi$ ) aus, die Felder nur auf  $\phi \in [0, \pi]$  zu betrachten. Die vierdimensionale Metrik auf den Branen ergibt sich durch Auswerten der Bulk-Metrik an den gegebenen Positionen:

$$g_{\mu\nu}^{UV}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0), \quad g_{\mu\nu}^{IR}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi), \quad (6.3)$$

wobei  $G_{MN}$  der 5D-Metrik aus (6.1) entspricht.

Im ursprünglichen RS-Modell dringt nur die Gravitation in die Zusatzdimension vor, was ausreicht, um das Hierarchieproblem zu lösen, und deshalb geht man von der folgenden

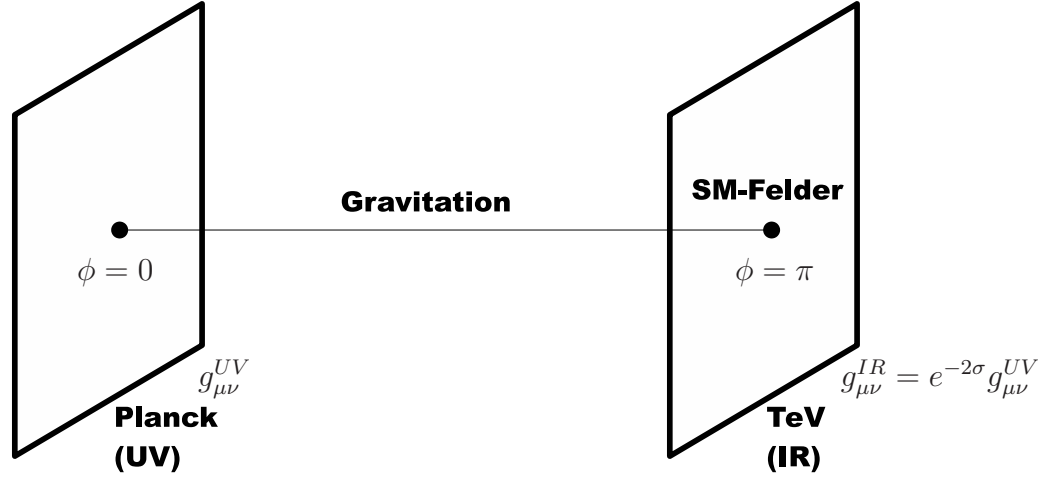


Abbildung 6.2: Randall-Sundrum-Setup

generischen und zunächst klassischen Wirkung aus<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
 S &= S_{bulk} + S_{UV} + S_{IR} \\
 S_{bulk} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{G} \{-\Lambda - 2M^3 R\} \\
 S_{UV} &= \int d^4x \sqrt{-g^{UV}} \{\mathcal{L}_{UV} - V_{UV}\} \\
 S_{IR} &= \int d^4x \sqrt{-g^{IR}} \{\mathcal{L}_{IR} - V_{IR}\}.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

$M$  sei die fundamentale Skala der Theorie  $M \equiv M_{PL}^{(5)}$ ,  $\Lambda$  ist die 5D kosmologische Konstante und  $\sqrt{G}$  ist wieder die Wurzel aus der Determinante der Metrik (6.1). Im Gegensatz zum ADD-Szenario wird hier der Effekt lokalisierter Energiedichten auf den Branes,  $V_{UV,IR}$ , in Betracht gezogen und wie wir sehen werden, zeichnen genau diese dafür verantwortlich eine nichttriviale Metrik zu ermöglichen und so ein neues Szenario zur Lösung des HP zu schaffen. Das SM sei bis auf weiteres auf der IR-Brane lokalisiert und wir nennen diese deshalb auch SM-Brane.

<sup>1</sup>In [21] wurde eine andere Vorzeichenkonvention für die Metrik gewählt, deswegen hat der Ricci-Skalar dort ein positives Vorzeichen.

## 6.2 Lösung der Einsteingleichungen

Wir betrachten das Modell zunächst im Vakuum und erhalten die folgenden Einsteingleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{G} \left( R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R \right) &= \frac{1}{4M^3} [\Lambda \sqrt{G} G_{MN} \\ &+ V_{IR} \sqrt{-g^{IR}} g_{\mu\nu}^{IR} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \\ &+ V_{UV} \sqrt{-g^{UV}} g_{\mu\nu}^{UV} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi)] \end{aligned} \quad (6.5)$$

(6.1) ist ein allgemeiner Ansatz für eine Lösung dieser Gleichungen, der 4D-Poincaréinvarianz respektiert. Da die Natur einen solchen Ansatz nicht verbietet, ist es nur natürlich, diesen statt einer strikt faktorisierenden Metrik zu wählen. Wir wollen (6.1) nun in (6.5) einsetzen und  $\sigma(\phi)$  bestimmen. Zunächst bestimmen wir die Christoffelsymbole<sup>2</sup>

$$\Gamma^K{}_{LM} = \frac{1}{2} G^{KJ} (G_{JL,M} + G_{JM,L} - G_{LM,J}). \quad (6.6)$$

Da die Metrik diagonal ist und nur von  $\phi \hat{=} x_4$  abhängt, sind sie nicht sehr aufwendig zu berechnen. Man erhält:

$$\Gamma^4{}_{\lambda\mu} = -\frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \sigma'(\phi) \eta_{\lambda\mu} \quad (6.7a)$$

$$\Gamma^\kappa{}_{4\mu} = -\sigma'(\phi) \eta^\kappa{}_\mu \quad (6.7b)$$

$$\Gamma^\kappa{}_{\lambda 4} = -\sigma'(\phi) \eta^\kappa{}_\lambda \quad (6.7c)$$

$$\Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} = \Gamma^4{}_{4\mu} = \Gamma^4{}_{\lambda 4} = \Gamma^\kappa{}_{44} = \Gamma^4{}_{44} = 0. \quad (6.7d)$$

Aus diesen berechnet man den Riemann'schen Krümmungstensor zu:

$$R^K{}_{MLN} = \partial_L \Gamma^K{}_{NM} - \partial_N \Gamma^K{}_{LM} + \Gamma^K{}_{LR} \Gamma^R{}_{NM} - \Gamma^K{}_{NR} \Gamma^R{}_{LM}. \quad (6.8)$$

Um den Ricci-Tensor zu bestimmen, werden nur die Elemente benötigt, für die  $K=L$  gilt:

$$R_{MN} = R^L{}_{MLN}. \quad (6.9)$$

---

<sup>2</sup> $M, N, \dots = 0, \dots, 4, \mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3.$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_\phi \Gamma^4_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda 4} \Gamma^4_{\nu\mu} - \Gamma^4_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{4\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu 4} \Gamma^4_{\lambda\mu} \\
&= \left( 2 \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} [\sigma'(\phi)]^2 - \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \sigma''(\phi) \right) \eta_{\mu\nu} + 4 \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \sigma'(\phi) \eta_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \sigma'(\phi) \eta_{\nu\rho} \sigma'(\phi) \eta^\rho_{\mu} - \sigma'(\phi) \eta^\lambda_{\nu} \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \sigma'(\phi) \eta_{\lambda\mu} \\
&= \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \left( -\sigma''(\phi) + 4 [\sigma'(\phi)]^2 \right) \eta_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{6.10a}$$

$$\begin{aligned}
R_{44} &= -\partial_\phi \Gamma^\lambda_{\lambda 4} - \Gamma^\lambda_{4\rho} \Gamma^\rho_{\lambda 4} \\
&= 4 \left( \sigma''(\phi) - [\sigma'(\phi)]^2 \right)
\end{aligned} \tag{6.10b}$$

$$R_{4\nu} = R_{\mu 4} = 0. \tag{6.10c}$$

Daraus berechnen wir schließlich den Ricci-Skalar:

$$\begin{aligned}
R &= G^{MN} R_{MN} \\
&= -e^{2\sigma(\phi)} \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r^2} \left( \sigma''(\phi) - 4 [\sigma'(\phi)]^2 \right) - \frac{1}{r^2} 4 \left( \sigma''(\phi) - [\sigma'(\phi)]^2 \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( -8\sigma''(\phi) + 20 [\sigma'(\phi)]^2 \right).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Die Einsteingleichungen (6.5) werden hiermit zu:

$$\begin{aligned}
\left[ 4 \left( \sigma''(\phi) - [\sigma'(\phi)]^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -8\sigma''(\phi) + 20 [\sigma'(\phi)]^2 \right) \right] &= -\Lambda \frac{r^2}{4M^3} \\
\Leftrightarrow 6 [\sigma'(\phi)]^2 &= -\Lambda \frac{r^2}{4M^3}
\end{aligned} \tag{6.12a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-6\sigma(\phi)}}{r} \left[ \left( -\sigma''(\phi) + 4 [\sigma'(\phi)]^2 \right) - \frac{1}{2} \left( -8\sigma''(\phi) + 20 [\sigma'(\phi)]^2 \right) \right] \eta_{\mu\nu} \\
&= \frac{e^{-6\sigma(\phi)}}{4M^3} [\Lambda r + V_{IR} \delta(\phi - \pi) + V_{UV} \delta(\phi)] \eta_{\mu\nu} \\
\Leftrightarrow \left( 3\sigma''(\phi) - 6 [\sigma'(\phi)]^2 \right) &= \frac{r^2}{4M^3} \left[ \Lambda + \frac{V_{IR}}{r} \delta(\phi - \pi) + \frac{V_{UV}}{r} \delta(\phi) \right] \\
\stackrel{(6.12a)}{\Leftrightarrow} 3\sigma''(\phi) &= \frac{r}{4M^3} [V_{IR} \delta(\phi - \pi) + V_{UV} \delta(\phi)].
\end{aligned} \tag{6.12b}$$

An (6.12a) sieht man direkt, dass nur für  $\Lambda \neq 0$  eine nichttriviale Lösung ( $\sigma \neq \text{const.}$ ) existiert, man also eine nichtverschwindende 5D kosmologische Konstante benötigt. Dies geht aufgrund der Orbifoldsymmetrie allerdings nur konsistent mit (6.12b), wenn nichtverschwindende Vakuumenergien auf den Branen existieren, sogenannte „Brane-Tensions“. Schauen wir uns das Ganze im Detail an: Aus (6.12a) folgt

$$\sigma'(\phi) = \pm \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} r. \quad (6.13)$$

Aus Gründen der Orbifoldsymmetrie schließen wir auf

$$\boxed{\sigma(\phi) = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} r |\phi|} \quad (\phi \in [-\pi, \pi]). \quad (6.14)$$

Diese Lösung muss nun auch (6.12b) erfüllen. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen dies der Fall ist. Wir leiten dazu (6.14) wieder ab und erhalten:

$$\sigma'(\phi) = \text{sgn}(\phi) \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} r, \quad (6.15)$$

was konsistent mit (6.12a) ist.<sup>3</sup>

Wir fassen aufgrund der Orbifold-Randbedingungen  $\sigma(\phi)$  als periodische Funktion in  $\phi$  auf:

$$\sigma(\phi) = \sigma(\phi + 2\pi). \quad (6.16)$$

Wegen der Knicke bei  $\phi = n\pi$  ( $n=0,1$ ) (siehe Abb. 6.2) ergibt sich

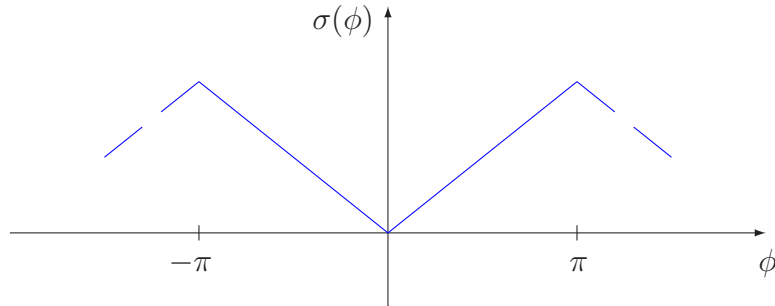


Abbildung 6.3: periodische Lösung

$$\sigma''(\phi) = 2 [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} r. \quad (6.17)$$

<sup>3</sup>Das Vorzeichen der Lösung ist nicht eindeutig, jedoch würde ein Wechsel des Vorzeichens physikalisch einem Vertauschen der Branen entsprechen. Eine mögliche additive Konstante wurde weggelassen, da sie nur einer Reskalierung der Koordinaten  $x^\mu$  entspricht.



Wenn wir dies in (6.12b) einsetzen ergibt sich mit

$$k \equiv \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} \quad (6.18)$$

die folgende Relation:

$$V_{UV} = -V_{IR} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2. \quad (6.19)$$

Die Brane-Tensions müssen also über eine Skala  $k$  mit der 5D kosmologischen Konstante zusammenhängen. Die kosmologische Konstante selbst muss, damit die nichttriviale Lösung Sinn macht, negativ sein. Wir befinden uns also in einem Anti-de-Sitter-Raum  $AdS_5$ .

Es ist die 4D-Poincaréinvarianz, die die Relationen (6.19) erfordert (falls  $\sigma \neq const.$ ). Es gibt dann einen Ausgleich zwischen der 5D kosmologischen Konstanten, die mit einer extrem gekrümmten Bulk-Raumzeit zusammenhängt, und den Brane-Tensions, sodass man eine verschwindende effektive 4D kosmologische Konstante erreicht und das 4D-Universum statisch und flach erscheint.<sup>4</sup> Solch gekrümmte Extradimensionen nennt man auch „warped extra dimensions“ und es ist, wie schon angedeutet, genau dieses warping, das eine elegante Lösung des HP ermöglicht. Die Krümmung entlang der Extradimension entsteht ganz natürlich und wird durch den Faktor  $e^{-2\sigma(\phi)} \equiv e^{-2kr|\phi|}$  bestimmt, welcher deswegen auch „Warp-Faktor“ heißt. Kurz gesagt: Um unter Voraussetzung von 4D-Poincaréinvarianz einen Warp-Faktor zu erhalten und so das HP lösen zu können, braucht man die Vakuumenergien auf den Branes. Die klassische 5D-RS-Metrik lautet schließlich:

$$\boxed{ds^2 = e^{-2kr|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - r^2 d\phi^2}. \quad (6.20)$$

Damit die Lösung Sinn macht, muss  $k < M$  gelten, sodass die Krümmung des Bulks ( $|R| = 20k^2$ ) kleiner ist als die (quadratische) fundamentale Skala der Theorie. Die 5D-Theorie hat nun zunächst drei Skalen ( $M, \Lambda, r$ ) bzw. äquivalent dazu ( $M, k, r$ ). Wir werden in den nächsten beiden Abschnitten studieren, wie die Parameter einer effektiven 4D-Theorie daraus hervorgehen und in welcher Größenordnung sich die 5D-Skalen bewegen sollten. Aus Gründen der naturalness dürfen diese sich nicht zu sehr voneinander unterscheiden.

## 6.3 Gravitation

Wir untersuchen zunächst, wie in RS die 4D-Planck-Skala  $M_{PL}$ <sup>5</sup> aus  $M$  hervorgeht. Hierzu betrachten wir eine effektive 4D-Niederenergie Theorie und ergänzen unsere klassische Vakuumlösung (6.20) deswegen durch *masselose* Fluktuationen

$$ds^2 = e^{-2k\bar{b}(x)|\phi|} [\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x)] dx^\mu dx^\nu - \bar{b}^2(x) d\phi^2. \quad (6.21)$$

<sup>4</sup>Das bekannte Problem der verschwindenden kosmologischen Konstanten, das hier nicht gelöst werden soll, würde dann umformuliert werden in die Frage, warum die Vakuumenergie auf den Branes sich exakt mit der kosmologischen Konstanten des Bulks weghebt (siehe (6.27)).

<sup>5</sup>Hier ist die *reduzierte* Planck-Skala  $\bar{M}_{Pl}^{(4)} \sim 2 \cdot 10^{18} GeV$  gemeint.

$\bar{h}_{\mu\nu}(x) \equiv h_{\mu\nu}^{(0)}(x)$  entspricht der Nullmode in der KK-Zerlegung des 5D-Gravitons und stellt das Graviton in der effektiven Theorie dar. Man kann zeigen, dass dieses genau das Profil  $\psi(\phi) \sim e^{-2kr|\phi|}$  entwickelt (siehe Anhang A) und der Ansatz so gerechtfertigt ist. Eine Rechnung hierzu ist z.B. auch in [18] durchgeführt worden. Lokal ist die Metrik (6.21) identisch mit der Vakuumlösung (6.20). Es wurde hier kein Term  $A_\mu dx^\mu d\phi$ , der Vektorfluktuationen entspricht, hinzugenommen, da aufgrund der geraden  $Z_2$ -Parität der Metrik  $A_\mu$  ungerade unter  $Z_2$  sein muss. Es existiert jedoch keine Nullmode für das Vektorfeld mit ungerader Parität, Nullmoden sind immer gerade unter  $Z_2$ .

$G_{44}(x) \equiv b^2(x)$  ist das sogenannte Radion, und seine Nullmode  $\bar{b}(x)$  setzt den Radius der Extradimension fest. Normalerweise ist diese masselos, da der Radius der Extradimension, den wir bisher einfach bei  $r$  festgesetzt haben, a priori nicht ausgezeichnet ist, also kein Potenzial hat. Die Lösung der Einsteingleichungen existiert unabhängig von  $r$ . Dies wäre phänomenologisch nicht akzeptabel, da ein masseloses Radion eine messbare Verletzung des Äquivalenzprinzips induzieren würde. Es ist essentiell, dass  $\bar{b}(x)$  bei einem Vakuumerwartungswert  $\langle \bar{b} \rangle = r$  stabilisiert wird und eine Masse von mindestens  $10^{-4}eV$  erlangt. Einen Mechanismus, wie dies passieren könnte, liefern Goldberger und Wise durch Einführen eines neuen Skalarfeldes in den Bulk (siehe Abschnitt 6.6). Zur Radion-Phänomenologie in RS siehe [23]. Wir nehmen nun an, dass der Radius stabilisiert werden kann und ersetzen  $\bar{b}(x)$  durch  $r$ , was für uns im Folgenden nur einen festen Parameter darstellt.

Wir wollen nun (6.21) in die Wirkung (6.4) einsetzen, um die effektive 4D-Planck-Skala zu bestimmen. Die komplette 4D-Metrik inklusive der Nullmodenfluktuation sei mit  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  bezeichnet:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x) \quad (6.22)$$

Zunächst noch einige Vorüberlegungen:

Betrachten wir zuerst die Christoffelsymbole, die einen Index 4 tragen. Diese sehen aus wie beim Vakuumansatz (6.7a)-(6.7c) mit der Ersetzung  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x)$ . Der einzige Unterschied, der abgesehen davon auftreten könnte, käme aus den  $\partial_\mu$  Ableitungen. Diese verschwinden jedoch, da sie hier nur auf  $\bar{G}_{44} \equiv r^2$  wirken können, was nicht von  $x$  abhängt.

Mit  $\bar{G}_{\mu\nu}(x, \phi) \equiv e^{-2\sigma(\phi)} \bar{g}_{\mu\nu}(x)$  sehen die neuen nichtverschwindenden Christoffelsymbole  $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$  für  $\bar{G}(x, \phi)$  genauso aus wie für  $\bar{g}(x)$ , da sich hier die Warpfaktoren einfach kürzen.

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} [\bar{G}] = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} [\bar{g}] \quad (6.23)$$

Wir erhalten damit

$$R_{\mu\nu} [\bar{G}] = R_{\mu\nu} [\bar{g}] + \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \left( -\sigma''(\phi) + 4[\sigma'(\phi)]^2 \right) \bar{g}_{\mu\nu} \quad (6.24a)$$

$$R_{44} [\bar{G}] = 4 \left( \sigma''(\phi) - [\sigma'(\phi)]^2 \right). \quad (6.24b)$$

Der Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu} [\bar{g}]$ , der aus der 4D-Metrik  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  berechnet wird, erhält also nur

additive Zusatzterme. Für den Ricci-Skalar erhalten wir schließlich:

$$R^{(5D)}[\bar{G}] = e^{2\sigma} \underbrace{\bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}[\bar{g}]}_{R^{(4D)}[\bar{g}]} + \bar{g}^{\mu\nu} \frac{1}{r^2} \left( -\sigma''(\phi) + 4[\sigma'(\phi)]^2 \right) \bar{g}_{\mu\nu} - \frac{4}{r^2} \left( \sigma''(\phi) - [\sigma'(\phi)]^2 \right). \quad (6.25)$$

Für das Matching setzen wir (6.25) in die Wirkung (6.4) ein:

$$\begin{aligned} S_{bulk} &= \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi e^{-4\sigma} (-2M^3 R^{(5D)} - \Lambda) \\ &\stackrel{(6.14),(6.17)}{=} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi e^{-2\sigma} (-2M^3 R^{(4D)}) \\ &\quad - \underbrace{\int d^4x \sqrt{-\bar{g}} 2M^3 k \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-4\sigma} \bar{g}^{\mu\nu} (-2[\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] + 4kr) \bar{g}_{\mu\nu}}_{=0} \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} 2M^3 k \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-4\sigma} \left( (8[\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] - 4kr) - \frac{\Lambda r}{2M^3 k} \right) \\ &\stackrel{(6.19)}{=} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi e^{-2\sigma} (-2M^3 R^{(4D)}) \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} 2M^3 k \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-4\sigma} (8[\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] + 8kr) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi e^{-2\sigma} (-2M^3 R^{(4D)}) - \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} 24M^3 k [e^{-4kr\pi} - 1] \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} S &= S_{bulk} - \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-4\sigma} (V_{UV}\delta(\phi) + V_{IR}\delta(\phi - \pi) - \mathcal{L}_{SM}\delta(\phi - \pi)) \\ &\stackrel{(6.19)}{=} S_{bulk} + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} 24M^3 k [e^{-4kr\pi} - 1] + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-4\sigma} \mathcal{L}_{SM}\delta(\phi - \pi) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi e^{-2\sigma} 2M^3 R^{(4D)} + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-4kr\pi} \mathcal{L}_{SM}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Wir erhalten also eine verschwindende effektive 4D kosmologische Konstante  $\Lambda_4 = 0$ . Dies war auch aufgrund der Poincaréinvarianz der Vakuumlösung zu erwarten. Man sieht im Rahmen dieser Rechnung auch explizit, dass das effektive Potenzial für die Nullmoden verschwindet, diese also masselos sind. Am Krümmungsterm können wir nun, wenn wir das Integral über  $\phi$  ausführen, die effektive 4D-Planck-Skala  $M_{PL}$  ablesen:

$$S \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \frac{2M^3}{k} [1 - e^{-2kr\pi}] R^{(4D)}. \quad (6.28)$$

Wir erhalten:

$$M_{PL}^2 = \frac{M^3}{k} [1 - e^{-2kr\pi}]. \quad (6.29)$$

Für  $kr > 1$  sieht man, dass die 4D-Planck-Skala  $M_{PL}$  im Gegensatz zu den flachen Extra-dimensionen (z.B. ADD) nur schwach vom Kompaktifizierungsradius  $r$  abhängt und sich für  $k \sim M$  im Bereich von  $M$  bewegt. Man setzt die Skalen  $M, k$  innerhalb ein bis zwei Größenordnungen unter  $M_{PL}$  an

$$k \leq M \leq M_{PL} \quad (6.30)$$

und hat so keine unnatürlichen Hierarchien. Im Gegensatz zu ADD ist bei RS also die fundamentale Skala der Theorie im Bereich von  $10^{19} \text{ GeV}$ . Die relative Schwäche der Gravitation, sprich die Größe von  $M_{PL}$ , erklärt das RS-Modell durch die e-Funktion-Lokalisierung der Graviton-Nullmode, deren Profil gerade der Warp-Faktor ist, bei der Planck-Brane (siehe dazu auch Anhang A). Weiterhin bemerkenswert ist, dass (6.29) sogar im entkompaktifizierten Limes  $r \rightarrow \infty$  endlich bleibt. Der Grund liegt wiederum in der Lokalisierung der Nullmode bei der Planck-Brane. Dieses Szenario wurde in [24] betrachtet.

## 6.4 Lösung des Hierarchieproblems im Randall-Sundrum-Modell

Wir wollen nun zur eigentlichen Motivation zurückkommen, nämlich zur Lösung des Hierarchieproblems in RS. Bisher haben wir eine einzige fundamentale Skala, welche im Bereich der 4D-Planck-Skala liegt, und 4D-Gravitation die genau mit dieser Unterdrückung koppelt. Im Folgenden gilt es zu studieren, wie genau unter diesen Voraussetzungen eine radiativ stabile Higgsmasse im Bereich von  $M_{EW}$  erzeugt werden kann. Hierzu untersuchen wir, wie sich ein fundamentales Higgs-Skalarfeld auf der SM-Brane ( $\phi = \pi$ ) verhält. Wir betrachten dazu die Wirkung:

$$S_{IR} \supset \int d^4x \sqrt{-g^{IR}} \left\{ g_{IR}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right\}. \quad (6.31)$$

$v_0$  ist hier der fundamentale Higgs-VEV, der aus Gründen der naturalness bei  $M$  liegen sollte. Mit (6.3) ergibt sich:

$$S_{IR} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-4kr\pi} \left\{ \bar{g}^{\mu\nu} e^{2kr\pi} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right\}. \quad (6.32)$$

Wir führen nun eine Reskalierung der Higgs-Wellenfunktion  $H \rightarrow e^{kr\pi} H$  durch, um ein kanonisch normiertes 4D-Higgs-Feld zu erhalten. Damit ergibt sich:

$$S_{eff} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \bar{g}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - e^{-2kr\pi} v_0^2)^2 \right\}. \quad (6.33)$$

Etwas Bemerkenswertes ist passiert: Der Higgs-VEV in der effektiven Theorie wird gegenüber dem fundamentalen VEV exponentiell unterdrückt:

$$v = e^{-kr\pi} v_0. \quad (6.34)$$

Dieses Resultat gilt für jeden fundamentalen Massenparameter  $m_0$ . In der effektiven 4D-Theorie entspricht dieser, gemessen auf der SM-Brane, einer physikalischen Masse von

$$m = e^{-kr\pi} m_0. \quad (6.35)$$

Man kann so also aus einem fundamentalen Higgs-VEV, mit einem natürlichen Wert von  $v_0 \sim M \sim 10^{18} \text{ GeV}$ , einen effektiven VEV von  $v \sim M_{EW} \sim 1 \text{ TeV}$  erreichen, indem man  $kr \approx 11$  wählt. Dasselbe gilt folglich für die Higgsmasse:

$$m_H \sim M_{EW}. \quad (6.36)$$

Diese ist jetzt radiativ stabil, da (sowohl vom 4D- als auch vom 5D-Standpunkt) keine bedeutend größere Skala existiert, die für Korrekturen sorgen könnte. Der Cutoff der 5D-Theorie liegt im Bereich des fundamentalen Higgs-VEV,  $v_0 \sim M$ . Der Cutoff der vollen 4D-Theorie wird durch die Kopplung der KK-Gravitonen bestimmt. Diese ist  $\sim E/\text{TeV}$  (siehe Anhang A,(A.12)), sodass die gravitative Kopplung im  $\text{TeV}$ -Bereich stark wird und dort RS für einen 4D-Beobachter z.B. durch eine String-/M-Theorie ersetzt werden muss, also hier der 4D-Cutoff anzusiedeln ist.

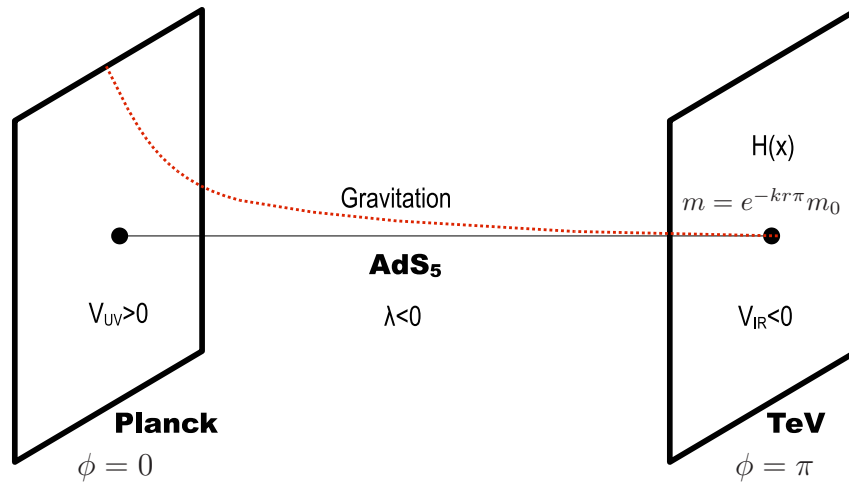


Abbildung 6.4: Lösung des Hierarchieproblems in RS

Fassen wir nun zusammen: 4D-Massenskalen stehen in Beziehung zu 5D-Inputparametern über den Warp-Faktor, also die Metrik, welche die beobachtete Hierarchie zwischen  $M_{PL}$  und  $M_{EW}$  erzeugt. Die Gravitation in der effektiven Niederenergie Theorie (Graviton-Nullmode) bleibt schwach, weil sie bei der Planck-Brane lokalisiert ist. Die Namensgebung für die Branes wird spätestens jetzt auch transparent: Die effektive Skala bei der Planck-Brane ( $\phi = 0$ ) ist  $M \sim M_{PL}$ , diejenige bei der TeV-Brane ( $\phi = \pi$ ) ist  $M_{EW} \sim \text{TeV}$ . Man braucht zur Lösung des HP kein großes  $r$ , da die Quelle der Hierarchie eine exponentielle Funktion von  $r$  ist. Im Gegensatz zu ADD muss  $r$  nur leicht größer sein als  $1/k \sim 1/M$ . Insgesamt haben wir also

$$1/r \sim k \sim v_0 \sim M \sim M_{PL} \quad (6.37)$$

und somit eine wirkliche *Lösung des Hierarchieproblems*. Die eingeführten fundamentalen Parameter liegen alle im Rahmen ihrer natürlichen Werte  $\sim M_{PL}$ , und der natürliche Wert der 4D-Higgsmasse liegt im Bereich von  $M_{EW}$ .<sup>6</sup>

## 6.5 Physikalische Konsequenzen

An dieser Stelle soll kurz auf phänomenologische Konsequenzen von RS eingegangen werden, insbesondere werden diese mit dem ADD-Szenario verglichen. Zu Beginn sei noch einmal auf die größten Unterschiede bezüglich des Hierarchieproblems hingewiesen:

- Die fundamentale Skala in RS ist  $M_{PL}$ , diejenige in ADD  $M_{EW}$ .
- In RS ist  $\frac{r}{1/M} \sim 50$  sehr moderat im Vergleich zu  $\left[\frac{M_{PL}}{M_{EW}}\right]^{\frac{2}{n}}$  (5.20) in ADD.
- In RS benötigt man nur eine Extradimension, während bei ADD  $n \geq 2$  gelten muss.
- In diese Extradimension könnten, im Gegensatz zu ADD, bei RS prinzipiell alle Teilchen vordringen (siehe Kap. 7, 9), ohne die Lösung des HP zu zerstören oder direkt experimentell ausgeschlossen zu sein.<sup>7</sup>

Kommen wir nun zu ersten experimentell relevanten Konsequenzen: In RS existieren keine leichten KK-Gravitonen, diese haben Massen von  $O(\text{TeV})$  (siehe Anhang A, (A.7)). Aufgrund dessen gibt es hier keine starken Constraints aus Kosmologie und Beschleunigerexperimenten wie in ADD [19, 20]. Mögliche stringtheoretische Effekte werden wie in ADD bei der  $\text{TeV}$ -Skala vorausgesagt.

KK-Gravitonen koppeln in RS mit  $1/M_{EW}$  statt mit  $1/M_{PL}$  (siehe (A.12)). Deswegen erwartet man in Beschleunigerexperimenten Spin 2-*Resonanzen* im TeV Bereich, welche individuell über ihren Zerfall nachgewiesen und untersucht werden können, im Gegensatz zu  $E_{miss}$  durch eine Kaskade schwach koppelnder, leichter KK-Gravitonen bei ADD. Typische Wirkungsquerschnitte bei LHC-Energien sind in beiden Modellen  $\sim 1/\text{TeV}^2$ . In ADD wird, wie in Abschnitt 5.5 gezeigt, die Größe des Wirkungsquerschnitts aus 4D-Sichtweise durch die enorme Anzahl verfügbarer KK-Moden erreicht.

RS hat also den großen Vorteil, dass es experimentell überprüfbare (und von anderen Modellen unterscheidbare) Vorhersagen trifft. Dies ist z.B. bei Stringtheorien nicht so,

---

<sup>6</sup>Wenn man es genau nimmt, unterscheiden sich  $1/r$ ,  $k$  und  $M$  um jeweils etwa eine Größenordnung ( $1/r \leq k \leq M$ ) und man erwartet KK-Massen im Bereich einiger  $\text{TeV}$  im Vergleich zu  $m_H \sim v \stackrel{!}{=} 246 \text{ GeV}$  (bzw. vom 5D-Standpunkt:  $v_0 \stackrel{!}{<} k \leq M$ , siehe dazu auch Anhang A, (A.7)). Hier kann man allerdings nicht von einer echten Hierarchie sprechen und sollte das „little hierarchy problem“  $v/m_{kk} \sim 1/10$  im Vergleich zur ursprünglichen Hierarchie und der daraus resultierenden **enormen** Feinabstimmung sehen.

<sup>7</sup>Das Higgs-Feld muss allerdings in der Nähe der TeV-Brane lokalisiert bleiben. Wenn man SUSY annimmt, kann auch das Higgs komplett in den Bulk propagieren. Allerdings wollen wir das nicht tun, da ja RS als Lösung des HP fungieren soll und wir ohne SUSY auskommen wollen.

allerdings ist auch zu betonen, dass RS eine effektive Theorie ist (die 5D-Kopplungen haben negative Massendimension) und bei hohen Energien durch eine Stringtheorie o.ä. ersetzt werden muss. Diese sollte auch die Entstehung der Branes erklären. Man könnte sich das Randall-Sundrum-Modell z.B. als effektive 5D-Theorie eines Horava-Witten-Szenarios in der M-Theorie vorstellen (siehe z.B. [25, 26]). Ein Problem in RS mit einem auf der IR-Brane lokalisierten SM ist, dass jetzt, wie bei ADD, höherdimensionale Operatoren nur noch mit Potenzen von  $M_{EW}$  statt  $M_{PL}$  unterdrückt werden. Dies führt auch hier zu Problemen mit Protonzerfall, FCNC, und großen Neutrinomassen. Abhilfe kann geschaffen werden, indem man das SM in den Bulk propagieren lässt, worauf in Teil III der Arbeit eingegangen wird.

## 6.6 Goldberger-Wise-Stabilisierung

Wir wollen nun auf den von Goldberger und Wise vorgeschlagenen Mechanismus zur Stabilisierung des Radius der Zusatzdimension eingehen [27]. Dieser basiert auf dem Einführen eines massiven Bulk-Skalars  $\Phi$ , der dafür sorgt, dass der Radius ein Potenzial  $V_\Phi(r)$  erhält und ohne Feinabstimmung bei  $kr \sim 11$  stabilisiert werden kann. Die Wirkung für das neue Skalarfeld besteht aus einem Bulk-Anteil und zwei Brane-lokalisierten Wechselwirkungstermen, die letztendlich dafür verantwortlich zeichnen, dass  $\Phi$  einen  $\phi$ -abhängigen VEV entwickelt, welcher ein nichttriviales Minimum für  $V_\Phi(r)$  bewirkt.<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{G} (G^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi - m^2 \Phi^2) \\ S_{UV} &= - \int d^4x \sqrt{-g^{UV}} \lambda_{UV} (\Phi^2 - v_{UV}^2)^2 \\ S_{IR} &= - \int d^4x \sqrt{-g^{IR}} \lambda_{IR} (\Phi^2 - v_{IR}^2)^2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Das Skalarfeld  $\Phi$  hat in 5D Massendimension  $3/2$ , deswegen haben  $\lambda_{UV, IR}$  Massendimension  $-2$ .

Wir berechnen nun klassisch den Vakuumerwartungswert  $\Phi(\phi)$ . Aus der Variation der Wirkung erhalten wir für diesen die DGL:

$$\begin{aligned} 0 &= - \frac{1}{r^2} \partial_\phi (e^{-4\sigma} \partial_\phi \Phi) + m^2 e^{-4\sigma} \Phi \\ &\quad + 4e^{-4\sigma} \lambda_{UV} \Phi (\Phi^2 - v_{UV}^2) \frac{\delta(\phi)}{r} + 4e^{-4\sigma} \lambda_{IR} \Phi (\Phi^2 - v_{IR}^2) \frac{\delta(\phi - \pi)}{r}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wir lösen die Gleichung zunächst auf dem Intervall  $(0, \pi)$  und ignorieren Randterme. Nach kurzer Rechnung erhält man mit dem Ansatz

$$\Phi(\phi) = e^{2\sigma} [Ae^{\nu\sigma} + Be^{-\nu\sigma}] \quad (6.40)$$

---

<sup>8</sup> $G^{MN}$  bezeichnet ab jetzt wieder die Vakuummetrik (6.1).

die Bedingung

$$4k^2 - \nu^2 k^2 + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \nu = \sqrt{4 + \frac{m^2}{k^2}}. \quad (6.41)$$

Die Randterme benutzen wir später, um die Lösung vollständig zu spezifizieren.

Wir betrachten nun schon einmal das 4D-Potenzial für den Radius. Dies erhält man aus der Wirkung, wenn man (6.40) einsetzt und über  $\phi$  integriert. Es ergibt sich:

$$V_\Phi(r) = k(\nu + 2)A^2 [e^{2\nu kr\pi} - 1] + k(\nu - 2)B^2 [1 - e^{-2\nu kr\pi}]$$

$$+ \lambda_{UV} (\Phi(0)^2 - v_{UV}^2)^2 + \lambda_{IR} e^{-4kr\pi} (\Phi(\pi)^2 - v_{IR}^2)^2. \quad (6.42)$$

Wir wollen nun die Koeffizienten A und B durch die Randbedingungen bestimmen. Hierzu setzen wir (6.40) in (6.39) ein und betrachten die Randterme  $\sim \delta(\phi), \delta(\phi - \pi)$ . Diese kommen einerseits aus Termen  $\sim \sigma''$  und andererseits aus den Brane-lokalisierten WW-Termen. Wir erhalten:

$$0 = -\frac{e^{-2\sigma}}{r^2} 2kr (\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)) [(2 + \nu)Ae^{\nu\sigma} + (2 - \nu)Be^{-\nu\sigma}]$$

$$+ 4\frac{e^{-4\sigma}}{r} [\lambda_{UV} \Phi(0) (\Phi(0)^2 - v_{UV}^2) \delta(\phi) + \lambda_{IR} \Phi(\pi) (\Phi(\pi)^2 - v_{IR}^2) \delta(\phi - \pi)] \quad (6.43)$$

und daraus:

$$k [(2 + \nu)A + (2 - \nu)B] - 2\lambda_{UV} \Phi(0) (\Phi(0)^2 - v_{UV}^2) = 0 \quad (6.44a)$$

$$e^{2kr\pi} k [(2 + \nu)Ae^{\nu kr\pi} + (2 - \nu)Be^{-\nu kr\pi}] + 2\lambda_{IR} \Phi(\pi) (\Phi(\pi)^2 - v_{IR}^2) = 0. \quad (6.44b)$$

Wir lösen diese Gleichungen im Limes großer Kopplungen  $\lambda_{UV,IR}$ . Man sieht an (6.42), dass von den jeweils beiden Lösungsmöglichkeiten  $\Phi(0, \pi) = 0$  und  $\Phi(0, \pi) = v_{UV,IR}$ , letztere dem Grundzustand entspricht.

$\Phi$  wird sozusagen auf den Branes bei  $\Phi(0) = v_{UV}$  und  $\Phi(\pi) = v_{IR}$  fixiert. Daraus erhält man mit (6.40):

$$A = e^{-(\nu+2)kr\pi} v_{IR} - e^{-2\nu kr\pi} v_{UV} \quad (6.45a)$$

$$B = (1 + e^{-2\nu kr\pi}) v_{UV} - e^{-(\nu+2)kr\pi} v_{IR} \quad (6.45b)$$

wobei  $kr \gg 1$  angenommen wurde und nur führende Terme in  $e^{-kr\pi}$  berücksichtigt wurden. Mit entsprechenden Näherungen und der Entwicklung

$$\nu = \sqrt{4 + 4\frac{m^2}{4k^2}} \equiv \sqrt{4 + 4\epsilon} = 2 + \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (6.46)$$

für  $m \ll k$ , erhält man

$$V_\Phi(r) = k(4 + \epsilon) (v_{IR} e^{-2kr\pi} - v_{UV} e^{-(2+\epsilon)kr\pi})^2$$

$$+ k\epsilon (v_{UV}^2 + 2v_{UV}(v_{UV} e^{-(4+2\epsilon)kr\pi} - v_{IR} e^{-(4+\epsilon)kr\pi})) + O(\epsilon^2). \quad (6.47)$$



In führender Ordnung ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) ergibt sich schließlich für das Minimum des Potentials

$$kr = \frac{4}{\pi} \frac{k^2}{m^2} \ln \left( \frac{v_{UV}}{v_{IR}} \right). \quad (6.48)$$

Man braucht nun mit  $\ln(v_{UV}/v_{IR}) \sim 1$  nur  $m^2/k^2 \sim 1/10$ , um  $kr \sim 10$  zu erreichen, was keine große Feinabstimmung erfordert. Der Radius kann also für  $v_{UV} > v_{IR}$  bei einem nichttrivialen Wert stabilisiert werden. Die unterschiedlichen Minima der Brane-Potenziale sind von Nöten, um einen  $\phi$ -abhängigen VEV für das Skalarfeld zu ermöglichen, und man kann auch am Ergebnis erahnen (welches nur für große  $kr$  gültig ist), dass nur so ein sinnvolles Minimum erreicht werden kann. Die Rückwirkung des Skalarfeldes auf die RS-Geometrie kann vernachlässigt werden, falls  $v_{UV,IR}^2 \ll M^3$  (siehe dazu [27]). Zudem kann man zeigen [27], dass für die Gültigkeit von (6.48) keine unnatürlich großen  $\lambda_{UV,IR}$  benötigt werden, indem man die  $1/\lambda$ -Korrekturen zum Potenzial berechnet.



## Teil III

# Randall-Sundrum-Modelle



In diesem zentralen Teil der Arbeit werden verschiedene Szenarien im Rahmen der RS-Modelle studiert. Wir gehen im Folgenden also immer von einer 5D-Raumzeit, bei der die fünfte Dimension auf einem Orbifold kompaktifiziert ist (siehe Kapitel 6), mit RS-Metrik (6.1) aus. Allerdings werden einige Verallgemeinerungen im Vergleich zum ursprünglichen RS-Modell implementiert. Wir wollen dabei immer ein Augenmerk darauf richten, wie unsere 4D-Welt aus einer 5D-Welt hervorgehen kann.

In Kapitel 7 wird zunächst den Eichbosonen erlaubt, in die volle 5D-Raumzeit zu propagieren. Wir wollen die Eichinvarianz diskutieren, eine Eichfixierung vornehmen, insbesondere wird die Rolle der vierten Komponente des Eichfeldes  $A_4$  untersucht, und auf Kopplungen an TeV-Brane-lokalisierte Fermionen eingehen. Die Eichbosonen erhalten in Kapitel 8 durch spontane Symmetriebrechung eine Masse und es werden ausführlich die Eichfixierung und die resultierenden Feynmanregeln diskutiert. Dies ist insbesondere für Schleifenrechnungen in RS relevant, die in unitärer Eichung oft keine sinnvollen Ergebnisse liefern. An einem Beispiel wird die Unabhängigkeit der Amplituden vom Eichparameter nachgeprüft. In Kapitel 9 werden dann die Fermionen in 5D studiert, wodurch sich interessante Möglichkeiten und Erklärungsansätze für im Standardmodell unverstandene Aspekte ergeben. Schließlich lebt also das komplette Standardmodell (außer dem Higgs-Feld) im Bulk von RS. Es werden hier insbesondere Mischungen zwischen verschiedenen Fermion-Moden diskutiert und Feynmanregeln hergeleitet. Zum Abschluss wird in Kapitel 10 auf die Phänomenologie von RS mit Bulk-Feldern eingegangen.



# Kapitel 7

## Eichbosonen im Bulk

### 7.1 Setup, Kaluza-Klein-Zerlegung und Spektrum

Wir betrachten hier ein masseloses U(1)-Eichfeld  $A_M$  im Bulk der RS-Raumzeit. Dieses Setup wurde zunächst studiert von Davoudiasl, Hewett und Rizzo [28]. Die Verallgemeinerung auf den nichtabelschen Fall kann problemlos durchgeführt werden und wird hier nicht betrachtet. Des Weiteren nehmen wir an, dass der Energie-Impuls-Tensor des Eichfeldes klein gegen die kosmologische Konstante des Bulks ist und sein Einfluss auf die Lösung der Einsteingleichungen vernachlässigt werden kann. Wir gehen von der Wirkung für ein 5D U(1)-Eichfeld

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} G^{MK} G^{NL} F_{MN} F_{KL} \quad (7.1)$$

mit

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M \quad (7.2)$$

aus. Der affine Zusammenhang verschwindet wegen der Symmetrie der Christoffelsymbole in den unteren beiden Indizes. Die Wirkung (7.1) ist offensichtlich invariant unter der 5D-Eichtransformation:

$$A_M \rightarrow A_M + \frac{1}{g_5} \partial_M \alpha(x, \phi). \quad (7.3)$$

Wir wollen im Folgenden das Spektrum des Eichfeldes und später die Kopplungen an Brane-Fermionen in der effektiven 4D-Theorie untersuchen. Deshalb führen wir eine Kaluza-Klein-Zerlegung durch und integrieren die Zusatzdimension aus. Wir zerlegen das 5D-Eichfeld  $A_M$  in Darstellungen der 4D-Lorentzgruppe, den Vektor  $A_\mu$  und den Skalar  $A_4$ , die unter 4D-Lorentztransformationen nicht mischen. Damit die Wirkung (7.1) invariant unter  $Z_2$  ist, müssen  $A_\mu$  und  $A_4$  entgegengesetzte  $Z_2$ -Paritäten haben. Wir wählen nun  $A_\mu$  gerade und  $A_4$  ungerade. Dies hat zur Folge, dass  $A_\mu$  eine Nullmode besitzt, welche an Brane-Felder koppelt und in der effektiven Niederenergiethorie als SM-Eichboson fungieren könnte. Des Weiteren existiert nun für  $A_4$  keine Nullmode, sodass kein ungewünschter

neuer leichter Skalar auftritt.<sup>1</sup> Die Kompaktifizierung auf dem Orbifold erweist sich also hier als sehr nützlich, um ein Setup zu erzeugen, das bei niedrigen Energien in das SM übergehen kann. Man sieht auch an (7.3), dass  $A_4$  genau die entgegengesetzte  $Z_2$ -Parität von  $A_\mu$  haben muss, da diese unter einer Eichtransformation erhalten bleiben sollte und  $\partial_\phi\alpha$  entgegengesetzte Parität im Vergleich zu  $\partial_\mu\alpha$  hat. Die unterschiedliche Parität von  $A_\mu$  und  $A_4$  folgt also auch aus der Eichinvarianz. Für die KK-Zerlegung von  $A_\mu$  wählen wir einen vollständigen Satz gerader orthonormierter Funktionen  $\{\chi^{(n)}(\phi)\}$  auf  $[-\pi, \pi]$  (mit Neumann-Randbedingungen, s.u.), mit dem Skalarprodukt

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \chi^{(m)}(\phi)\chi^{(n)}(\phi) = \delta^{mn} \quad (7.4)$$

und schreiben:

$$A_\mu(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x)\chi^{(n)}(\phi) \quad (7.5)$$

Es reicht aus, die Funktionen auf  $[0, \pi]$  zu betrachten. Die Fortsetzung auf  $[-\pi, 0]$  ist durch die  $Z_2$ -Parität definiert.

Wir zerlegen auch den Skalar  $A_4$  nach einem vollständigen Satz ungerader orthonormierter Funktionen  $\{\vartheta^{(n)}(\phi)\}$  auf  $[-\pi, \pi]$  (mit Dirichlet-Randbedingungen):

$$A_4(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} A_4^{(n)}(x)\vartheta^{(n)}(\phi). \quad (7.6)$$

Die Summe über  $A_4$  beginnt bei 1, da hier wie erwähnt keine Nullmode existieren kann. Mit  $\vartheta^{(0)} \equiv 0$  können wir die Summe auch bei 0 starten lassen, was wir im Folgenden tun wollen.

---

<sup>1</sup>Wir wollen hier nicht auf die Möglichkeit der Gauge-Higgs-Unification eingehen, bei der  $A_4$  gerade als Higgs-Feld fungiert. Man beachte auch, dass man je nach Wechselwirkung manchmal gar keine andere Wahl hat als  $A_4$  ungerade anzusetzen.



Setzen wir nun die Zerlegungen (7.5) und (7.6) in die Wirkung (7.1) ein:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
S_A &= -\frac{1}{4} \int d^4x \int r d\phi e^{-4\sigma} \left( e^{4\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2 \frac{e^{2\sigma}}{r^2} \eta^{\mu\nu} F_{\mu 4} F_{\nu 4} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{n,m} \int d^4x \int d\phi (\partial_\mu A_\nu^{(n)} \chi^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)} \chi^{(n)}) (\partial^\mu A^{\nu(m)} \chi^{(m)} - \partial^\nu A^{\mu(m)} \chi^{(m)}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \int d^4x \int d\phi \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \left( \partial_\mu A_4^{(n)} \vartheta^{(n)} - \partial_\phi A_\mu^{(n)} \chi^{(n)} \right) \left( \partial^\mu A_4^{(m)} \vartheta^{(m)} - \partial_\phi A^{\mu(m)} \chi^{(m)} \right) \\
&\stackrel{(7.4)}{=} -\frac{1}{4} \sum_n \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}) (\partial^\mu A^{\nu(n)} - \partial^\nu A^{\mu(n)}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \int d^4x \int d\phi \left( \frac{-1}{r^2} \partial_\phi (e^{-2\sigma} \partial_\phi \chi^{(n)}) \chi^{(m)} \right) A_\mu^{(n)} A^{\mu(m)} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \int d^4x \int d\phi \left( \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \vartheta^{(n)} \vartheta^{(m)} \right) \partial_\mu A_4^{(n)} \partial^\mu A_4^{(m)} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \int d^4x \int d\phi \left( \frac{-1}{r^2} \partial_\phi (e^{-2\sigma} \vartheta^{(n)}) \chi^{(m)} \right) 2A_4^{(n)} \partial_\mu A^{\mu(m)}, \tag{7.7}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt partiell integriert wurde (wegen der Randbedingungen verschwinden die Randterme). Man sieht nun, dass man wegen (7.4) u.a. eine Wirkung für  $n$  massive 4D-Vektorfelder  $A_\mu^{(n)}$  der Masse  $m_n$  (und eine masselose Nullmode,  $m_0 = 0$ ) erhält, wenn man

$$-\frac{1}{r^2} \partial_\phi (e^{-2\sigma} \partial_\phi \chi^{(n)}) = m_n^2 \chi^{(n)} \tag{7.8}$$

fordert. Wir wählen  $\{\chi^{(n)}\}$  also als Eigenfunktionen des hermiteschen Differentialoperators in (7.8).

Schauen wir uns die beiden anderen Terme die Profile enthalten an. Eine sinnvolle Forderung für das Matching des Mischterms ist

$$\frac{-1}{r^2} \partial_\phi (e^{-2\sigma} \vartheta^{(n)}) = m_n \chi^{(n)}, \tag{7.9}$$

sodass dieser nach Integration über den Orbifold zu  $2m_n A_4^{(n)} \partial_\mu A^{\mu(n)}$  wird. Man sieht an (7.8), dass die Bedingung gerade für

$$\vartheta^{(n)} = \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)} \tag{7.10}$$

erfüllt wird. Die Orthonormierungsbedingung für  $\vartheta^{(n)}$  aus dem kinetischen Term des Skalars  $A_4^{(n)}$ :

$$\int d\phi \left( \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \vartheta^{(n)} \vartheta^{(m)} \right) = \delta^{nm}, \tag{7.11}$$

---

<sup>2</sup>Die Kontraktion griechischer Indizes erfolgt mit der Minkowski-Metrik. Die Vektoren und Feldstärke-tensoren enthalten keinen impliziten Faktor  $e^{2\sigma}$  mehr.

lässt sich nun (für (7.10)) nach partieller Integration wegen (7.8) gerade auf (7.4) zurückführen. Wir haben also für die Zerlegung des Skalars:

$$A_4(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1} A_4^{(n)}(x) \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)}(\phi). \quad (7.12)$$

Dies ist konsistent mit den  $Z_2$ -Randbedingungen und  $\partial_\phi \chi^{(n)}$  stellt nun einen vollständigen Satz orthonormierter, ungerader Funktionen unter  $Z_2$  dar. Was als relevante Differentialgleichung für das Profil der Felder  $A_\mu^{(n)}$  und  $A_4^{(n)}$  bleibt ist (7.8).

Es ergibt sich dann aus (7.7), unter Benutzung von (7.4) und (7.8):

$$\begin{aligned} S_A^{(4D)} = & \sum_{n=0} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu(n)} + \frac{1}{2} m_n^2 A_\mu^{(n)} A^{\mu(n)} \right\} \\ & + \sum_{n=1} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu A_4^{(n)} \partial^\mu A_4^{(n)} + m_n A_4^{(n)} \partial_\mu A^{\mu(n)} \right\}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

wobei

$$F_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}. \quad (7.14)$$

Der Mischterm in (7.13) stört noch bei der Identifikation der beteiligten Felder als physikalische Teilchen, ist jedoch nicht außergewöhnlich. Er erinnert an Mischterme, die in Modellen mit spontaner Symmetriebrechung entstehen, wie z.B. beim SM-Higgs-Mechanismus. Wir wollen ihn in Anlehnung daran durch eine Eichfixierung eliminieren.

Zunächst berechnen wir jedoch die Lösungen  $\chi^{(n)}(\phi)$  für die Profile. Wir betrachten zuerst den Fall  $n > 0$  und führen zur Lösung der DGL (7.8) eine Variablentransformation durch. Mit  $z_n \equiv (m_n/k)e^\sigma$  und  $f^{(n)} \equiv e^{-\sigma} \chi^{(n)}$  erhalten wir

$$\frac{d}{dz_n} \left( \frac{1}{z_n} \frac{d}{dz_n} (f^{(n)} z_n) \right) + f^{(n)} = 0 \quad (7.15)$$

und schließlich die *Bessel'sche DGL* der ersten Ordnung

$$\left[ z_n^2 \frac{d^2}{dz_n^2} + z_n \frac{d}{dz_n} + (z_n^2 - 1) \right] f^{(n)} = 0. \quad (7.16)$$

Diese wird gelöst durch eine Linearkombination von Besselfunktionen der ersten Art

$$\chi^{(n)} = \frac{e^\sigma}{N_n} [J_1(z_n) + \alpha_n Y_1(z_n)]. \quad (7.17)$$

$N_n$  bezeichnet die Normierungskonstante und  $\alpha_n$  ergibt sich aus den Randbedingungen. Wenn keine 5D-Boundary-Massenterme existieren, fordert man Stetigkeit der Ableitung<sup>3</sup> bei  $\phi = 0, \pi$  und erhält dann für die gerade Funktion  $\chi(n)(\phi)$  die schon angesprochenen Neumann-Randbedingungen:

$$\partial_\phi \chi|_{\phi=0} = 0 \quad (7.18)$$

$$\partial_\phi \chi|_{\phi=\pi} = 0. \quad (7.19)$$

---

<sup>3</sup>Dies bewirkt Hermitizität des Differentialoperators in (7.8).

| n  | $x_n$ | $m_n[TeV]$ |
|----|-------|------------|
| 1  | 2.45  | 2.4        |
| 2  | 5.57  | 5.5        |
| 3  | 8.70  | 8.5        |
| 4  | 11.84 | 11.6       |
| 5  | 14.98 | 14.7       |
| 6  | 18.12 | 17.8       |
| 7  | 21.26 | 20.9       |
| 8  | 24.40 | 23.9       |
| 9  | 27.54 | 27.0       |
| 10 | 30.68 | 30.1       |

Tabelle 7.1: KK-Massen der Eichbosonen ( $kr = 11$ ,  $k = 10^{18} GeV$ )

Die Dirichlet-Randbedingungen für  $\vartheta(\phi) \equiv \partial_\phi \chi(\phi)$  ergeben sich dann automatisch. Aus (7.18) folgt

$$\alpha_n = -\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) + \frac{m_n}{k} J_1'\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) + \frac{m_n}{k} Y_1'\left(\frac{m_n}{k}\right)}. \quad (7.20)$$

Im Limes  $m_n/k \ll 1$  ergibt sich:

$$\alpha_n \approx \frac{-\pi}{2(\gamma_E + \ln(m_n/2k))}, \quad (7.21)$$

wobei  $\gamma_E \approx 0.577$  die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

Durch (7.19) erhält man:

$$J_1(x_n) + x_n J_1'(x_n) + \alpha_n (Y_1(x_n) + x_n Y_1'(x_n)) = 0 \quad (7.22)$$

mit  $x_n \equiv (m_n/k)e^{kr\pi}$ , und somit eine Bestimmungsgleichung für die Kaluza-Klein-Massen

$$m_n = x_n k e^{-kr\pi}. \quad (7.23)$$

Diese sollten im Bereich von  $M_{EW}$  liegen ( $x_n \sim O(1)$ ), was eine Lösung des Hierarchieproblems auch mit Bulk-Eichbosonen erlaubt. Die numerischen Werte für die ersten zehn Moden sind in Tabelle 7.1 angegeben. Es wurde  $kr=11$  verwendet, wobei kleine Variationen dieses Wertes keinen großen Einfluss haben. Um beispielhaft konkrete Massen anzugeben, wurde  $k = 10^{18} GeV$  verwendet. Es entsteht eine leichte Spannung, da elektroschwache Präzisionsmessungen KK-Massen im Bereich einiger TeV verlangen (siehe Abschnitt 7.3 und Kapitel 10), und deswegen  $k$  in den problematischen Bereich bei der fundamentalen Planck-Skala kommt. Falls man  $k$  kleiner wählt, muss man auch  $kr < 11$  wählen und es wird schwieriger, die Entstehung einer niedrigen elektroschwachen Skala aus der Planck-Skala zu erklären. Probleme dieser Art wurden bereits am Ende von Abschnitt 6.4 angedeutet und interpretiert („little hierarchy problem“).

Es existiert zu (7.8) auch eine Nullmodenlösung mit  $m_0 = 0$ , die wie schon angedeutet mit dem SM-Photon identifiziert wird. Die DGL wird dann zu

$$\partial_\phi (e^{-2\sigma} \partial_\phi \chi^{(0)}) = 0, \quad (7.24)$$

mit der einzigen mit den Orbifold-Bedingungen konsistenten Lösung

$$\chi^{(0)} = \frac{1}{N_0}. \quad (7.25)$$

Die effektive 4D U(1)-Niederenergiethorie enthält also nun genau ein Eichboson, welches als Photon fungieren kann und auf diese Art könnte bei niedrigen Energien der SM-Eichsektor aus dem RS-Modell hervorgehen. Die KK-Anregungen werden erst bei großen Energien im TeV-Bereich direkt zugänglich, können allerdings in Schleifen umlaufen und haben so Einfluss auf Präzisionsmessungen. Die Normierungskonstanten berechnet man über (7.4) zu

$$N_0 = \sqrt{2\pi} \quad (7.26)$$

$$N_n \approx \frac{e^{kr\pi}}{\sqrt{kr}} \sqrt{J_1(x_n)^2 - J_0(x_n)J_2(x_n)}. \quad (7.27)$$

Für (7.27) wurde  $\alpha_n \ll 1$ ,  $e^{-kr\pi} \ll 1$  benutzt und eine Entwicklung bis einschließlich der ersten Ordnung in  $(m_n/k)$  durchgeführt. In guter Näherung gilt weiter:

$$N_n \approx \frac{e^{kr\pi}}{\sqrt{kr}} J_1(x_n). \quad (7.28)$$

## 7.2 Eichfixierung und Propagatoren

Kommen wir nun zur Eichfixierung. Die Wirkung (7.13) ist (für jede Mode separat) invariant unter der KK-zerlegten 5D-Eichtransformation (7.3).

Diese wird mit  $\alpha(x, \phi) = \sum_n \alpha_n(x) \chi^{(n)}(\phi)$  zu:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)} + \frac{1}{g_5} \partial_\mu \alpha_n \chi^{(n)} \quad (7.29)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} A_4^{(n)} \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} A_4^{(n)} \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)} + \frac{1}{g_5} \alpha_n \partial_\phi \chi^{(n)} \quad (7.30)$$

und somit

$$A_\mu^{(n)} \rightarrow A_\mu^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} g_4} \partial_\mu \alpha_n \quad (7.31)$$

$$A_4^{(n)} \rightarrow A_4^{(n)} + \frac{m_n}{\sqrt{2\pi} g_4} \alpha_n \quad (7.32)$$

mit der effektiven 4D-Kopplung

$$g_4 := \frac{g_5}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (7.33)$$

Die dimensionsbehaftete fundamentale U(1)-Kopplung sollte also wieder ungefähr in der Größenordnung der inversen fundamentalen Skala liegen,  $g_5^2 \sim 1/M$ , was nur natürlich erscheint. Die Felder  $A_4^{(n)}$  könnten nun durch eine Eichtransformation mit

$$\alpha_n = -A_4^{(n)} \frac{\sqrt{2\pi} g_4}{m_n}, n = 1, 2, \dots \quad (7.34)$$

eliminiert werden. Die Eichsymmetrie für die massiven Anregungen wäre somit gebrochen, jedoch wäre der Nullmodensektor und somit die effektive Niederenergiethorie immer noch eichinvariant bezüglich

$$A_\mu^{(0)} \rightarrow A_\mu^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} g_4} \partial_\mu \alpha_0. \quad (7.35)$$

Da die Eichung, in der  $A_4$  eliminiert wird, problematisch für Schleifenrechnungen ist, wollen wir nun jedoch einen anderen Weg einschlagen. Wir behalten (anders als in [28])  $A_4$  in der Theorie und führen eine  $R_\xi$ -Eichfixierung durch (siehe dazu z.B. [29]). Wir tun dies in der 4D-Betrachtungsweise, in der reinen 5D-Theorie wurde die Thematik in [30] behandelt. Um die Eichfixierung durchzuführen, addieren wir folgenden eichfixierenden Term zur (4D)-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{GF0}^{(4D)} := -\frac{1}{2\xi} \sum_{n=0} \left( \partial_\mu A^{\mu(n)} + \xi m_n A_4^{(n)} \right)^2 \quad (7.36)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0} \left( \frac{1}{\xi} \partial_\mu A^{\mu(n)} \partial_\nu A^{\nu(n)} + 2 \partial_\mu A^{\mu(n)} m_n A_4^{(n)} + \xi m_n^2 A_4^{(n)2} \right). \quad (7.37)$$

Der eichfixierende Term ist so gebaut, dass der Mischterm in (7.13) verschwindet.<sup>4</sup> Wir wollen uns nun vergewissern, dass die Addition dieses Termes zur Lagrangedichte legitim ist. Dazu betrachten wir die Zwangsbedingung die der Term liefert, indem wir ihn nach  $\xi$  ableiten. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{GF0}^{(4D)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sum_{n=0} \left( \frac{1}{\xi^2} \partial_\mu A^{\mu(n)} \partial_\nu A^{\nu(n)} - m_n^2 A_4^{(n)2} \right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung gilt, falls:

$$\frac{1}{\xi} \partial_\mu A^{\mu(n)} = m_n A_4^{(n)}. \quad (7.38)$$

Es gibt nun immer eine Eichtransformation, die diese Bedingung erfüllt. Mit (7.32) folgt:

$$\frac{1}{\xi} \partial_\mu \left( A^{\mu(n)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} g_4} \partial^\mu \alpha_n \right) \stackrel{!}{=} m_n \left( A_4^{(n)} + \frac{m_n}{\sqrt{2\pi} g_4} \alpha_n \right) \quad (7.39)$$

<sup>4</sup>Wir benutzen hier den selben Parameter  $\xi$  für alle KK-Moden.

und daraus

$$\partial^2 \alpha_n - \xi m_n^2 \alpha_n \stackrel{!}{=} \sqrt{2\pi} g_4 \left( \xi m_n A_4^{(n)} - \partial_\mu A^{\mu(n)} \right) \quad (7.40)$$

wozu sicher eine Lösung existiert.

Wir addieren die Wirkung des eichfixierenden Terms nun zu (7.13) und erhalten:

$$\begin{aligned} S_G^{(4D)} = S_A^{(4D)} + S_{GF0}^{(4D)} = & -\frac{1}{4} \sum_{n=0} \int d^4x \left\{ F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu(n)} + \frac{2}{\xi} \partial_\mu A^{\mu(n)} \partial_\nu A^{\nu(n)} + 2m_n^2 A_\mu^{(n)} A^{\mu(n)} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \int d^4x \left\{ \partial_\mu A_4 \partial^\mu A_4^{(n)} - \xi m_n^2 A_4^{(n)2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Nun führen wir eine partielle Integration durch, um die Wirkung in einer Form zu schreiben, in der man die Propagatoren leicht ablesen kann. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} S_G^{(4D)} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0} \int d^4x A_\mu^{(n)} \left[ (\partial^2 + m_n^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] A_\nu^{(n)} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=1} \int d^4x A_4^{(n)} [\partial^2 + \xi m_n^2] A_4^{(n)}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Der Propagator für das Vektorfeld  $\langle A_\mu^{(n)} A_\nu^{(n)} \rangle \equiv \tilde{D}_{\mu\nu}^{(n)}(k)$  ergibt sich nun aus

$$\left( (\partial^2 + m_n^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right) D_{\nu\rho}^{(n)}(x-y) = i \delta_\rho^\mu \delta^{(4)}(x-y) \quad (7.43)$$

bzw. im Impulsraum mit  $D_{\nu\rho}^{(n)}(x-y) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{D}_{\nu\rho}^{(n)}(k)$ :

$$\left( (-k^2 + m_n^2) \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right) \tilde{D}_{\nu\rho}^{(n)}(k) = i \delta_\rho^\mu. \quad (7.44)$$

Man macht den allgemeinen Ansatz bezüglich der Lorentzstruktur  $\tilde{D}_{\nu\rho}^{(n)}(k) = a \eta_{\nu\rho} + b k_\nu k_\rho$  und erhält mit (7.44):

$$\langle A_\mu^{(n)} A_\nu^{(n)} \rangle = \frac{-i}{k^2 - m_n^2} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_n^2} (1 - \xi) \right). \quad (7.45)$$

Dies ist der bekannte Propagator für ein massives Eichboson in 4D. Für die Nullmode gilt (7.45) mit  $m_0 = 0$ . Für  $A_4^{(n)}$  ergibt sich analog:

$$\langle A_4^{(n)} A_4^{(n)} \rangle = \frac{i}{k^2 - \xi m_n^2}. \quad (7.46)$$

Die Felder  $A_4^{(n)}$  haben jetzt eine vom Eichparameter abhängige Masse, sind also unphysikalisch und kommen nicht als äußere Linien in Feynmandiagrammen vor. Dies konnte

man auch schon daran sehen, dass es möglich war, sie mit einer Eichtransformation zu eliminieren. Ihr Propagator sieht genau aus wie der Propagator eines Goldstone-Bosons bei einer spontan gebrochenen Symmetrie nach Eichfixierung. Die Massen der Kaluza-Klein-Vektorfelder kommen zwar durch einen anderen Mechanismus zustande, nämlich durch Kompaktifizieren einer Zusatzdimension,  $A_4$  übernimmt hier jedoch eine entsprechende Rolle wie ein Goldstone-Boson beim SM-Higgs-Mechanismus. Man kann die verschiedenen Eichungen durch unterschiedliche Wahl von  $\xi$  analog dazu interpretieren. Der Limes  $\xi \rightarrow \infty$  entspricht der unitären Eichung. In dieser werden die  $A_4^{(n)}$  wieder aus der Theorie eliminiert (sie werden „unendlich schwer“) und ihre Freiheitsgrade stecken jetzt in den massiven  $A_\mu^{(n)}$ . Dass diese Eichung (trotz Eichinvarianz) problematisch für Schleifenrechnungen ist, liegt daran, dass die Integration über den Schleifenimpuls nicht unbedingt mit dem Limes  $\xi \rightarrow \infty$  vertauscht. So können Divergenzen übrigbleiben, die in endlicher  $R_\xi$ -Eichung nicht auftreten würden.<sup>5</sup>

### 7.3 Kopplung an Brane-Fermionen

Wir wollen nun die Kopplungen der Eichbosonen an Fermionen untersuchen, welche zunächst auf der TeV-Brane lokalisiert seien. Alle Wechselwirkungen mit Fermionen müssen also hier stattfinden, und die Brane-Fermionen können als SM-Fermionen interpretiert werden. Wir gehen von der Wirkung

$$S_\psi = i \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \bar{\psi} \Gamma^m E_m^M (\partial_M - ig_5 A_M) \psi \frac{\delta(\phi - \pi)}{r} \quad (7.47)$$

aus, wobei große lateinische Buchstaben  $M = 0, \dots, 4$  den gekrümmten Raum indizieren, während kleine lateinische Buchstaben  $m = 0, \dots, 4$  den flachen Raum bezeichnen.  $E_m^M = \text{diag}(e^\sigma, e^\sigma, e^\sigma, e^\sigma, 1/r)$  ist das inverse Vielbein, welches für die Kopplung an Fermionen im gekrümmten Raum benötigt wird. Die Matrizen  $\Gamma^m = (\gamma^\mu, i\gamma^5)$  sind eine vierdimensionale Darstellung der Dirac-Matrizen im fünfdimensionalen flachen Raum. Man beachte dass  $A_4$ , als ungerades Feld unter  $Z_2$ , (siehe Abschnitt 7.1) bei  $\phi = \pi$  verschwindet. Es koppelt deswegen nicht an Brane-Fermionen. Passend dazu ist auch die Ableitung  $\partial_\phi \psi = 0$ , sodass die Eichinvarianz gesichert ist. Die kovariante Ableitung  $(\partial_M - ig_5 A_M)$  wird also zu  $(\partial_\mu - ig_5 A_\mu)$ .

Wir setzen jetzt die KK-Zerlegung (7.5) in (7.47) ein und führen die Integration über  $\phi$  aus. Nach der Reskalierung  $\psi \rightarrow e^{3/2kr\pi}$  erhalten wir die Wechselwirkung:

$$S_{\psi \text{ int}}^{(4D)} = \int d^4x g_5 \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \sum_{n=0} A_\mu^{(n)}(x) \frac{\chi^{(n)}(\pi)}{\sqrt{r}} \right) \psi. \quad (7.48)$$

Wir setzen nun die konkreten Profile bei der TeV-Brane ein. Mit (7.25),(7.26),(7.17),(7.28)

<sup>5</sup>Es sei hier auch noch einmal an den Anfang der Arbeit erinnert, insbesondere daran, dass die Renormierbarkeit des SM in unitärer Eichung zunächst nicht offensichtlich ist.

erhalten wir:

$$\chi^{(0)}(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (7.49)$$

$$\chi^{(n)}(\pi) \approx \sqrt{kr}, \quad (7.50)$$

wobei wiederum  $\alpha_n \ll 1$  benutzt wurde und somit gilt mit  $g_5 = g_4\sqrt{2\pi r}$  (7.33):

$$S_{\psi int}^{(4D)} \approx \int d^4x g_4 \bar{\psi} \gamma^\mu \left( A_\mu^{(0)} + \sqrt{2\pi kr} \sum_{n=1} A_\mu^{(n)} \right) \psi. \quad (7.51)$$

Wir sehen also, dass die KK-Eichbosonen um den Faktor  $\sqrt{2\pi kr} \approx 8.3$  ( $kr \approx 11$ ) stärker an Brane-Fermionen koppeln als die Nullmode, also z.B. das SM-Photon. Eine Zusammenstellung der Feynmanregeln für die in dieser Arbeit behandelten Setups findet sich in Anhang B. Diese Betrachtung gilt auch für die nichtabelschen Eichbosonen. Man kann hieraus relativ starke untere Schranken an die KK-Massen aus elektroschwachen Präzisionsmessungen erhalten. Siehe dazu [28], wo eine untere Schranke von  $m_1 \geq 23 TeV$  angegeben wird, was ein „little hierarchy problem“ aufwerfen kann. Die Überlegungen hier basieren allerdings wohlgerne auf einem Setup, bei dem die Fermionen nicht in den Bulk propagieren. Wenn sie dies tun dürfen, sieht das Ganze schon wieder anders aus (siehe Kapitel 10).

Wir haben nun gesehen, dass im Gegensatz zur Gravitation, die (dimensionslose) 4D-Eichkopplung nicht geschwächt wird, falls die Eichbosonen im Bulk von RS leben. Die Eichboson-Nullmode ist flach, im Gegensatz zur Graviton-Nullmode, welche bei der Planck-Brane lokalisiert ist. Aus diesem Grund ist es prinzipiell sinnvoll Bulk-Eichfelder zu betrachten. Es sei auf die Unterschiede zu einer flachen Extradimension (Large Extra Dimensions) hingewiesen, wo die KK-Eichbosonen auf der TeV-Brane *universell* um einen Faktor  $\sqrt{2}$  stärker koppeln als die Nullmode. Außerdem sind die KK-Massen dort äquidistant verteilt mit  $m_n = n/R$ .



# Kapitel 8

## Spontan gebrochene Eichsymmetrie: Abelsches Higgs-Modell

### 8.1 Setup

Wir wollen nun den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, induziert durch Kopplung an ein Higgs-Skalarfeld, für ein Bulk-U(1)-Eichfeld studieren. Der komplexe Higgs-Skalar  $\Phi = 1/\sqrt{2}(\Phi_1 + i\Phi_2)$  sei auf der TeV-Brane lokalisiert, wodurch das Hierarchieproblem gelöst wird. Die fünfte Dimension wird wieder ausintegriert, um eine 4D-Theorie zu erhalten. Wir gehen aus von

$$S = S_A + S_H \quad (8.1)$$

mit  $S_A$  aus (7.1) und

$$S_H = \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \{ G^{MN} D_M \Phi(x) (D_N \Phi(x))^* - V(\Phi) \} \frac{\delta(\phi - \pi)}{r}. \quad (8.2)$$

$$D_M = \partial_M - ig_5 A_M \quad (8.3)$$

ist die kovariante Ableitung. Die Wirkung (8.1) ist invariant unter der lokalen U(1)-Eichtransformation

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x,\pi)} \Phi(x), \quad A_M \rightarrow A_M + \frac{1}{g_5} \partial_M \alpha(x, \pi). \quad (8.4)$$

Man beachte wieder, dass  $\partial_\phi \Phi(x) \equiv 0$  und  $A_4(x, \pi) = 0$ . Das Higgspotenzial  $V(\Phi)$  hat die bekannte Mexican-Hat-Form:

$$V(\Phi) = -\mu_5^2 \Phi \Phi^* + \frac{\lambda_5}{2} (\Phi \Phi^*)^2 + \frac{\mu_5^4}{2\lambda_5}, \quad \mu_5^2 > 0, \lambda_5 > 0, \quad (8.5)$$

die dafür sorgt, dass ein nichttriviales Minimum existiert und  $\Phi$  einen VEV erhält. Wir setzen nun (7.5) in (8.2) ein und führen das Integral über  $\phi$  aus:

$$S_H^{(4D)} = \int d^4x \sum_{n,m=0} \left\{ e^{-2kr\pi} \eta^{\mu\nu} \left( \partial_\mu - i \frac{g_5}{\sqrt{r}} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)}(\pi) \right) \Phi(x) \left( \partial_\nu + i \frac{g_5}{\sqrt{r}} A_\nu^{(m)} \chi^{(m)}(\pi) \right) \Phi(x)^* \right\} - \int d^4x e^{-4kr\pi} \left\{ -\mu_5^2 \Phi \Phi^* + \frac{\lambda_5}{2} (\Phi \Phi^*)^2 + \frac{\mu_5^4}{2\lambda_5} \right\}. \quad (8.6)$$

Nach der Reskalierung  $\Phi \rightarrow e^{kr\pi} \Phi$  erhalten wir einen kanonischen kinetischen Term und das Potenzial wird zu

$$V(\Phi) = -\mu_4^2 \Phi \Phi^* + \frac{\lambda_4}{2} (\Phi \Phi^*)^2 + \frac{\mu_4^4}{2\lambda_4} \quad (8.7)$$

mit

$$\mu_4^2 = e^{-2kr\pi} \mu_5^2, \quad \lambda_4 = \lambda_5. \quad (8.8)$$

Wir sehen wieder die Unterdrückung des Massenparameters durch den Warpfaktor. Das Minimum des Potenzials befindet sich bei

$$|\Phi_0| \equiv \sqrt{\frac{\mu_4^2}{\lambda_4}}. \quad (8.9)$$

Wir entwickeln jetzt das Higgs-Feld um den Vakuum-Zustand  $|\Phi_0| \equiv v/\sqrt{2}$ , den wir aufgrund der U(1)-Symmetrie reell wählen können:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h + i\varphi). \quad (8.10)$$

Die U(1)-Symmetrie ist nun durch *den Grundzustand der Theorie* gebrochen und das Eichfeld wird, wie wir gleich sehen werden, eine Masse erlangen. Wir wollen nun (8.10) in die Wirkung (8.6) einsetzen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} S_H^{(4D)} &= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* + i\sqrt{2\pi}g_4 \sum_{n=0} A^{\mu(n)} \chi^{(n)}(\pi) ((\partial_\mu \Phi) \Phi^* - \Phi (\partial_\mu \Phi^*)) \right\} \\ &\quad + \int d^4x \left\{ 2\pi g_4^2 \sum_{n,m=0} A_\mu^{(n)} A^{\mu(m)} \chi^{(n)}(\pi) \chi^{(m)}(\pi) \Phi \Phi^* - V(\Phi) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ (\partial_\mu h \partial^\mu h + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) + 2\sqrt{2\pi}g_4 v \sum_{n=0} \partial_\mu A^{\mu(n)} \chi^{(n)}(\pi) \varphi \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ 2\pi g_4^2 v^2 \sum_{n,m=0} A_\mu^{(n)} A^{\mu(m)} \chi^{(n)}(\pi) \chi^{(m)}(\pi) - 2\mu_4^2 h^2 \right\} \\ &\quad + S_{H(WW)}^{(4D)} \\ &\equiv S_{H2}^{(4D)} + S_{H(WW)}^{(4D)} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Wie wir sehen, ist ein Massenterm für das Eichfeld

$$m_A^{2(n,m)} = 2\pi g_4^2 v^2 \chi^{(n)}(\pi) \chi^{(m)}(\pi) \quad (8.12)$$

und aus dem Potenzial  $V(\Phi)$  ein Massenterm für das Higgsfeld mit  $m_h^2 = 2\mu_4^2$  entstanden. Zudem taucht der erwartete Mischterm zwischen dem Goldstone-Boson  $\varphi$  und  $A_\mu^{(n)}$  auf. Wir nehmen nun die Wirkung  $S_A^{(4D)}$  (7.13) hinzu und führen eine Eichfixierung für das komplette abelsche Higgs-Modell durch.

## 8.2 Eichfixierung

Wir wählen den eichfixierenden Term so, dass die beiden Mischterme in  $S_A^{(4D)} + S_H^{(4D)}$  simultan verschwinden:

$$\mathcal{L}_{GF}^{(4D)} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{n=0} \left( \partial_\mu A^{\mu(n)} + \xi \left( m_n A_4^{(n)} + \sqrt{2\pi} g_4 v \chi^{(n)}(\pi) \right) \right)^2. \quad (8.13)$$

Analog zur reinen Eichtheorie kann man sich von der Legitimität einer solchen Eichfixierung überzeugen. Wir betrachten im Folgenden nur Bilineare in den Feldern, vernachlässigen also  $S_{H(WW)}^{(4D)}$ , und erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} S_{AH2}^{(4D)} &:= S_A^{(4D)} + S_{H2}^{(4D)} + S_{GF}^{(4D)} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n,m=0} A_\mu^{(n)} \left[ \eta^{\mu\nu} \left( (\partial^2 + m_n^2) \delta_{nm} + m_A^{2(n,m)} \right) + \partial^\mu \partial^\nu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \delta_{nm} \right] A_\nu^{(m)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n=1} A_4^{(n)} \left[ \partial^2 + \xi m_n^2 \right] A_4^{(n)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x h \left[ \partial^2 + m_h^2 \right] h \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \varphi \left[ \partial^2 + \xi \sum_{n=0} m_A^{2(n,n)} \right] \varphi \\ &\quad - \int d^4x \sum_{n=1} A_4^{(n)} \left( \sqrt{2\pi} g_4 v \chi^{(n)}(\pi) \xi m_n \right) \varphi \end{aligned} \quad (8.14)$$

Man sieht, dass der Massenterm für  $A_\mu^{(n)}$  verschiedene Anregungen des Vektorfeldes mischt. Des Weiteren haben wir einen Massenterm, der  $A_4^{(n)}$  mit  $\varphi$  verknüpft. Dies sollte uns nicht wundern, da diese beiden Skalarfelder ähnliche Rollen erfüllen. Wir fassen ab jetzt  $\varphi$  als nullte Komponente des Vektors  $\mathbf{A}_4 := \left( \varphi, A_4^{(1)}, A_4^{(2)}, \dots \right)^T$  auf<sup>1</sup> und haben nun

<sup>1</sup>Wir bezeichnen im Folgenden alle Einträge dieses Vektors als Goldstone-Bosonen.

auch hier eine nichtdiagonale Massenmatrix. Die beiden Massenterme lauten also:<sup>2</sup>

$$\mathcal{L}_m = \sum_{m,n=0} \left( \frac{1}{2} A_\mu^{(n)} M_A^{2(n,m)} A^{\mu(m)} - \frac{1}{2} A_4^{(n)} \xi M_\xi^{2(n,m)} A_4^{(m)} \right) \quad (8.15)$$

mit

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} m_A^{2(0,0)} & m_A^{2(0,1)} & m_A^{2(0,2)} & \cdots \\ m_A^{2(1,0)} & m_A^{2(1,1)} + m_1^2 & m_A^{2(1,2)} & \cdots \\ m_A^{2(2,0)} & m_A^{2(2,1)} & m_A^{2(2,2)} + m_2^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

$$M_\xi^2 = \begin{pmatrix} \sum_{n=0} m_A^{2(n,n)} & m_A^{(1,1)} m_1 & m_A^{(2,2)} m_2 & \cdots \\ m_A^{(1,1)} m_1 & m_1^2 & 0 & \cdots \\ m_A^{(2,2)} m_2 & 0 & m_2^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Da wir mit Masseneigenzuständen und nicht mit Wechselwirkungseigenzuständen arbeiten wollen, werden wir nun diese beiden Matrizen mittels orthogonaler Transformationen diagonalisieren. Die Massen der Skalarfelder sind alle abhängig vom Eichparameter, also unphysikalisch. Es ist bemerkenswert, dass in  $M_\xi^{2(0,0)}$  eine unendliche (divergente) Summe steht.

Wegen der Eichinvarianz der Theorie erwarten wir später, dass Amplituden in allen Ordnungen der Störungsrechnung unabhängig vom Eichparameter  $\xi$  sind. Wie sich dieser in Rechnungen heraushebt ist allerdings zum jetzigen Zeitpunkt alles andere als klar. Man erwartet, dass sich der eichabhängige Anteil von Diagrammen mit Vektorboson-Austausch  $A_\mu^{(n)}$  gegen Diagramme mit Goldstone-Boson-Austausch  $\mathbf{A}_4^{(n)}$  weghebt. Nun sieht die Massenmatrix für  $\mathbf{A}_4^{(n)}$  jedoch völlig anders aus als die für  $A_\mu^{(n)}$ , sodass noch unklar ist, wie das Wegheben zwischen den Propagatortermen von Goldstone- und Vektorboson geschehen soll. Wir untersuchen dies genauer in Abschnitt 8.4.

Dafür berechnen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Massenmatrizen. Wir beginnen mit der Matrix  $M_A^2$  und schreiben diese mit

$$\alpha_n := \sqrt{2\pi} \chi^{(n)}(\pi) \quad (\alpha_0 = 1) \quad (8.18)$$

$$v^2 g_4^2 = m_A^{2(0,0)} \equiv m_A^2 \quad (8.19)$$

als:

$$M_A^2 = m_A^2 \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_1^2 + \frac{m_1^2}{m_A^2} & \alpha_1 \alpha_2 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_2 \alpha_1 & \alpha_2^2 + \frac{m_2^2}{m_A^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.20)$$

---

<sup>2</sup> $m_A^{(n,n)} := \sqrt{m_A^{2(n,n)}}$

Nun haben wir es hier, da unendlich viele KK-Moden existieren, mit einer unendlich-dimensionalen Matrix zu tun. Da sie jedoch eine regelmäßige Struktur hat, ist es trotzdem möglich sie zu diagonalisieren. Es gibt hier zwar, im Gegensatz zu flachen Extradimensionen [31, 32, 33], lauter verschiedene Faktoren auf den Offdiagonalen, da in RS alle KK-Moden unterschiedliche Profile bei der TeV-Brane haben, allerdings kann man das charakteristische Polynom für eine trunkierte Massenmatrix berechnen und dann zu  $n \rightarrow \infty$  extrapolieren. Es erweist sich als sinnvoll die erste Spalte und Zeile von  $M_A^2$  jeweils mit  $\alpha_0 (= 1)$  zu multiplizieren sowie im  $(0,0)$ -Eintrag  $m_0^2 = 0$  hinzuzuaddieren, um die Struktur besser zu sehen. Dann erhält man (z.B. mit Mathematica) das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det[M_A^2 - \lambda I] &= \prod_{j=0} (m_j^2 - \lambda) + \prod_{j=0} (m_j^2 - \lambda) \sum_{i=0} \frac{\alpha_i^2 m_A^2}{(m_i^2 - \lambda)} \\ &= \left( \prod_{j=1} (m_j^2 - \lambda) \right) \left( m_A^2 - \lambda - \lambda m_A^2 \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2}{(m_i^2 - \lambda)} \right) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Wenn man sich  $\det[M_A^2 - \lambda I]$  in der ursprünglichen Form ansieht, bemerkt man, dass  $\lambda = m_n^2$  keine Lösung ist. Es ist auch intuitiv einsichtig, dass die Diagonalelemente der diagonalisierten Matrix  $\tilde{M}_A^2$  nicht gerade exakt die KK-Massen sein sollten. Wir erhalten schließlich die transzendente Gleichung

$$m_A^2 - \lambda_m - \lambda_m m_A^2 \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2}{(m_i^2 - \lambda_m)} = 0 \quad (8.22)$$

für die Masseneigenwerte

$$\lambda_m \equiv \tilde{M}_A^{2(m,m)} \equiv M_A^{(m)2}. \quad (8.23)$$

Wir wollen nun die orthogonale Diagonalisierungsmatrix  $B$  für die reelle symmetrische Matrix  $M_A^2$  bestimmen mit  $B^T M_A^2 B = \tilde{M}_A^2$ ,  $BB^T = 1$ . Hierzu berechnen wir die Eigenvektoren von  $M_A^2$ . Wir können dann die Masseneigenzustände durch diese Eigenvektoren in der Wechselwirkungsbasis ausdrücken. Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{B}^{(m)} = (1, \tilde{\mathbf{B}}^{(m)})^T \quad (8.24)$$

für den Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_m$ . Es gilt dann

$$B^{(n,m)} = \hat{B}_n^{(m)}, \quad (8.25)$$

wobei  $\hat{B}_n^{(m)}$  die  $n$ . Komponente des *normierten* Eigenvektors  $\tilde{\mathbf{B}}^{(m)}$  bezeichnet. Die Eigenwertgleichung lautet:

$$m_A^2 \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \frac{m_1^2}{m_A^2} - \frac{\lambda_m}{m_A^2} & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 & \dots \\ \alpha_2 \alpha_1 & \alpha_2^2 + \frac{m_2^2}{m_A^2} - \frac{\lambda_m}{m_A^2} & \alpha_2 \alpha_3 & \dots \\ \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_3 \alpha_2 & \alpha_3^2 + \frac{m_3^2}{m_A^2} - \frac{\lambda_m}{m_A^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^{(m)} = -m_A^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

Die  $j$ . Komponente  $\tilde{B}_j^{(m)}$  des Eigenvektors  $\tilde{\mathbf{B}}^{(m)}$  ergibt sich nun mit der Cramer'schen Regel zu

$$\tilde{B}_j^{(m)} = \frac{D_j}{D} \quad (8.27)$$

mit

$$D = \det \left[ m_A^2 \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \frac{m_1^2}{m_A^2} - \frac{\lambda_m}{m_A^2} & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 & \dots \\ \alpha_2 \alpha_1 & \alpha_2^2 + \frac{m_2^2}{m_A^2} - \frac{\lambda_m}{m_A^2} & \alpha_2 \alpha_3 & \dots \\ \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_3 \alpha_2 & \alpha_3^2 + \frac{m_3^2}{m_A^2} - \frac{\lambda_m}{m_A^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right] \quad (8.28)$$

und  $D_j$  ist dieselbe Determinante, allerdings mit der  $j$ . Spalte ersetzt durch die rechte Seite von (8.26). Man erhält:

$$D_j = -\alpha_j m_A^2 \frac{\prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda_m)}{m_j^2 - \lambda_m} \quad (8.29)$$

$$D = \prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda_m) \left( 1 + m_A^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2 - \lambda_m} \right). \quad (8.30)$$

Unter Benutzung von (8.22) ergibt sich schließlich:

$$\tilde{B}_j^{(m)} = -\frac{\alpha_j \lambda_m}{m_j^2 - \lambda_m}. \quad (8.31)$$

Die eigentlich erste Zeile der Eigenwertgleichung, die in (8.26) außen vor gelassen wurde, reproduziert mit dieser Lösung gerade wieder (8.22). Wir normieren nun den Eigenvektor:

$$\hat{\mathbf{B}}^{(m)} = \frac{\mathbf{B}^{(m)}}{N_m^B} \quad (8.32)$$

mit

$$N_m^B = \sqrt{1 + \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2 \lambda_m^2}{(m_n^2 - \lambda_m)^2}}. \quad (8.33)$$

Der Zusammenhang zwischen Masseneigenzuständen  $\tilde{A}_\mu^{(n)}$  und Wechselwirkungseigenzuständen  $A_\mu^{(m)}$  ist also:

$$\tilde{A}_\mu^{(n)} = \sum_m B^{T(n,m)} A_\mu^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{j=1} \frac{\alpha_j^2 \lambda_n^2}{(m_j^2 - \lambda_n)^2}}} \left( A_\mu^{(0)} - \sum_{m=1} \frac{\alpha_m \lambda_n}{m_m^2 - \lambda_n} A_\mu^{(m)} \right). \quad (8.34)$$

Kommen wir nun zur Massenmatrix  $M_\xi^2$ . Wir schreiben diese als

$$M_\xi^2 = m_A^2 \begin{pmatrix} \sum_{n=0} \alpha_n^2 + \frac{m_0^2}{m_A^2} & \alpha_1 \frac{m_1}{m_A} & \alpha_2 \frac{m_2}{m_A} & \cdots \\ \alpha_1 \frac{m_1}{m_A} & \frac{m_1^2}{m_A^2} & 0 & \cdots \\ \alpha_2 \frac{m_2}{m_A} & 0 & \frac{m_2^2}{m_A^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Das charakteristische Polynom kann man hier sogar recht einfach per Hand bestimmen, indem man den Laplace'schen Determinantenentwicklungssatz anwendet. Etwas Bemerkenswertes passiert. Es ergibt sich:

$$\det[M_\xi^2 - \lambda I] = \left( \prod_{j=1} (m_j^2 - \lambda) \right) \left( m_A^2 - \lambda - \lambda m_A^2 \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2}{(m_i^2 - \lambda)} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.36)$$

und daraus wieder dieselbe transzendente Gleichung (8.22). Die beiden Matrizen  $M_\xi^2$  und  $M_A^2$  haben also dieselben Eigenwerte! Es existiert für jedes Vektorboson der Masse  $M_A^{(n)}$  ein Goldstone-Boson der (unphysikalischen) Masse  $\xi M_A^{(n)}$ , was für ein Wegheben des Eichparameters in der Störungsrechnung essentiell ist.

Wir wollen nun auch die Eigenvektoren von  $M_\xi^2$  und so die zugehörige Diagonalisierungsmatrix  $G$  mit  $G^T M_\xi^2 G = \tilde{M}_\xi^2$ ,  $GG^T = 1$  bestimmen. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{G}^{(m)} = (1, \tilde{\mathbf{G}}^{(m)})^T \quad (8.37)$$

erhalten wir die Eigenwertgleichung

$$m_A^2 \begin{pmatrix} \frac{m_1^2 - \lambda}{m_A^2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{m_2^2 - \lambda}{m_A^2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2 - \lambda}{m_A^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{(m)} = -m_A^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \frac{m_1}{m_A} \\ \alpha_2 \frac{m_2}{m_A} \\ \alpha_3 \frac{m_3}{m_A} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (8.38)$$

Es ergibt sich:

$$D_j = -\alpha_j m_j m_A \frac{\prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda_m)}{m_j^2 - \lambda_m} \quad (8.39)$$

$$D = \prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda_m) \quad (8.40)$$

und daraus:

$$\tilde{G}_j^{(m)} = \frac{-\alpha_j m_j m_A}{m_j^2 - \lambda_m}. \quad (8.41)$$

Wir normieren den Eigenvektor:

$$\widehat{\mathbf{G}}^{(m)} = \frac{\mathbf{G}^{(m)}}{N_m^G} \quad (8.42)$$

mit

$$N_m^G = \sqrt{1 + \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2 m_n^2 m_A^2}{(m_n^2 - \lambda_m)^2}}. \quad (8.43)$$

Für die Diagonalisierungsmatrix gilt wieder:

$$G^{(n,m)} = \widehat{G}_n^{(m)}. \quad (8.44)$$

Der Zusammenhang zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzuständen ist jetzt

$$\tilde{A}_4^{(n)} = \sum_m G^{T(n,m)} A_4^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{j=1} \frac{\alpha_j^2 m_j^2 m_A^2}{(m_j^2 - \lambda_n)^2}}} \left( A_4^{(0)} - \sum_{m=1} \frac{\alpha_m m_m m_A}{m_m^2 - \lambda_n} A_4^{(m)} \right). \quad (8.45)$$

Da wir (8.22) nicht analytisch lösen können, wollen wir nun eine Entwicklung in dem kleinen Parameter  $\epsilon := \frac{m_A}{m_{kk}}$  durchführen und eine Lösung bis zu einer bestimmten Ordnung in  $\epsilon$  bestimmen.<sup>3</sup> Dadurch lässt sich auch ein Ausdruck für die Diagonalisierungsmatrizen in dieser Ordnung angeben. Wir nehmen an, dass  $m_A$  im Bereich der Massen der schwachen Eichbosonen des SM liegt und die KK-Massen  $m_{kk}$  im TeV Bereich. Es gilt also  $\epsilon = O(10^{-1})$ .<sup>4</sup> Wir schreiben alle Größen als  $O(m_{kk}^D)$ -Koeffizienten und Potenzen  $\epsilon^n$ , wobei  $D$  die Massendimension der Größen bezeichnet. Dies erleichtert uns das Power-Counting. Wir geben den Koeffizienten keine neuen Namen, die Bedeutung ergibt sich aus dem Kontext. Wir wollen bis einschließlich  $O(\epsilon^4)$  rechnen und wählen für die Masse der Nullmode den Potenzreihenansatz:

$$\lambda_0 = c_0 \epsilon^2 + c_1 \epsilon^3 + c_2 \epsilon^4 + c_3 \epsilon^5 + O(\epsilon^6). \quad (8.46)$$

Die transzendente Gleichung (8.22) liefert nun durch einen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} c_0 &= m_A^2 \\ c_1 &= 0 \\ c_2 &= -m_A^4 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} \\ c_3 &= 0, \end{aligned} \quad (8.47)$$

sodass wir erhalten:

$$M_A^{(0)2} \equiv M_\xi^{(0)2} = m_A^2 - m_A^4 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} + O(\epsilon^6). \quad (8.48)$$

---

<sup>3</sup> $m_{kk}$  steht hier für eine feste Masse in der Größenordnung der Kaluza-Klein-Massen. Wir können z.B.  $m_{kk} = m_1$  wählen.

<sup>4</sup>Hier kommt uns das „little hierarchy problem“ zu Gute.



Für die KK-Moden verfahren wir genauso und es ergibt sich:

$$M_A^{(n)2} \equiv M_\xi^{(n)2} = m_n^2 + \alpha_n^2 m_A^2 + m_A^4 \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} \left( 1 - \sum_{j=1 \neq n} \frac{m_n^2 \alpha_j^2}{m_j^2 - m_n^2} \right) + O(\epsilon^6). \quad (8.49)$$

Wir sehen also, dass die Masse der Nullmode leicht erniedrigt wird, während die KK-Moden etwas schwerer werden. Interessanterweise hat nach Diagonalisieren die Goldstone-Nullmode auch eine endliche Masse. Wir setzen jetzt die Entwicklungen (8.48) und (8.49) in die Eigenvektoren (8.32) und (8.42) ein und erhalten für die Diagonalisierungsmatrizen in  $O(\epsilon^2)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \frac{m_A^2}{m_1^2} & \alpha_2 \frac{m_A^2}{m_2^2} & \alpha_3 \frac{m_A^2}{m_3^2} & \dots \\ -\alpha_1 \frac{m_A^2}{m_1^2} & 1 & \alpha_2 \alpha_1 \frac{m_A^2}{m_2^2 - m_1^2} & \alpha_3 \alpha_1 \frac{m_A^2}{m_3^2 - m_1^2} & \dots \\ -\alpha_2 \frac{m_A^2}{m_2^2} & \alpha_1 \alpha_2 \frac{m_A^2}{m_1^2 - m_2^2} & 1 & \alpha_3 \alpha_2 \frac{m_A^2}{m_3^2 - m_2^2} & \dots \\ -\alpha_3 \frac{m_A^2}{m_3^2} & \alpha_1 \alpha_3 \frac{m_A^2}{m_1^2 - m_3^2} & \alpha_2 \alpha_3 \frac{m_A^2}{m_2^2 - m_3^2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} m_A^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} & \alpha_1 \frac{m_A}{m_1} & \alpha_2 \frac{m_A}{m_2} & \alpha_3 \frac{m_A}{m_3} & \dots \\ -\alpha_1 \frac{m_A}{m_1} & 1 - \frac{1}{2} m_A^2 \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} & m_A^2 \frac{m_1}{m_2} \frac{\alpha_2 \alpha_1}{m_2^2 - m_1^2} & m_A^2 \frac{m_1}{m_3} \frac{\alpha_3 \alpha_1}{m_3^2 - m_1^2} & \dots \\ -\alpha_2 \frac{m_A}{m_2} & m_A^2 \frac{m_2}{m_1} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{m_1^2 - m_2^2} & 1 - \frac{1}{2} m_A^2 \frac{\alpha_2^2}{m_2^2} & m_A^2 \frac{m_2}{m_3} \frac{\alpha_3 \alpha_2}{m_3^2 - m_2^2} & \dots \\ -\alpha_3 \frac{m_A}{m_3} & m_A^2 \frac{m_3}{m_1} \frac{\alpha_1 \alpha_3}{m_1^2 - m_3^2} & m_A^2 \frac{m_3}{m_2} \frac{\alpha_2 \alpha_3}{m_2^2 - m_3^2} & 1 - \frac{1}{2} m_A^2 \frac{\alpha_3^2}{m_3^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

Man sieht hier, dass die Mischungen zwischen der Nullmode und den KK-Moden bei den Goldstonebosonen nur  $O(\epsilon)$  unterdrückt sind im Vergleich zu  $O(\epsilon^2)$  bei den Vektormoden.

### 8.3 Fermionkopplungen und Feynmanregeln

Im Folgenden sollen Feynmanregeln für das abelsche Higgs-Modell mit Brane-Fermionkopplungen in der effektiven 4D-Theorie in Masseneigenzuständen formuliert werden. Wir betrachten hier die massiven U(1)-Eichfelder und das Higgsfeld aus  $S_{AH}$ , sowie chirale Kopplungen an ein TeV-Brane-lokalisiertes massives Fermion (in Anlehnung an (7.47)). Das Setup wird (in WW-Eigenzuständen) beschrieben durch die 4D-Wirkung

$$S_{AH\psi}^{(4D)} := S_{AH2}^{(4D)} + S_\psi^{(4D)} + S_{Yukawa}^{(4D)} + S_{H(WW)}^{(4D)} \quad (8.52)$$

mit

$$\begin{aligned} S_\psi^{(4D)} &= i \int d^4x \bar{\psi}_L \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i\sqrt{2\pi} g_4 \sum_{n=0} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)}(\pi) \right) \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R \\ S_{Yukawa}^{(4D)} &= -\lambda_f (\bar{\psi}_L \Phi \psi_R + \bar{\psi}_R \Phi^* \psi_L). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Das Fermion erhält nun eine Masse

$$m_f = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (8.54)$$

Wir transformieren jetzt zu Masseneigenzuständen. Zuerst wollen wir die Propagatoren bestimmen. In Masseneigenzuständen formuliert lautet (8.14) nun:

$$\begin{aligned} S_{AH^2}^{(4D)} = & \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n=0} \tilde{A}_\mu^{(n)} \left[ \eta^{\mu\nu} \left( \partial^2 + M_A^{(n)2} \right) + \partial^\mu \partial^\nu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] \tilde{A}_\nu^{(n)} \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n=0} \tilde{A}_4^{(n)} \left[ \partial^2 + \xi M_A^{(n)2} \right] \tilde{A}_4^{(n)} \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x h \left[ \partial^2 + m_h^2 \right] h. \end{aligned} \quad (8.55)$$

### 8.3.1 Propagatoren

Analog zur Herleitung der Propagatoren für die reine Eichtheorie mit ungebrochener Symmetrie in Abschnitt 7.2 ergibt sich aus (8.55):

$$\langle \tilde{A}_\mu^{(n)} \tilde{A}_\nu^{(n)} \rangle = \frac{-i}{k^2 - M_A^{(n)2}} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M_A^{(n)2}} (1 - \xi) \right) \quad (8.56)$$

$$\langle \tilde{A}_4^{(n)} \tilde{A}_4^{(n)} \rangle = \frac{i}{k^2 - \xi M_A^{(n)2}}. \quad (8.57)$$

$\xi \rightarrow \infty$  entspricht wieder der, mit Vorsicht zu genießenden, unitären Eichung. Für eine weitere Komplikation sorgt nun die Tatsache, dass zwei verschiedene Massenskalen für die Bosonpropagatoren,  $m_W$  und  $m_{kk}$ , existieren. Die Eichinvarianz erlaubt uns jedoch auch in RS, eine beliebige  $R_\xi$ -Eichung zu wählen und so solche Probleme zu umgehen.

### 8.3.2 Vertices

Wir formulieren nun den Fermion-Kopplungsterm in Masseneigenzuständen. Bei der Yukawa-Kopplung interessieren wir uns nur für die Kopplung an das Goldstone-Boson  $\varphi \equiv A_4^{(0)}$ , da hier durch die Mischung mit  $A_4^{(n)}$  nichttriviale Effekte auftreten. Ansonsten sind die Kopplungen zwischen rein Brane-lokalisierten Feldern und deren Propagatoren genau wie in der reinen vierdimensionalen Theorie und können aus (8.53) abgeleitet bzw. in Lehrbüchern

wie [29, 3] nachgeschlagen werden.<sup>5</sup> Wir erhalten mit  $\mathbf{A}_\mu = B\tilde{\mathbf{A}}_\mu$  und  $\mathbf{A}_4 = G\tilde{\mathbf{A}}_4$ :

$$S_{\psi int}^{(4D)} + S_{Yukawa}^{(4D)} = \int d^4x \bar{\psi}_L \left( \gamma^\mu \sqrt{2\pi} g_4 \sum_{n=0} \sum_{m=0} B^{(n,m)} \tilde{A}_\mu^{(m)} \chi^{(n)}(\pi) \right) \psi_L - i \int d^4x \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \left( \bar{\psi}_L \sum_{m=0} G^{(0,m)} \tilde{A}_4^{(m)} \psi_R - \bar{\psi}_R \sum_{m=0} G^{(0,m)} \tilde{A}_4^{(m)} \psi_L \right). \quad (8.58)$$

Folglich ergeben sich die Feynmanregeln für die Kopplung von  $\tilde{A}_\mu^{(m)}$  sowie  $\tilde{A}_4^{(m)}$  an zwei Brane-Fermionen zu:

$$= i\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \sqrt{2\pi} g_4 \sum_{n=0} B^{(n,m)} \chi^{(n)}(\pi)$$

$$= \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \gamma^5 G^{(0,m)}$$

B und G sind aus (8.34) bzw. (8.45) zu entnehmen.  $\tilde{A}_4^{(m)}$  koppelt nur über seine Nullmodenbeimischung  $\sim G^{(0,m)}$ , da die Anregungen auf der Brane verschwinden. Weitere Kopplungen zwischen Bulk- und Brane-Feldern kommen aus  $S_{H(WW)}^{(4D)}$ . Diese kann man analog berechnen. Beispielhaft wollen wir hier noch die  $h\tilde{A}_\mu^{(m)}\tilde{A}_\nu^{(n)}$ - sowie die  $h\tilde{A}_\mu^{(m)}\tilde{A}_\nu^{(n)}$ -Kopplung angeben. Diese erhält man aus

$$S_{H(WW)}^{(4D)} \ni \int d^4x \sum_{m,n,k,l} 2\pi g_4^2 B^{(k,m)} \tilde{A}_\mu^{(m)} B^{(l,n)} \tilde{A}_\nu^{(n)} \chi^{(l)}(\pi) \chi^{(k)}(\pi) \eta^{\mu\nu} \frac{h^2 + 2vh}{2} \quad (8.59)$$

zu

<sup>5</sup>Die Verallgemeinerung auf des SM ist möglich, indem man analog der bisherigen Verfahrensweise in der Wirkung zu  $\mathcal{L}_{SM}$  (2.8) eine Kaluza-Klein-Zerlegung für Bulk-Felder durchführt und über  $\phi$  integriert. Danach kann man die Propagatoren und Kopplungen ablesen.

$$= i\eta^{\mu\nu} 2\pi \frac{2m_A^2}{v} \sum_{k,l} B^{(k,m)} B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi) \chi^{(k)}(\pi)$$

$$= i\eta^{\mu\nu} 2\pi \frac{2m_A^2}{v^2} \sum_{k,l} B^{(k,m)} B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi) \chi^{(k)}(\pi)$$

## 8.4 $\xi$ -Unabhängigkeit von Amplituden

Wir wollen nun die  $\xi$ -Unabhängigkeit in der Störungsrechnung an einem Beispiel überprüfen. Hierzu betrachten wir eine Streuung zwischen zwei Brane-Fermionen  $\Psi$  auf Baumgraphenniveau. Es gibt hier Beiträge durch Vektorboson-Austausch, durch Goldstone-Austausch und durch Higgs-Austausch (siehe Abb. 8.1). Die  $\xi$ -Abhängigkeit steckt allerdings nur in den ersten beiden Diagrammen und muss sich zwischen diesen beiden wegheben. Wir wollen diese nun, mittels der in diesem Kapitel angegebenen Feynmanregeln, ausrechnen.

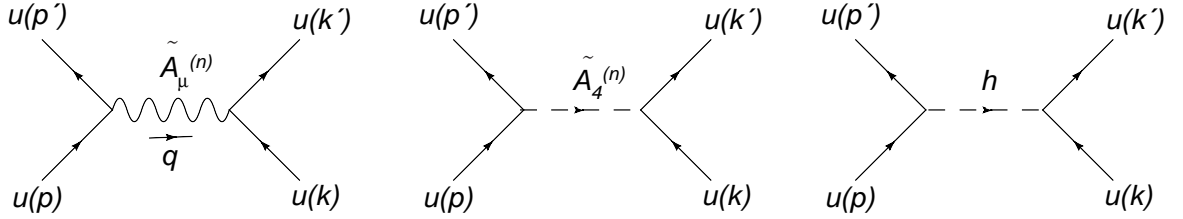


Abbildung 8.1: Tree-Level-Beiträge zur Fermion-Fermion-Streuung im abelschen Higgs-Modell.

Wir betrachten zunächst den Vektorbosonaustausch:

$$\mathcal{M}_{\tilde{A}_\mu^{(n)}} = -2\pi g_4^2 \bar{u}(p') \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u(p) \bar{u}(k') \gamma_\nu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u(k) \sum_{k,l=0} B^{(k,n)} \chi^{(k)}(\pi) B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi) \times \frac{-i}{q^2 - M_A^{(n)2}} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \xi M_A^{(n)2}} (1-\xi) \right). \quad (8.60)$$

Wir zerlegen den Propagator in der zweiten Zeile jetzt in einen  $\xi$ -abhängigen und einen  $\xi$ -unabhängigen Teil:

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{q^2 - M_A^{(n)2}} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_A^{(n)2}} + q^\mu q^\nu \left[ \frac{1}{M_A^{(n)2}} - \frac{1}{q^2 - \xi M_A^{(n)2}} (1 - \xi) \right] \right) \\ &= \frac{-i}{q^2 - M_A^{(n)2}} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_A^{(n)2}} \right) + \frac{-i}{q^2 - \xi M_A^{(n)2}} \frac{q^\mu q^\nu}{M_A^{(n)2}}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Für das Wegheben des Eichparameters kann also nur der zweite Teil verantwortlich sein und wir betrachten nur diesen in (8.60). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tilde{A}_\mu^{(n)}}(\xi) &= \frac{i2\pi g_4^2}{(q^2 - \xi M_A^{(n)2}) M_A^{(n)2}} \bar{u}(p') (\not{p}' - \not{p}') \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(p) \bar{u}(k') (\not{k}' - \not{k}') \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(k) \\ &\quad \cdot \sum_{k,l=0} B^{(k,n)} \chi^{(k)}(\pi) B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi). \end{aligned} \quad (8.62)$$

Wir wenden jetzt die Dirac-Gleichung  $(\not{p}' - m)u(p) = 0$  an. Es ergibt sich mit  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ :

$$\mathcal{M}_{\tilde{A}_\mu^{(n)}}(\xi) = \frac{-i2\pi g_4^2 m_f^2}{(q^2 - \xi M_A^{(n)2}) M_A^{(n)2}} \bar{u}(p') \gamma^5 u(p) \bar{u}(k') \gamma^5 u(k) \sum_{k,l=0} B^{(k,n)} \chi^{(k)}(\pi) B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi). \quad (8.63)$$

Kommen wir nun zum Goldstone-Boson-Austausch:

$$\mathcal{M}_{\tilde{A}_4^{(n)}} = \frac{\lambda_f^2}{2} \bar{u}(p') \gamma^5 u(p) \bar{u}(k') \gamma^5 u(k) G^{(0,n)} G^{(0,n)} \frac{i}{q^2 - \xi M_A^{(n)2}}. \quad (8.64)$$

Die beiden Beiträge haben schon dieselbe Dirac-Struktur und Boson-Masse, allerdings sehen sie ansonsten noch recht unterschiedlich aus. Man muss zwar am Ende über alle Zwischenzustände (es werden alle Moden  $n = 0, 1, \dots, \infty$  ausgetauscht) summieren, allerdings sollte das Wegheben unabhängig in jedem KK-Level funktionieren, da nur innerhalb eines KK-Levels dieselben Boson-Massen im Zähler stehen. Auffällig ist, dass die  $\varphi$ -Beimischung beim  $A_4^{(n)}$ -Austausch (für festes  $n$ ), die der einzige Beitrag ist, der an Brane-Fermionen koppelt, sich alleine gegen die unendliche Summe von Vektor-Beimischungen in  $A_\mu^{(n)}$  wegheben muss. Wir addieren (8.63) und (8.64) unter Benutzung von (8.54) und (8.19):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tilde{A}_\mu^{(n)}}(\xi) + \mathcal{M}_{\tilde{A}_4^{(n)}} &= \frac{-im_f^2}{(q^2 - \xi M_A^{(n)2}) v^2} \bar{u}(p') \gamma^5 u(p) \bar{u}(k') \gamma^5 u(k) \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{m_A^2}{M_A^{(n)2}} 2\pi \sum_{k,l=0} B^{(k,n)} \chi^{(k)}(\pi) B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi) - G^{(0,n)} G^{(0,n)} \right\}. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Die Beiträge heben sich weg, falls ( $M_A^{(n)} \equiv \sqrt{\lambda_n}$ )

$$\left( \frac{m_A}{\sqrt{\lambda_n}} \sqrt{2\pi} \sum_{k=0} B^{(k,n)} \chi^{(k)}(\pi) \right)^2 \stackrel{?}{=} (G^{(0,n)})^2 \quad (8.66)$$

gilt. Wir wollen diese Bedingung nun vereinfachen. Zunächst setzen wir die konkreten Ausdrücke für B (8.34) und G (8.45) ein ( $\alpha_n \equiv \sqrt{2\pi} \chi^{(n)}(\pi)$ ). Danach nutzen wir die transzendente Gleichung (8.22) aus. Schließlich bilden wir den Kehrwert der Gleichung und führen das Quadrat aus.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{m_A}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{k=0} \frac{-\alpha_k^2 \lambda_n}{m_k^2 - \lambda_n} \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 \lambda_n^2}{(m_i^2 - \lambda_n)^2}}} \right)^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 m_i^2 m_A^2}{(m_i^2 - \lambda_n)^2}}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{m_A}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \frac{m_A^2 - \lambda_n}{m_A^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 \lambda_n^2}{(m_i^2 - \lambda_n)^2}}} \right)^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 m_i^2 m_A^2}{(m_i^2 - \lambda_n)^2}}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{m_A^2}{\lambda_n} \left( 1 + \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 \lambda_n^2}{(m_i^2 - \lambda_n)^2} \right) = 1 + \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 m_i^2 m_A^2}{(m_i^2 - \lambda_n)^2}. \end{aligned}$$

Dies formen wir um zu

$$\begin{aligned} \frac{m_A^2}{\lambda_n} - 1 &= \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 m_A^2 (m_i^2 - \lambda_n)}{(m_i^2 - \lambda_n)^2} \\ \Leftrightarrow m_A^2 - \lambda_n - \lambda_n m_A^2 \sum_{i=1} \frac{\alpha_i^2 \lambda_n}{(m_i^2 - \lambda_n)} &= 0, \quad (8.67) \end{aligned}$$

was gerade die transzendente Gleichung für die Masseneigenwerte (8.22) ist. Somit wurde das Herausfallen des Eichparameters in diesem Beispiel, Mode für Mode, gezeigt. Man kann die Unabhängigkeit vom Eichparameter auch in einer festen Ordnung in  $m_A/m_{kk}$  nachweisen, indem man die Entwicklungen für die Diagonalisierungsmatrizen und Masseneigenwerte in (8.65) einsetzt.

# Kapitel 9

## Fermionen im Bulk

In diesem Kapitel wollen wir uns mit 5D-Fermionen im Randall-Sundrum-Szenario beschäftigen. Dies eröffnet insbesondere interessante Interpretationsmöglichkeiten in der Flavorphysik. Es wurde zuerst studiert von Yuval Grossman und Matthias Neubert [34].

Um Fermionen in fünf Dimensionen beschreiben zu können, wird eine Darstellung der 5D-Clifford-Algebra

$$\{\Gamma_m, \Gamma_n\} = 2\eta_{mn} \quad (9.1)$$

benötigt. Solch eine erhält man, wenn man  $\gamma^5$  zu den Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$  hinzunimmt (siehe Abschnitt 7.3), also

$$\Gamma^m = (\gamma^\mu, i\gamma^5). \quad (9.2)$$

Jetzt ergibt sich zunächst ein Problem. In einer vierdimensionalen Raumzeit dient  $\gamma^5$  als „Chiralitäts-Matrix“ zur Konstruktion der Projektoren auf links- bzw. rechtshändige Zustände  $P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2}$ . In fünf Dimensionen gehört  $\gamma^5$  nun zur Darstellung der Clifford-Algebra und es gibt keine Möglichkeit solche Projektoren zu konstruieren. Dies ist allgemein so in einer ungeraden Anzahl an Dimensionen. Hier ist die vierkomponentige Dirac-Spinor-Darstellung irreduzibel. Es existieren so in der 5D-Theorie nur Dirac-Spinoren und es ist an dieser Stelle noch nicht klar, wie das Standardmodell als chirale Theorie hieraus hervorgehen soll. Im SM haben links- und rechtshändige Felder unterschiedliche Eichquantenzahlen während in der 5D-Theorie diese nun als Teil des irreduziblen vierkomponentigen Dirac-Spinors die gleichen Eichquantenzahlen haben müssen. Man benötigt nun für jedes SM-Weyl-Fermion ein 5D-Dirac-Fermion und bewirkt so in der effektiven 4D-Niederenergie Theorie eine Verdopplung der Freiheitsgrade gegenüber dem SM. Eine Lösung für dieses Problem bietet wiederum die Kompaktifizierung auf dem Orbifold, wie im nächsten Abschnitt erläutert wird.

## 9.1 Setup, Kaluza-Klein-Zerlegung und Spektrum

Ausgangspunkt ist die fünfdimensionale Wirkung für ein Dirac-Fermion:

$$S_f = \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \left\{ E_m^M \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^m \left( \partial_M - \overleftarrow{\partial}_M \right) \Psi + \frac{\omega_{jkM}}{8} \bar{\Psi} \{ \Gamma^m, \sigma^{jk} \} \Psi \right] - m \operatorname{sgn}(\phi) \bar{\Psi} \Psi \right\} \quad (9.3)$$

Der Massenparameter  $m$  ist bei der fundamentalen Skala  $M$  anzusiedeln. Der Vorzeichenwechsel des Massenterms unter  $\phi \leftrightarrow -\phi$  wird benötigt, damit die Wirkung invariant unter  $Z_2$ -Transformationen ist, was die Orbifold-Symmetrie verlangt. Dieser Massenterm kann z.B. durch ein Bulk-Skalarfeld erzeugt werden, dessen VEV gerade ein solches Sprung-Profil besitzt. Um eine Verletzung der Invarianz auf Quanten-Niveau zu vermeiden („Paritäts-Anomalie“ [35, 36]) muss man später eine gerade Anzahl Bulk-Fermionen einführen.  $E_m^M = \operatorname{diag}(e^\sigma, e^\sigma, e^\sigma, e^\sigma, 1/r)$  ist wieder das inverse Vielbein (siehe Abschnitt 7.3) und  $\omega_{jkM}$  der Spinzusammenhang.<sup>1</sup> Dieser wird für die kovariante Ableitung eines lokalen Lorentz-Vektors  $v^m$  entlang des Basisvektors  $\partial_M$  benötigt. Wir wollen ihn nun für die Metrik 6.1 berechnen.

### Spinzusammenhang

Der Spinzusammenhang folgt nun aus (siehe z.B. [37])

$$\begin{aligned} D_M v^N &= \partial_M v^N + \Gamma^N{}_{MR} v^R = E_j^N \partial_M v^j + (\partial_M E_j^N) v^j + \Gamma^N{}_{MR} E_j^R v^j \\ &\equiv E_j^N \underbrace{(\partial_M v^j + \omega^{jk}{}_{M} v_k)}_{=: D_M v^j}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Man erhält

$$\omega^{jk}{}_{M} v_k = E_N^j ((\partial_M E_l^N) + \Gamma^N{}_{MR} E_l^R) v^l. \quad (9.5)$$

Mit  $v_k = \Gamma_k$  ergibt sich:

$$\omega^{jk}{}_{M} \Gamma_k \Gamma_j = E_N^j ((\partial_M E_l^N) + \Gamma^N{}_{MR} E_l^R) \Gamma^l \Gamma_j. \quad (9.6)$$

Wir setzen nun die Christoffelsymbole (6.7a),(6.7b),(6.7c) ein und erhalten mit  $\{\Gamma_m, \Gamma_4\} = 0$ :

$$\begin{aligned} \omega^{jk}{}_{4} \Gamma_k \Gamma_j &= \omega^{jk}{}_{4} \Gamma_j \Gamma_k = (e^{-\sigma} (\partial_\phi e^\sigma) - e^{-\sigma} \sigma' e^\sigma) \Gamma^j \Gamma_j = 0 \\ \omega^{jk}{}_{\mu} \Gamma_k \Gamma_j &= -\omega^{jk}{}_{\mu} \Gamma_j \Gamma_k = \left( -r \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \sigma' e^\sigma \delta_\mu^m \Gamma_m \Gamma_4 - e^{-\sigma} \sigma' \frac{1}{r} \delta_\mu^m \Gamma^4 \Gamma_m \right) \\ &= -2e^{-\sigma} k \operatorname{sgn}(\phi) \delta_\mu^m \Gamma_m \Gamma_4. \end{aligned} \quad (9.7)$$

---

<sup>1</sup>  $\sigma^{jk} := \frac{i}{2} [\Gamma^j, \Gamma^k]$



Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{jk4}}{8} \bar{\psi} \{ \Gamma^m, \sigma^{jk} \} \psi &= 0 \\ \frac{\omega_{jk\mu}}{8} \bar{\psi} \{ \Gamma^m, \sigma^{jk} \} \psi &= \frac{i\omega_{jk\mu}}{16} \bar{\psi} \{ \Gamma^m, [\Gamma^j, \Gamma^k] \} = \frac{i}{4} \bar{\psi} \{ \Gamma^m, e^{-\sigma} k \operatorname{sgn}(\phi) \delta_\mu^m \Gamma_m \Gamma_4 \} = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Der Spinzusammenhang liefert also keinen Beitrag zur Wirkung. Diese wird zu:

$$S_f = \int d^4x \int rd\phi e^{-4\sigma} \left\{ e^\sigma \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\not{\partial} - \overleftarrow{\not{\partial}}) \Psi - \frac{1}{2r} \bar{\Psi} \gamma^5 (\partial_\phi - \overleftarrow{\partial}_\phi) \Psi \right\}. \quad (9.9)$$

## Kaluza-Klein-Zerlegung und Spektrum

Wir definieren zunächst links- und rechtshändige Spinoren  $\Psi_{L,R} \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)\Psi$  und integrieren partiell. Dadurch lässt sich die Wirkung (9.9) schreiben als

$$\begin{aligned} S_f &= \int d^4x \int rd\phi \left\{ e^{-3\sigma} (\bar{\Psi}_L i \not{\partial} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \not{\partial} \Psi_R) - e^{-4\sigma} m \operatorname{sgn}(\phi) (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) \right\} \\ &\quad - \int d^4x \int rd\phi \frac{1}{2r} \left\{ \bar{\Psi}_L (e^{-4\sigma} \partial_\phi + \partial_\phi e^{-4\sigma}) \Psi_R - \bar{\Psi}_R (e^{-4\sigma} \partial_\phi + \partial_\phi e^{-4\sigma}) \Psi_L \right\}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Damit diese invariant unter  $Z_2$ -Transformationen ist, müssen  $\Psi_L(x, \phi)$  und  $\Psi_R(x, \phi)$  entgegengesetzte  $Z_2$ -Parität haben. Durch die Orbifold-Kompaktifizierung folgt also, dass nur entweder für  $\Psi_L$  oder für  $\Psi_R$  eine Nullmode existiert, sodass die effektive Niederenergie-theorie auf chiralen zweikomponentigen Weyl-Spinoren basiert und das Problem der Verdopplung gelöst ist. Man braucht nun, um das SM modellieren zu können, zwei Sätze von Fermionen. Es wird ein Satz benötigt, bei dem  $\Psi_L$  gerade ist und der eine Ladung bezüglich  $SU(2)_L$  besitzt, dessen Nullmoden entsprechen dann den linkshändigen SM-Feldern. Des Weiteren braucht man einen Satz mit geradem  $\Psi_R$ , welcher ein Singlett unter  $SU(2)_L$  ist. Beim abelschen Higgs-Modell aus Abschnitt 8.3 gilt diese Betrachtung bezüglich der  $U(1)$ -Eichgruppe. Hierdurch wird, auch falls man nur einen Flavor betrachten will, die angesprochene „parity anomaly“ vermieden

Für die Kaluza-Klein-Zerlegung schreiben wir:

$$\psi_{L,R}(x, \phi) = \sum_n \psi_n^{L,R}(x) \frac{e^{2\sigma}}{\sqrt{r}} \hat{f}_n^{L,R}(\phi). \quad (9.11)$$

$\{\hat{f}_n^L(\phi)\}$  und  $\{\hat{f}_n^R(\phi)\}$  seien vollständige und bezüglich des folgenden Skalarprodukts (9.12) orthonormierte Sätze von Funktionen auf  $[0, \pi]$  mit passenden Randbedingungen<sup>2</sup>:

$$2 \int_0^\pi d\phi e^\sigma \hat{f}_n^{L*,R*}(\phi) \hat{f}_m^{L,R}(\phi) = \delta_{nm}. \quad (9.12)$$

<sup>2</sup>Wir betrachten aufgrund der definierten  $Z_2$ -Parität die Funktionen wieder nur auf  $[0, \pi]$ , normieren diese aber über den ganzen Orbifold. Dies ist relevant, wenn man Wechselwirkungen (Überlappintegrale) von drei oder mehr Feldern studieren will. Die  $Z_2$ -Parität muss natürlich bei der Integration immer berücksichtigt werden. Wenn Integrale ohne Grenzen angegeben werden, entsprechen diese immer der Integration über den kompletten Orbifold.

Wir fordern nun:

$$\left(\pm\frac{1}{r}\partial_\phi - m\right)\hat{f}_n^{L,R}(\phi) = -M_n e^\sigma \hat{f}_n^{R,L}(\phi). \quad (9.13)$$

$\{\hat{f}_n^{L,R}(\phi)\}$  werden also wieder konstruiert als Eigenfunktionen zu einem hermiteschen Operator. Die Hermitizität des Operators ist durch die Randbedingungen  $\hat{f}_n^{L*}(0)\hat{f}_m^R(0) = \hat{f}_n^{L*}(\pi)\hat{f}_m^R(\pi) = 0$  gesichert. Die Eigenwerte  $M_n$  sind deswegen auch reell, sodass wir nun  $\hat{f}_n^{L,R}$  o.B.d.A. reell wählen.

Jetzt ergibt sich, wenn man (9.11) in (9.10) einsetzt, die bekannte Dirac-Wirkung für massive Fermionen der Masse  $M_n$  in vier Dimensionen:

$$\begin{aligned} S_f &= \int d^4x \sum_n (\bar{\psi}_n^L i\not{\partial} \psi_n^L + \bar{\psi}_m^R i\not{\partial} \psi_m^R) \\ &\quad - \int d^4x \int d\phi \sum_{n,m} m \operatorname{sgn}(\phi) \left( \bar{\psi}_n^L \hat{f}_n^L \psi_m^R \hat{f}_m^R + \bar{\psi}_m^R \hat{f}_m^R \psi_n^L \hat{f}_n^L \right) \\ &\quad - \frac{1}{2r} \int d^4x \int d\phi \sum_{n,m} [\bar{\psi}_n^L \hat{f}_n^L (e^{-2\sigma} \partial_\phi e^{2\sigma} + e^{-2\sigma} \partial_\phi e^{2\sigma}) \psi_m^R \hat{f}_m^R \\ &\quad\quad\quad - \bar{\psi}_m^R \hat{f}_m^R (e^{-2\sigma} \partial_\phi e^{2\sigma} + e^{-2\sigma} \partial_\phi e^{2\sigma}) \psi_n^L \hat{f}_n^L] \\ &= \int d^4x \sum_n \{ \bar{\psi}_n(x) i\not{\partial} \psi_n(x) - M_n \bar{\psi}_n(x) \psi_n(x) \}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

mit  $\psi \equiv \psi_L + \psi_R$ , außer für die chiralen Nullmoden  $\psi_0^{L,R}$ .

Es ist für konkrete (vor allem numerische) Rechnungen sinnvoll, eine Variablentransformation durchzuführen:

$$\hat{f}_n^{L,R}(\phi) \rightarrow \sqrt{kr\epsilon} f_n^{L,R}(t), \quad (9.15)$$

mit

$$t = \epsilon e^\sigma \in [\epsilon, 1], \quad \epsilon = e^{-kr\pi} \sim 10^{-16}. \quad (9.16)$$

Die Relationen (9.12) und (9.13) werden in dieser Notation mit  $\partial_\phi = krt\partial_t$  und

$$c := \frac{m}{k}, \quad X_n := \frac{M_n}{\epsilon k} \quad (9.17)$$

zu

$$2 \int_\epsilon^1 dt f_n^{L,R}(t) f_m^{L,R}(t) = \delta_{nm} \quad (9.18)$$

$$(\pm t \partial_t - c) f_n^{L,R}(t) = -X_n t f_n^{R,L}(t). \quad (9.19)$$

Wir formen die gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung (9.19) nun um zu entkoppelten DGLs zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &(\pm t \partial_t - c) \frac{(\mp t \partial_t - c)}{X_n t} f_n^{R,L}(t) = X_n t f_n^{R,L}(t) \\ \Leftrightarrow &(\pm t \partial_t - c) \left( \mp t \partial_t - \frac{c}{t} \right) f_n^{R,L}(t) = X_n^2 t f_n^{R,L}(t) \\ \Leftrightarrow &[t^2 \partial_t^2 + X_n^2 t^2 - c(c \pm 1)] f_n^{R,L}(t) = 0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Man sieht nun, dass für beliebige Werte der 5D-Masse  $m$  eine Nullmode ( $X_n = 0$ ) existiert mit

$$f_0^{L,R}(t) = N_{L,R} t^{\pm c}, \quad N_{L,R}^2 = \frac{1/2 \pm c}{1 - \epsilon^{1 \pm 2c}} = \left| f_0^{L,R}(1) \right|^2. \quad (9.21)$$

In  $\phi$ -Notation wird dies zu

$$\hat{f}_0^{L,R}(\phi) = N_{L,R} e^{\pm c\sigma}, \quad N_{L,R}^2 = \frac{(1/2 \pm c)kr}{e^{(1/2 \pm c)2kr\pi} - 1}. \quad (9.22)$$

Dies steht im Gegensatz zum Eichboson-Sektor, bei dem eine masselose Mode nur für verschwindende 5D-Masse existiert und flach ist. Die Fermion Nullmode kann nun je nach Wahl von  $c$  verschieden in der Extradimension lokalisiert werden. Z.B. erreicht man für rechtshändige Fermionen durch  $c > 1/2$  eine Lokalisierung bei der Planck-Brane. Für den Fall  $X_n > 0$  schreiben wir (9.20) mit  $g(t) := \frac{f^{L,R}(t)}{\sqrt{t}}$  als

$$(t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + X_n^2 t^2 - (c \mp \frac{1}{2})^2) g(t) = 0. \quad (9.23)$$

Wenn man jetzt die Variable reskaliert  $g(t) \rightarrow g(X_n t)$ , erhält man die Bessel'sche DGL:

$$\left( X_n^2 t^2 g''(X_n t) + X_n t g'(X_n t) + X_n^2 t^2 g(X_n t) - \left( c \mp \frac{1}{2} \right)^2 g(X_n t) \right) = 0, \quad (9.24)$$

mit der allgemeinen Lösung für  $c \neq n + 1/2$  ( $n \in \mathbb{N}$ )<sup>3</sup>:

$$f_n^{L,R}(t) = \sqrt{t} \left[ a_n^{L,R} J_{\frac{1}{2} \mp c}(X_n t) + b_n^{L,R} J_{-\frac{1}{2} \pm c}(X_n t) \right]. \quad (9.25)$$

Aus Gleichung (9.19), die  $f_n^L$  und  $f_n^R$  verknüpft, erhält man nun, indem man Ableitungsregeln für die Besselfunktionen benutzt,  $b_n^L = a_n^R$  und  $b_n^R = -a_n^L$ . Somit ergibt sich letztendlich:

$$\begin{aligned} f_n^L(t) &= \sqrt{t} \left[ a_n^L J_{\frac{1}{2} - c}(X_n t) + a_n^R J_{-\frac{1}{2} + c}(X_n t) \right] \\ f_n^R(t) &= \sqrt{t} \left[ a_n^R J_{\frac{1}{2} + c}(X_n t) - a_n^L J_{-\frac{1}{2} - c}(X_n t) \right]. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Die Masseneigenwerte  $X_n$  sowie die Koeffizienten  $a_n^{L,R}$  ergeben sich nun aus den Randbedingungen und der Normierung. Man kann entweder die linkshändigen oder die rechtshändigen Moden gerade unter  $Z_2$  wählen, sodass eine Nullmode existiert. Wir benutzen  $J_n(x) \sim x^n$  für  $x \rightarrow 0$  und rechnen im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$

Fall L:  $Z(\Psi_L) = +\Psi_L$

Die Randbedingungen sind nun  $f_n^R(\epsilon) = f_n^R(1) = 0$ .

<sup>3</sup>Der Fall  $c=1/2$  kann durch Limesbildung erreicht werden.

Aus  $f_n^R(\epsilon) = 0$  ergibt sich  $a_n^L = 0$ . Aus  $f_n^R(1) = 0$  folgt  $J_{\frac{1}{2}+c}(X_n) = 0$  und somit eine Bestimmungsgleichung für die KK-Massen. Die Normierung ist  $a_n^R = 1/|J_{\frac{3}{2}+c}(X_n)|$ . Man erhält also

$$\begin{aligned} f_n^L(t) &= \sqrt{t} \frac{J_{-\frac{1}{2}+c}(X_n t)}{|J_{\frac{3}{2}+c}(X_n)|} \\ f_n^R(t) &= \sqrt{t} \frac{J_{\frac{1}{2}+c}(X_n t)}{|J_{\frac{3}{2}+c}(X_n)|} \\ \text{Massen : } &J_{\frac{1}{2}+c}(X_n) = 0. \end{aligned} \tag{9.27}$$

Analog betrachtet man den zweiten Fall. Hier gelten die Randbedingungen  $f_n^L(\epsilon) = f_n^L(1) = 0$  und es ist zu beachten, dass man eine weitere Fallunterscheidung zwischen  $c < 1/2$  und  $c > 1/2$  benötigt.

Fall R:  $Z(\Psi_R) = +\Psi_R$

$c < 1/2$ :

$$\begin{aligned} f_n^L(t) &= \sqrt{t} \frac{J_{\frac{1}{2}-c}(X_n t)}{|J_{\frac{3}{2}-c}(X_n)|} \\ f_n^R(t) &= -\sqrt{t} \frac{J_{-\frac{1}{2}-c}(X_n t)}{|J_{\frac{3}{2}-c}(X_n)|} \\ \text{Massen : } &J_{\frac{1}{2}-c}(X_n) = 0. \end{aligned} \tag{9.28}$$

$c > 1/2$ :

$$\begin{aligned} f_n^L(t) &= \sqrt{t} \frac{J_{-\frac{1}{2}+c}(X_n t)}{|J_{\frac{1}{2}+c}(X_n)|} \\ f_n^R(t) &= \sqrt{t} \frac{J_{\frac{1}{2}+c}(X_n t)}{|J_{\frac{1}{2}+c}(X_n)|} \\ \text{Massen : } &J_{\frac{1}{2}-c}(X_n) = 0. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Die Massen der Kaluza-Klein-Fermionen liegen wieder im  $TeV$ -Bereich.

## 9.2 Yukawa- und Eichboson-Wechselwirkung

Die Bulk-Fermionen sollen nun durch Kopplung an ein  $TeV$ -Brane-lokalisiertes Higgs-Feld eine Masse erlangen. Dies ist von Nöten, um bei niedrigen Energien das SM zu erhalten, da bisher die Nullmoden der Fermionen masselos sind. Wie in Abschnitt 9.1 erläutert, werden zwei 5D-Dirac-Fermionen benötigt, um die links- und rechtshändigen SM-Fermionen zu

erhalten. Zudem betrachten wir wieder eine chirale Wechselwirkung mit einem abelschen U(1)-Eichfeld analog zu (8.53). Wir arbeiten mit dem U(1)-geladenen Fermion  $\Psi^{(d)}(x, \phi)$  und dem ungeladenen  $\Psi^{(s)}(x, \phi)$ . Die  $Z_2$ -Paritäten werden, um bei niedrigen Energien eine linkshändige WW mit dem Eichboson zu erhalten, so gewählt, dass  $\Psi_L^{(d)}(x, \phi)$  sowie  $\Psi_R^{(s)}(x, \phi)$  eine Nullmode besitzen. Die 5D-Wirkung für das Modell ist nun:

$$\begin{aligned}
S_F = & \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \\
& \left\{ E_m^M \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi}^{(d)} \Gamma^m \left( \partial_M - \overleftarrow{\partial}_M \right) \Psi^{(d)} + \bar{\Psi}^{(d)} \Gamma^m g_5 A_M(x, \phi) \Psi^{(d)} \right] - m_d \text{sgn}(\phi) \bar{\Psi}^{(d)} \Psi^{(d)} \right\} \\
& + \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \left\{ E_m^M \frac{i}{2} \bar{\Psi}^{(s)} \Gamma^m \left( \partial_M - \overleftarrow{\partial}_M \right) \Psi^{(s)} - m_s \text{sgn}(\phi) \bar{\Psi}^{(s)} \Psi^{(s)} \right\} \\
& + S_Y
\end{aligned} \tag{9.30}$$

mit der allgemeinsten eichinvarianten Yukawa-Kopplung

$$S_Y = - \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \left( \lambda_f^{(5)} \bar{\Psi}_L^{(d)} \Phi \Psi_R^{(s)} + \lambda_{f2}^{(5)} \bar{\Psi}_L^{(s)} \Phi \Psi_R^{(d)} + h.c. \right) \delta(\phi - \pi). \tag{9.31}$$

Der zweite Term verschwindet aufgrund der Randbedingungen ( $\bar{\Psi}_L^{(s)}(x, \pi) = \Psi_R^{(d)}(x, \pi) = 0$ ).

### 9.2.1 Yukawa-Wechselwirkung

Wir setzen nun die Zerlegung (9.11) in (9.31) ein und erhalten:

$$S_Y = - \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \lambda_f^{(5)} \left( \sum_{n,m} \bar{\psi}_n^{L(d)}(x) \Phi(x) \psi_m^{R(s)}(x) \frac{e^{4\sigma}}{r} \hat{f}_n^{L(d)}(\phi) \hat{f}_m^{R(s)}(\phi) + h.c. \right) \delta(\phi - \pi). \tag{9.32}$$

Nach Ausführen des Integrals über  $\phi$  und der Reskalierung  $\Phi \rightarrow e^{kr\pi} \Phi$  erhält man

$$S_Y^{(4D)} = - \int d^4x \left( \sum_{n,m} \lambda_f^{(n,m)} \bar{\psi}_n^{L(d)}(x) \Phi(x) \psi_m^{R(s)}(x) + h.c. \right) \tag{9.33}$$

mit

$$\lambda_f^{(n,m)} \equiv e^{kr\pi} \hat{f}_n^{L(d)}(\pi) \hat{f}_m^{R(s)}(\pi) \lambda_f^{(5)}. \tag{9.34}$$

Durch die Variablentransformation (9.15) ergibt sich:

$$S_Y = - \int d^4x \int \frac{dt}{krt} \lambda_f^{(5)} \left( \sum_{n,m} \bar{\psi}_n^{L(d)}(x) \Phi(x) \psi_m^{R(s)}(x) kr \epsilon f_n^{L(d)}(t) f_m^{R(s)}(t) + h.c. \right) kr \delta(t - 1) \tag{9.35}$$

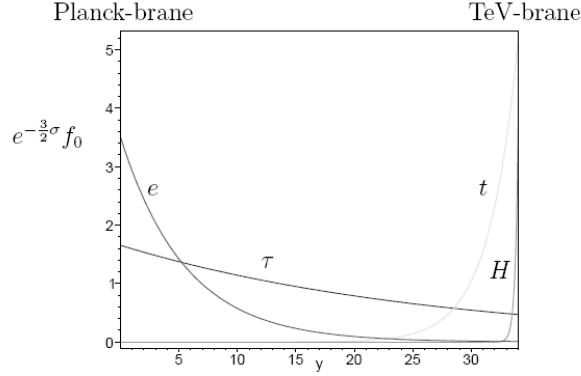


Abbildung 9.1: Lokalisation der Fermionen zur Generierung der Massenhierarchie (aus [38]).

und schließlich nach Integration und Reskalierung

$$S_Y^{(4D)} = - \int d^4x \left( \sum_{n,m} \lambda_f^{(n,m)} \bar{\psi}_n^{L(d)}(x) \Phi(x) \psi_m^{R(s)}(x) + h.c. \right) \quad (9.36)$$

mit

$$\lambda_f^{(n,m)} \equiv kr f_n^{L(d)}(1) f_m^{R(s)}(1) \lambda_f^{(5)}. \quad (9.37)$$

Einsetzen von (8.10)  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\varphi)$  erzeugt einen Massenterm für das Fermion:

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{n,m} m_f^{(n,m)} \bar{\psi}_n^{L(d)}(x) \psi_m^{R(s)}(x) + h.c. \quad (9.38)$$

mit

$$m_f^{(n,m)} = v kr \lambda_f^{(5)} f_n^{L(d)}(1) f_m^{R(s)}(1). \quad (9.39)$$

Man sieht hier, dass für mehrere Fermionengenerationen eine Massenhierarchie wie im SM durch verschiedenen Überlapp der Nullmoden-Profile mit der TeV-Brane generiert werden kann. Um große Unterschiede in den 4-D-Massen zu erhalten, werden nur kleine Variationen im fundamentalen Massenparameter  $c$  („ $c$ -Parameter“) benötigt (siehe (9.21)) und man braucht keine sehr verschiedenen 5D-Yukawa-Kopplungen. Fermionen die einen großen Überlapp mit der TeV-Brane haben, besitzen nun große Massen verglichen mit solchen die sich näher an der Planck-Brane befinden. Somit kann RS die hierarchischen Massenverhältnisse im SM erklären. Vorhergesagt werden können die Massen aber natürlich nicht. Hierfür müsste man die  $c$ -Parameter vorhersagen können.

Wir bemerken auch, dass der Massenterm (9.39) nicht diagonal in den Feldern ist. Hinzu kommt der Kaluza-Klein-Massenterm analog zu (9.14). Wir fassen nun  $\psi_n^{L(d)}$  und  $\psi_n^{L(s)}$  sowie  $\psi_n^{R(d)}$  und  $\psi_n^{R(s)}$  in jeweils einem Vektor

$$\widehat{\Psi}_L \equiv \left( \psi_0^{L(d)}, \psi_1^{L(d)}, \psi_1^{L(s)}, \psi_2^{L(d)}, \psi_2^{L(s)}, \dots \right)^T \quad (9.40)$$

bzw.

$$\widehat{\Psi}_R \equiv \left( \psi_0^{R(s)}, \psi_1^{R(d)}, \psi_1^{R(s)}, \psi_2^{R(d)}, \psi_2^{R(s)}, \dots \right)^T \quad (9.41)$$

zusammen. Die Felder  $\psi_n^{(s)}$  und  $\psi_n^{(d)}$  haben zwar unterschiedliche U(1)-Quantenzahlen, jedoch ist die U(1)-Symmetrie nun gebrochen, sodass man sie zusammenfassen kann. Wir schreiben den gesamten Massenterm als:

$$\mathcal{L}_M = -\widehat{\Psi}_L M \widehat{\Psi}_R + h.c. \quad (9.42)$$

mit

$$M \equiv \begin{pmatrix} m_f^{(0,0)} & 0 & m_f^{(0,1)} & 0 & m_f^{(0,2)} & \dots \\ m_f^{(1,0)} & M_{d,1} & m_f^{(1,1)} & 0 & m_f^{(1,2)} & \dots \\ 0 & 0 & M_{s,1} & 0 & 0 & \dots \\ m_f^{(2,0)} & 0 & m_f^{(2,1)} & M_{d,2} & m_f^{(2,2)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{s,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (9.43)$$

$M_{(d,c),n}$  ist die jeweilige Kaluza-Klein-Masse und  $m_f^{(n,m)}$  die Masse aus der Yukawa-Kopplung. Die verschwindenden Einträge ergeben sich aus der  $Z_2$ -Parität. Für ungerade Felder verschwindet die Yukawa-Kopplung auf der  $TeV$ -Brane. Wenn das Higgs in den Bulk propagieren kann, kommen neue Terme hinzu.

Da wir mit Masseneigenzuständen arbeiten wollen, führen wir wieder Feldredefinitionen durch, sodass die Massenmatrix diagonal wird.

### 9.2.2 Diagonalisierung der Massenmatrix

Da die Matrix (9.43) nicht hermitesch ist, kann sie nicht direkt mittels einer unitären Transformation diagonalisiert werden. Allerdings leistet eine biunitäre Transformation das gewünschte,  $U^\dagger M V = \tilde{M}$  mit  $\tilde{M} = \text{diag.}$ . Um die Matrizen  $U$  und  $V$  zu erhalten, diagonalisiert man das (hermitesche) Quadrat  $MM^\dagger$  bzw.  $M^\dagger M$ . Dessen Eigenwerte entsprechen den quadrierten Massen der Masseneigenzustände. Die Diagonalisierungsmatrizen selbst ergeben sich über  $U^\dagger M M^\dagger U \stackrel{!}{=} \text{diag.}$  sowie  $V^\dagger M^\dagger M V \stackrel{!}{=} \text{diag.}$ . Es gilt dann für die mit einer Tilde gekennzeichneten Masseneigenzustände:

$$\widehat{\Psi}_L = U^\dagger \widehat{\Psi}_L \quad (9.44)$$

$$\widehat{\Psi}_R = V^\dagger \widehat{\Psi}_R. \quad (9.45)$$

Wir nutzen bei der Diagonalisierung aus, dass die Einträge der Massenmatrix nicht alle unabhängig sind. Die Yukawa-Massenterme lassen sich faktorisieren in Profile der beteiligten Fermionen auf der  $TeV$ -Brane, was ein RS auszeichnendes, nichttriviales Faktum ist.

Wir definieren

$$\begin{aligned}\alpha_n^L &:= \sqrt{kr\lambda_f^{(5)}} f_n^{L(d)}(1) \\ \alpha_m^R &:= \sqrt{kr\lambda_f^{(5)}} f_m^{R(s)}(1),\end{aligned}\tag{9.46}$$

sodass

$$m_f^{(n,m)} = v\alpha_n^L\alpha_m^R.\tag{9.47}$$

Damit ist

$$M = \begin{pmatrix} v\alpha_0^L\alpha_0^R & 0 & v\alpha_0^L\alpha_1^R & 0 & v\alpha_0^L\alpha_2^R & \dots \\ v\alpha_1^L\alpha_0^R & M_{d,1} & v\alpha_1^L\alpha_1^R & 0 & v\alpha_1^L\alpha_2^R & \dots \\ 0 & 0 & M_{s,1} & 0 & 0 & \dots \\ v\alpha_2^L\alpha_0^R & 0 & v\alpha_2^L\alpha_1^R & M_{d,2} & v\alpha_2^L\alpha_2^R & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{s,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.\tag{9.48}$$

$MM^\dagger$

Wir bilden nun zunächst  $MM^\dagger$ . Im Folgenden wird  $\lambda_f^{(5)}$  reell angenommen. Nach Trunkierung von  $M$  auf eine  $5 \times 5$ -Matrix (durch die regelmäßige Struktur lässt sich dann zur eigentlichen unendlichdimensionalen Matrix extrapolieren) ergibt sich:

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} v^2\alpha_0^L\alpha_0^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & v^2\alpha_0^L\alpha_1^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,1}v\alpha_0^L\alpha_1^R & v^2\alpha_0^L\alpha_2^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,2}v\alpha_0^L\alpha_2^R \\ v^2\alpha_0^L\alpha_1^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{d,1}^2 + v^2\alpha_1^L\alpha_1^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,1}v\alpha_1^L\alpha_1^R & v^2\alpha_1^L\alpha_2^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,2}v\alpha_1^L\alpha_2^R \\ M_{s,1}v\alpha_0^L\alpha_1^R & M_{s,1}v\alpha_1^L\alpha_1^R & M_{s,1}^2 & M_{s,1}v\alpha_2^L\alpha_1^R & 0 \\ v^2\alpha_0^L\alpha_2^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & v^2\alpha_1^L\alpha_2^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,1}v\alpha_2^L\alpha_1^R & M_{d,2}^2 + v^2\alpha_2^L\alpha_2^L(\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,2}v\alpha_2^L\alpha_2^R \\ M_{s,2}v\alpha_0^L\alpha_2^R & M_{s,2}v\alpha_1^L\alpha_2^R & 0 & M_{s,2}v\alpha_2^L\alpha_2^R & M_{s,2}^2 \end{pmatrix}.\tag{9.49}$$

Wir gehen vor wie im Eichbosonsektor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix, indem wir das charakteristische Polynom berechnen. Mit Hilfe von Mathematica ergibt sich die Gleichung:

$$\left( \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda)(M_{s,i}^2 - \lambda) \right) \lambda \left( 1 + v^2 \sum_{j,k=0} \frac{\alpha_j^{L2}\alpha_k^{R2}}{M_{d,j}^2 - \lambda} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda} \right) \right) = 0.\tag{9.50}$$

Hieraus erhält man wieder eine transzendente Gleichung für die quadrierten Massen der Fermionmoden  $\tilde{M}_f^{(m)2} \equiv \lambda_m^f$ :

$$\lambda_m^f + \lambda_m^f v^2 \sum_{j,k=0} \frac{\alpha_j^{L2}\alpha_k^{R2}}{M_{d,j}^2 - \lambda_m^f} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda_m^f} \right) = 0.\tag{9.51}$$

Man beachte, dass  $M_{d,0} = M_{s,0} = 0$ . Des Weiteren gilt dieselbe Gleichung mit den Ersetzungen  $M_{d,j} \leftrightarrow M_{s,j} \wedge \alpha_j^L \leftrightarrow \alpha_j^R$ .



Wir wollen nun die Eigenvektoren zu  $MM^\dagger$  bestimmen. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{U}^{(m)} = (1, \tilde{\mathbf{U}}^{(m)})^T \quad (9.52)$$

für den Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_m^f$  ergibt sich die Eigenwertgleichung:

$$\begin{pmatrix} M_{d,1}^2 + v^2 \alpha_1^L (\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) - \lambda_m^f & M_{s,1} v \alpha_1^L \alpha_1^R & v^2 \alpha_1^L \alpha_2^L (\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,2} v \alpha_1^L \alpha_2^R \\ M_{s,1} v \alpha_1^L \alpha_1^R & M_{s,1}^2 - \lambda_m^f & M_{s,1} v \alpha_2^L \alpha_1^R & 0 \\ v^2 \alpha_1^L \alpha_2^L (\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) & M_{s,1} v \alpha_2^L \alpha_1^R & M_{d,2}^2 + v^2 \alpha_2^L (\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) - \lambda_m^f & M_{s,2} v \alpha_2^L \alpha_2^R \\ M_{s,2} v \alpha_1^L \alpha_2^R & 0 & M_{s,2} v \alpha_2^L \alpha_2^R & M_{s,2}^2 - \lambda_m^f \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(m)} = - \begin{pmatrix} v^2 \alpha_1^L \alpha_1^L (\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) \\ M_{s,1} v \alpha_0^L \alpha_1^R \\ v^2 \alpha_0^L \alpha_2^L (\alpha_0^{R2} + \alpha_1^{R2} + \alpha_2^{R2}) \\ M_{s,2} v \alpha_0^L \alpha_2^R \end{pmatrix} \quad (9.53)$$

Wir verwenden wieder die Cramer'sche Regel und erhalten:

$$\tilde{U}_j^{(m)} = \frac{D_j}{D} \quad (9.54)$$

mit

$$D_j = \begin{cases} - \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f) (M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \frac{v^2 \alpha_0^L \alpha_{\frac{j+1}{2}}^L}{M_{d,\frac{j+1}{2}}^2 - \lambda_m^f} \left( \sum_{k=0} \alpha_k^{R2} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda_m^f} \right) \right) & , j = 1, 3, 5, \dots \\ - \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f) (M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \frac{v \alpha_0^L \alpha_{\frac{j}{2}}^R M_{s,\frac{j}{2}}}{M_{s,\frac{j}{2}}^2 - \lambda_m^f} & , j = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f) (M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \left( 1 + v^2 \sum_{k=1, l=0} \frac{\alpha_k^{L2} \alpha_l^{R2}}{M_{d,k}^2 - \lambda_m^f} \left( 1 - \frac{M_{s,l}^2}{M_{s,l}^2 - \lambda_m^f} \right) \right) \\ &\stackrel{(9.51)}{=} \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f) (M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \left( \frac{v^2 \alpha_0^{L2}}{\lambda_m^f} \sum_{k=0} \alpha_k^{R2} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda_m^f} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.55)$$

Somit ergibt sich

$$\tilde{U}_j^{(m)} = \begin{cases} - \frac{\alpha_{\frac{j+1}{2}}^L}{\alpha_0^L} \frac{\lambda_m^f}{M_{d,\frac{j+1}{2}}^2 - \lambda_m^f} & , j = 1, 3, 5, \dots \\ - \frac{\alpha_{\frac{j}{2}}^R}{\alpha_0^L} \frac{\lambda_m^f M_{s,\frac{j}{2}}}{v (M_{s,\frac{j}{2}}^2 - \lambda_m^f)} \frac{1}{\sum_{k=0} \alpha_k^{R2} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda_m^f} \right)} & , j = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (9.56)$$

Die normierten Eigenvektoren sind jetzt:

$$\hat{\mathbf{U}}^{(m)} = \frac{\mathbf{U}^{(m)}}{N_m^U} \quad (9.57)$$

mit

$$N_m^U = \sqrt{1 + \sum_{n=1} \left( \frac{\alpha_n^L \lambda_m^f}{\alpha_0^L (M_{d,n}^2 - \lambda_m^f)} \right)^2 + \sum_{n=1} \left( \frac{\alpha_n^R \lambda_m^f M_{s,n}}{\alpha_0^L v (M_{s,n}^2 - \lambda_m^f) \left( \sum_{k=0} \alpha_k^{R2} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda_m^f} \right) \right)} \right)^2}. \quad (9.58)$$

Die Relation zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzuständen ist damit

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_L^{(n)} &= \sum_m U^{\dagger(n,m)} \widehat{\Psi}_L^{(m)} \\ &= \sum_{m=1} \frac{1}{N_n^U} \left\{ \psi_0^{L(d)} - \left( \frac{\alpha_m^L \lambda_n^f}{\alpha_0^L (M_{d,m}^2 - \lambda_n^f)} \right) \psi_m^{L(d)} \right. \end{aligned} \quad (9.59)$$

$$\left. - \left( \frac{\alpha_m^R \lambda_n^f M_{s,m}}{\alpha_0^L v (M_{s,m}^2 - \lambda_n^f) \left( \sum_{k=0} \alpha_k^{R2} \left( 1 - \frac{M_{s,k}^2}{M_{s,k}^2 - \lambda_n^f} \right) \right)} \right) \psi_m^{L(s)} \right\}. \quad (9.60)$$

Es gibt also eine Mischung von (U(1)-)geladenen und ungeladenen Fermionen. Die Kopplung derjenigen Masseneigenzustände, die im Wesentlichen U(1)-geladenen Fermionen entsprechen, wurde also durch die Beimischung von  $\psi_m^{L(s)}$  leicht geschwächt. Andererseits koppeln jetzt auch Zustände, die vor Drehung rein U(1)-ungeladen waren über die Beimischung von geladenen Zuständen, sodass nun *alle* Masseneigenzustände an die Eichbosonen koppeln.<sup>4</sup>

### $M^\dagger M$

Die Matrix  $M^\dagger M$  liefert dieselbe transzendente Gleichung (9.51) (Die beiden Kombinationen haben dieselben Eigenwerte). Wir benutzen diese nun in der Form mit den angesprochenen Ersetzungen:

$$\lambda_m^f + \lambda_m^f v^2 \sum_{j,k=0} \frac{\alpha_j^{R2} \alpha_k^{L2}}{M_{s,j}^2 - \lambda_m^f} \left( 1 - \frac{M_{d,k}^2}{M_{d,k}^2 - \lambda_m^f} \right) = 0. \quad (9.61)$$

Wir bestimmen nun auch die Eigenvektoren zu  $M^\dagger M$ . Mit dem Ansatz

$$\mathbf{V}^{(m)} = (1, \tilde{\mathbf{V}}^{(m)})^T \quad (9.62)$$

<sup>4</sup>Die Zuordnung von Masseneigenzuständen zu Flavoreigenzuständen ist möglich, da die Mischungen klein sind, der größte Beitrag zu  $\widehat{\Psi}_L^{(n)}$  kommt von  $\widehat{\Psi}_L^{(n)}$  (siehe auch Abschnitt 9.2.2).

für den Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_m^f$  ergibt sich hier:

$$D_j = \begin{cases} - \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f)(M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \frac{v\alpha_0^R \alpha_{\frac{j+1}{2}}^L M_{d,\frac{j+1}{2}}}{M_{d,\frac{j+1}{2}}^2 - \lambda_m^f} & , j = 1, 3, 5, \dots \\ - \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f)(M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \frac{v^2 \alpha_0^R \alpha_{\frac{j}{2}}^R}{M_{s,\frac{j}{2}}^2 - \lambda_m^f} \left( \sum_{k=0} -\alpha_k^{L2} \left( 1 - \frac{M_{d,k}^2}{M_{d,k}^2 - \lambda_m^f} \right) \right) & , j = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$D = \prod_{i=1} (M_{d,i}^2 - \lambda_m^f)(M_{s,i}^2 - \lambda_m^f) \left( \frac{v^2 \alpha_0^{R2}}{\lambda_m^f} \sum_{k=0} \alpha_k^{L2} \left( 1 - \frac{M_{d,k}^2}{M_{d,k}^2 - \lambda_m^f} \right) \right) \quad (9.63)$$

und somit

$$\tilde{V}_j^{(m)} = \begin{cases} - \frac{\alpha_{\frac{j+1}{2}}^L}{\alpha_0^R} \frac{\lambda_m^f M_{d,\frac{j+1}{2}}}{v(M_{d,\frac{j+1}{2}}^2 - \lambda_m^f)} \frac{1}{\sum_{k=0} \alpha_k^{L2} \left( 1 - \frac{M_{d,k}^2}{M_{d,k}^2 - \lambda_m^f} \right)} & , j = 1, 3, 5, \dots \\ - \frac{\alpha_{\frac{j}{2}}^R}{\alpha_0^R} \frac{\lambda_m^f}{M_{s,\frac{j}{2}}^2 - \lambda_m^f} & , j = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (9.64)$$

Die normierten Eigenvektoren sind:

$$\widehat{\mathbf{V}}^{(m)} = \frac{\mathbf{V}^{(m)}}{N_m^V} \quad (9.65)$$

mit

$$N_m^V = \sqrt{1 + \sum_{n=1} \left( \frac{\alpha_n^L \lambda_m^f M_{d,n}}{\alpha_0^R v (M_{d,n}^2 - \lambda_m^f) \left( \sum_{k=0} \alpha_k^{L2} \left( 1 - \frac{M_{d,k}^2}{M_{d,k}^2 - \lambda_m^f} \right) \right)} \right)^2 + \sum_{n=1} \left( \frac{\alpha_n^R \lambda_m^f}{\alpha_0^R (M_{s,n}^2 - \lambda_m^f)} \right)^2}. \quad (9.66)$$

Die Relation zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzuständen ist nun also

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_R^{(n)} &= \sum_m V^{\dagger(n,m)} \widehat{\Psi}_R^{(m)} \\ &= \sum_{m=1} \frac{1}{N_n^V} \left\{ \psi_0^{R(s)} - \left( \frac{\alpha_m^L \lambda_n^f M_{d,m}}{\alpha_0^R v (M_{d,m}^2 - \lambda_n^f) \left( \sum_{k=0} \alpha_k^{L2} \left( 1 - \frac{M_{d,k}^2}{M_{d,k}^2 - \lambda_n^f} \right) \right)} \right) \psi_m^{R(d)} \right. \end{aligned} \quad (9.67)$$

$$\left. - \left( \frac{\alpha_m^R \lambda_n^f}{\alpha_0^R (M_{s,m}^2 - \lambda_n^f)} \right) \psi_m^{R(s)} \right\}. \quad (9.68)$$

Man sieht, dass die rechtshändige Nullmode Beimischungen von geladenen Zuständen  $\psi_m^{R(d)}$  erhält. Wenn man dies auf eine  $SU(2)$  überträgt, würde also im Gegensatz zum SM die Kopplung von rechtshändigen Fermionen (Masseneigenzustände) an das W-Boson nicht verschwinden.

Da wir die transzendente Gleichung (9.51) auch diesmal nicht analytisch lösen können und zum besseren Einschätzen der Effekte wollen wir nun wieder eine Entwicklung in  $\epsilon := \frac{v}{m_{kk}}$  durchführen. Wir machen den Ansatz

$$\lambda_0^f = b_0 \epsilon^2 + b_1 \epsilon^3 + b_2 \epsilon^4 + b_3 \epsilon^5 + O(\epsilon^6). \quad (9.69)$$

Gleichung (9.51) liefert nun

$$\begin{aligned} b_0 &= v^2 \alpha_0^{L2} \alpha_0^{R2} \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= -v^4 \alpha_0^{L2} \alpha_0^{R2} \left( \alpha_0^{R2} \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^{L2}}{M_{d,n}^2} + \alpha_0^{L2} \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^{R2}}{M_{s,n}^2} \right) \\ b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Es ergibt sich also:

$$\tilde{M}_f^{(0)2} = \underbrace{v^2 \alpha_0^{L2} \alpha_0^{R2}}_{m_f^{(0,0)2}} - v^4 \alpha_0^{L2} \alpha_0^{R2} \left( \alpha_0^{R2} \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^{L2}}{M_{d,n}^2} + \alpha_0^{L2} \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^{R2}}{M_{s,n}^2} \right) + O(\epsilon^6). \quad (9.71)$$

Die Massen der Nullmoden werden also leicht erniedrigt. Für die KK-Moden ergibt sich analog

für  $m$  ungerade:

$$\tilde{M}_f^{(m)2} = M_{d, \frac{m+1}{2}}^2 + v^2 \alpha_{\frac{m+1}{2}}^{L2} M_{d, \frac{m+1}{2}}^2 \sum_{n=0} \frac{\alpha_n^{R2}}{M_{d, \frac{m+1}{2}}^2 - M_{s,n}^2} + O(\epsilon^4). \quad (9.72)$$

und für  $m$  gerade:

$$\tilde{M}_f^{(m)2} = M_{s, \frac{m}{2}}^2 + v^2 \alpha_{\frac{m}{2}}^{R2} M_{s, \frac{m}{2}}^2 \sum_{n=0} \frac{\alpha_n^{L2}}{M_{s, \frac{m}{2}}^2 - M_{d,n}^2} + O(\epsilon^4). \quad (9.73)$$

Nun können auch die Diagonalisierungsmatrizen in einer festen Ordnung in  $\epsilon$  bestimmt werden. Sinn macht hier eine Entwicklung bis  $O(\epsilon^2)$  anzugeben, da die Ausdrücke sonst allzu unübersichtlich werden.

Wir wollen nun jedoch direkt eine Verallgemeinerung auf drei verschiedene Fermion-Generationen durchführen. Hier funktioniert die bisherige Methode nicht mehr ohne Modifikation, da die Einträge in (9.43) jetzt selbst  $3 \times 3$  Matrizen im Flavorraum sind, die man nicht wie Zahlen vertauschen und dividieren kann. Es wird nun eine Methode verwendet,

bei der die Diagonalisierung von Anfang an in einer Entwicklung in  $\epsilon := \frac{v}{m_{kk}}$  durchgeführt wird. Der bisherige Fall von nur einem Flavor ergibt sich daraus, indem man die Untermatrizen wieder auf einfache Zahlen reduziert und dann die Ergebnisse vereinfachen kann. Es sei angemerkt, dass die beiden Methoden in diesem Fall identische Ergebnisse liefern. Die hier zuerst behandelte exakte Vorgehensweise hat jedoch den Vorteil, dass man recht einfach auch bis zu höheren Ordnungen in Epsilon entwickeln kann, während dies bei der im Folgenden verwendeten mit viel Aufwand verbunden ist. Der größte Vorteil bei der ersten Methode liegt jedoch eben gerade darin, dass die Masseneigenwerte und Diagonalisierungsmatrizen (zumindest implizit) exakt bekannt sind.

### Entwicklung für drei Quark-Familien

Wir betrachten hier nun die SM-Eichgruppe und arbeiten mit einem Satz Fermionen, die sich wie Dubletts unter  $SU(2)$  transformieren, und einem Satz von  $SU(2)$ -Singletts. Analog zur  $U(1)$  wählen wir die  $Z_2$ -Paritäten so, dass das Dublett eine linkshändige Nullmode besitzt, während für das Singlett nur eine rechtshändige Nullmode existiert:

$$\begin{array}{ll} \text{Dubletts } Q_L & q_L^{d(0)} = \begin{pmatrix} u_L^{d(0)} \\ d_L^{d(0)} \end{pmatrix} & q_L^{d(n)} = \begin{pmatrix} u_L^{d(n)} \\ d_L^{d(n)} \end{pmatrix} & q_R^{d(n)} = \begin{pmatrix} u_R^{d(n)} \\ d_R^{d(n)} \end{pmatrix} \\ \text{Singletts} & u_R^{s(0)} & d_R^{s(0)} & u_R^{s(n)} & d_R^{s(n)} & u_L^{s(n)} & d_L^{s(n)}. \end{array}$$

Die  $(3 \times 3)$  Massenmatrizen der KK-Moden seien mit  $M_{Q,n}$ ,  $M_{u,n}$  bzw.  $M_{d,n}$  bezeichnet.<sup>5</sup> Wir arbeiten in einer Basis, in der die Kaluza-Klein-Moden senkrecht aufeinander stehen und ihre Massen sich auf der Diagonalen der Massenmatrix befinden. Die Massenterme aus den Yukawakopplungen verallgemeinern sich zu:

$$m_{ij}^{(n,m)} = v \, k r \, \lambda_{ij}^{(5)} \, f_{ni}^{L(d)}(1) \, f_{mj}^{R(s)}(1), \quad (9.74)$$

wobei die Indizes  $i, j$  nun den Flavor kennzeichnen. Wir bezeichnen diese in Matrixschreibweise mit  $m^{(n,m)} \equiv m_{nm}$ . Wir studieren im Folgenden die Diagonalisierung für up-type Quarks und schreiben den Massenterm wieder als

$$\mathcal{L}_M = -\widehat{\Psi}_L M \widehat{\Psi}_R + h.c. \quad (9.75)$$

mit

$$\widehat{\Psi}_L \equiv (u_L^{d(0)}, c_L^{d(0)}, t_L^{d(0)}, u_L^{d(1)}, c_L^{d(1)}, t_L^{d(1)}, u_L^{s(1)}, c_L^{s(1)}, t_L^{s(1)}, \dots)^T \quad (9.76)$$

$$\widehat{\Psi}_R \equiv (u_R^{s(0)}, c_R^{s(0)}, t_R^{s(0)}, u_R^{d(1)}, c_R^{d(1)}, t_R^{d(1)}, u_R^{s(1)}, c_R^{s(1)}, t_R^{s(1)}, \dots)^T. \quad (9.77)$$

Die Massenmatrix ist nun

$$M = \begin{pmatrix} m^{(0,0)} & 0_{3 \times 3} & m^{(0,1)} & \dots \\ m^{(1,0)} & M_{Q,1} & m^{(1,1)} & \dots \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & M_{U,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (9.78)$$

<sup>5</sup>u steht für up-type Quarks, d für down-type Quarks.

mit dem Nullmodensektor:

$$m^{(0,0)} = \begin{pmatrix} m_{u,u}^{(0,0)} & m_{u,c}^{(0,0)} & m_{u,t}^{(0,0)} \\ m_{c,u}^{(0,0)} & m_{c,c}^{(0,0)} & m_{c,t}^{(0,0)} \\ m_{t,u}^{(0,0)} & m_{t,c}^{(0,0)} & m_{t,t}^{(0,0)} \end{pmatrix}. \quad (9.79)$$

Die Transformationsmatrizen zwischen (links- bzw. rechtshändigen) Flavor- und Masseneigenzuständen  $U_u$  und  $V_u$  ergeben sich nun wieder aus Diagonalisierung von  $MM^\dagger$  bzw.  $M^\dagger M$ .

$$\widehat{\Psi}_L = U_u^\dagger \widehat{\Psi}_L \quad (9.80)$$

$$\widehat{\Psi}_R = V_u^\dagger \widehat{\Psi}_R. \quad (9.81)$$

Beim Übergang von Wechselwirkungs- zu Masseneigenzuständen treten zwei Effekte auf: Flavormischung und Mischungen der verschiedenen Moden. Wir wollen im Folgenden den zweiten Effekt studieren und die  $3 \times 3$ -Unterstruktur als separates Problem außer Acht lassen. Wichtig ist jedoch, dass wir jetzt mit Einträgen rechnen, die Matrizen und keine Zahlen sind.

### $O(\epsilon)$

Da die Offdiagonaleinträge der Massenmatrix um  $\epsilon$  gegenüber der Diagonalen unterdrückt sind, setzt man eine Diagonalisierungsmatrix mit der selben Struktur an. Wir rechnen zunächst bis einschließlich  $O(\epsilon)$  und erhalten mit dem Ansatz

$$U_u = \begin{pmatrix} U_{00} & \epsilon U_{01} & \epsilon U_{02} & \epsilon U_{03} & \epsilon U_{04} \\ \epsilon U_{10} & U_{11} & \epsilon U_{12} & \epsilon U_{13} & \epsilon U_{14} \\ \epsilon U_{20} & \epsilon U_{21} & U_{22} & \epsilon U_{23} & \epsilon U_{24} \\ \epsilon U_{30} & \epsilon U_{31} & \epsilon U_{32} & U_{33} & \epsilon U_{34} \\ \epsilon U_{40} & \epsilon U_{41} & \epsilon U_{42} & \epsilon U_{43} & U_{44} \end{pmatrix} \quad (9.82)$$

sowie den Forderungen

$$\begin{aligned} U_u^\dagger M M^\dagger U_u &\stackrel{!}{=} \text{diag.} \\ U_u U_u^\dagger &\stackrel{!}{=} 1_{5 \times 5} \end{aligned} \quad (9.83)$$

die Diagonalisierungsmatrix

$$U_u = \begin{pmatrix} U_{00} & 0 & m_{0,1}M_{U1}^{-1} & 0 & m_{0,2}M_{U2}^{-1} \\ 0 & 1_{3 \times 3} & X_{1,1} & 0 & X_{1,2} \\ -(m_{01}M_{U1}^{-1})^\dagger U_{00} & -X_{1,1}^\dagger & 1_{3 \times 3} & -X_{2,1}^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & X_{2,1} & 1_{3 \times 3} & X_{2,2} \\ -(m_{02}M_{U2}^{-1})^\dagger U_{00} & -X_{1,2}^\dagger & 0 & -X_{2,2}^\dagger & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (9.84)$$

$$M_{Qn}M_{Qn}^\dagger X_{n,m} - X_{n,m}M_{Um}M_{Um}^\dagger + m_{nm}M_{Um}^\dagger = 0. \quad (9.85)$$

Analog ergibt sich:

$$V_u = \begin{pmatrix} V_{00} & (M_{Q1}^{-1}m_{10})^\dagger & 0 & (M_{Q2}^{-1}m_{20})^\dagger & 0 \\ -M_{Q1}^{-1}m_{10}V_{00} & 1_{3 \times 3} & -\tilde{X}_{1,1}^\dagger & 0 & -\tilde{X}_{1,2}^\dagger \\ 0 & \tilde{X}_{1,1} & 1_{3 \times 3} & \tilde{X}_{2,1} & 0 \\ -M_{Q2}^{-1}m_{20}V_{00} & 0 & -\tilde{X}_{2,1}^\dagger & 1_{3 \times 3} & -\tilde{X}_{2,2}^\dagger \\ 0 & \tilde{X}_{1,2} & 0 & \tilde{X}_{2,2} & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (9.86)$$

$$M_{Un}^\dagger M_{Un} \tilde{X}_{n,m} - \tilde{X}_{n,m} M_{Qm}^\dagger M_{Qm} + m_{mn}^\dagger M_{Qm} = 0. \quad (9.87)$$

Die Matrizen  $X_{n,m}$  und  $\tilde{X}_{n,m}$  sind hier nur implizit über die angegebenen Bestimmungsgleichungen gegeben.

$O(\epsilon^2)$

Nun führen wir die Rechnung bis einschließlich  $O(\epsilon^2)$  durch. Mit dem Ansatz

$$U_u = \begin{pmatrix} U_{00} & \epsilon^2 U_{01} & \epsilon U_{02} & \epsilon^2 U_{03} & \epsilon U_{04} & \dots \\ \epsilon^2 U_{10} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{11} & \epsilon U_{12} & \epsilon^2 U_{13} & \epsilon U_{14} & \dots \\ \epsilon U_{20} & \epsilon U_{21} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{22} & \epsilon U_{23} & \epsilon^2 U_{24} & \dots \\ \epsilon^2 U_{30} & \epsilon^2 U_{31} & \epsilon U_{32} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{33} & \epsilon U_{34} & \dots \\ \epsilon U_{40} & \epsilon U_{41} & \epsilon^2 U_{42} & \epsilon U_{43} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (9.88)$$

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} U_{n0} &= - (m_{0\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1})^\dagger U_{00} && n \text{ gerade} \\ U_{n0} &= - (M_{Q\frac{n+1}{2}} M_{Q\frac{n+1}{2}}^\dagger)^{-1} m_{\frac{n+1}{2}0} m_{00}^\dagger U_{00} && n \text{ ungerade} \\ U_{0n} &= m_{0\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1} && n \text{ gerade} \\ U_{0n} &= m_{00} m_{\frac{n+1}{2}0}^\dagger (M_{Q\frac{n+1}{2}} M_{Q\frac{n+1}{2}}^\dagger)^{-1} - \sum_{k=1} m_{0k} M_{Uk}^{-1} X_{\frac{n+1}{2},k}^\dagger && n \text{ ungerade} \\ U_{mn} &= - U_{nm}^\dagger = X_{\frac{m+1}{2},\frac{n}{2}} && m \text{ unger., } n \text{ ger. } (m, n > 0) \\ U_{mn} &= - U_{nm}^\dagger - \sum_{k=1} X_{\frac{m+1}{2},k} X_{\frac{n+1}{2},k}^\dagger = Y_{\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}} && m, n \text{ unger. } (m > n > 0) \\ U_{mn} &= - U_{nm}^\dagger - (n_{0\frac{m}{2}} M_{U\frac{m}{2}}^{-1})^\dagger n_{0\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1} - \sum_{k=1} X_{k,\frac{m}{2}}^\dagger X_{k,\frac{n}{2}} = Z_{\frac{m}{2},\frac{n}{2}} && n, m \text{ ger. } (n > m > 0) \end{aligned} \quad (9.89)$$

mit:

$$\begin{aligned} & -Y_{n,m} M_{Qm} M_{Qm}^\dagger + M_{Qn} M_{Qn}^\dagger Y_{n,m} + \sum_{k=0} m_{nk} m_{mk}^\dagger \\ & + \sum_{h=1} (M_{Qn} M_{Qn}^\dagger X_{n,h} X_{m,h}^\dagger - X_{n,h} M_{Uh} M_{Uh}^\dagger X_{m,h}^\dagger) = 0 \end{aligned} \quad (9.90)$$

sowie

$$\begin{aligned} & -Z_{n,m} M_{Um} M_{Um}^\dagger + M_{Un} M_{Un}^\dagger Z_{n,m} + M_{Un} m_{0n}^\dagger m_{0m} M_{Um}^{-1} \\ & + \sum_{h=1} (M_{Un} M_{Un}^\dagger X_{h,n}^\dagger X_{h,m} - X_{h,n}^\dagger M_{Qh} M_{Qh}^\dagger X_{h,m}) = 0 \end{aligned} \quad (9.91)$$



und

$$U_{00}U_{00}^\dagger + \sum_{h=1} (m_{0h}M_{U_h}^{-1})U_{00}U_{00}^\dagger(m_{0h}M_{U_h}^{-1})^\dagger = 1_{3 \times 3} \quad (9.92)$$

$$\begin{aligned} s_{n,n} + s_{n,n}^\dagger &= \sum_{h=1} X_{\frac{n+1}{2},h} X_{\frac{n+1}{2},h}^\dagger && n \text{ ungerade} \\ s_{n,n} + s_{n,n}^\dagger &= \sum_{h=1} X_{h,\frac{n}{2}}^\dagger X_{h,\frac{n}{2}} + (m_{0\frac{n}{2}}M_{U_{\frac{n}{2}}}^{-1})^\dagger m_{0\frac{n}{2}}M_{U_{\frac{n}{2}}}^{-1} && n \text{ gerade.} \end{aligned} \quad (9.93)$$

Analog ergibt sich wieder die Diagonalisierungsmatrix für rechtshändige Zustände  $V_u$  mit:

$$\begin{aligned} V_{n0} &= -M_{Q_{\frac{n+1}{2}}}^{-1} m_{\frac{n+1}{2}0} V_{00} && n \text{ ungerade} \\ V_{n0} &= -(M_{U_{\frac{n}{2}}}^\dagger M_{U_{\frac{n}{2}}})^{-1} m_{0\frac{n}{2}} m_{00} V_{00} && n \text{ gerade} \\ V_{0n} &= (M_{Q_{\frac{n+1}{2}}}^{-1} m_{\frac{n+1}{2}0})^\dagger && n \text{ ungerade} \\ V_{0n} &= m_{00}^\dagger m_{0\frac{n}{2}} (M_{U_{\frac{n}{2}}}^\dagger M_{U_{\frac{n}{2}}})^{-1} - \sum_{k=1} (M_{Q_k}^{-1} m_{k0})^\dagger \tilde{X}_{\frac{n}{2}k}^\dagger && n \text{ gerade} \\ V_{nm} &= -V_{mn}^\dagger = \tilde{X}_{\frac{n}{2},\frac{m+1}{2}} && n \text{ ger., } m \text{ ung. } (n, m > 0) \\ V_{nm} &= -V_{mn}^\dagger - \sum_{k=1} \tilde{X}_{\frac{n}{2},k}^\dagger \tilde{X}_{\frac{m}{2},k}^\dagger = \tilde{Y}_{\frac{n}{2},\frac{m}{2}} && n, m \text{ ger. } (n > m > 0) \\ V_{nm} &= -V_{mn}^\dagger - M_{Q_{\frac{n+1}{2}}}^{-1} m_{\frac{n+1}{2}0} (M_{Q_{\frac{m+1}{2}}}^{-1} m_{\frac{m+1}{2}0})^\dagger - \sum_{k=1} \tilde{X}_{k,\frac{n+1}{2}}^\dagger \tilde{X}_{k,\frac{m+1}{2}}^\dagger \\ &= \tilde{Z}_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}} && n, m \text{ ung. } (n > m > 0). \end{aligned} \quad (9.94)$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} &- \tilde{Y}_{n,m} M_{U_m}^\dagger M_{U_m} + M_{U_n}^\dagger M_{U_n} \tilde{Y}_{n,m} + \sum_{k=0} m_{kn}^\dagger m_{km} \\ &+ \sum_{h=1} (M_{U_n}^\dagger M_{U_n} \tilde{X}_{n,h} \tilde{X}_{m,h}^\dagger - \tilde{X}_{n,h} M_{Q_h}^\dagger M_{Q_h} \tilde{X}_{m,h}^\dagger) = 0 \end{aligned} \quad (9.95)$$

$$\begin{aligned} &- \tilde{Z}_{n,m} M_{Q_m}^\dagger M_{Q_m} + M_{Q_n}^\dagger M_{Q_n} \tilde{Z}_{n,m} + M_{Q_n}^\dagger m_{n0} (M_{Q_m}^{-1} m_{m0})^\dagger \\ &+ \sum_{h=1} (M_{Q_n}^\dagger M_{Q_n} \tilde{X}_{h,n}^\dagger \tilde{X}_{h,m} - \tilde{X}_{h,n}^\dagger M_{U_h}^\dagger M_{U_h} \tilde{X}_{h,m}) = 0 \end{aligned} \quad (9.96)$$

und

$$V_{00}V_{00}^\dagger + \sum_{h=1} (M_{Q_h}^{-1} m_{h0})^\dagger V_{00}V_{00}^\dagger (M_{Q_h}^{-1} m_{h0}) = 1_{3 \times 3} \quad (9.97)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{n,n} + \tilde{s}_{n,n}^\dagger &= \sum_{h=1} \tilde{X}_{\frac{n}{2},h} \tilde{X}_{\frac{n}{2},h}^\dagger && n \text{ gerade} \\
\tilde{s}_{n,n} + \tilde{s}_{n,n}^\dagger &= \sum_{h=1} \tilde{X}_{h,\frac{n+1}{2}}^\dagger \tilde{X}_{h,\frac{n+1}{2}} + M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} m_{\frac{n+1}{2}0} (M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} m_{\frac{n+1}{2}0})^\dagger && n \text{ ungerade.} \quad (9.98)
\end{aligned}$$

Wenn man sich die Diagonalisierungsmatrizen  $U$  (9.84) und  $V$  (9.86) ansieht, bemerkt man, dass ein  $SU(2)$ -Dublett-Zustand in  $O(\epsilon)$  nur Singlett-Beimischungen erhält und umgekehrt. Die Flavor-Untermatrizen wurden hier wie erwähnt nicht betrachtet. Zumindest numerisch ist es jedoch möglich zu studieren, wie in Abhängigkeit von den  $c$ -Parametern die CKM Matrix des SM entstehen könnte [38].

Kommen wir nun zurück zu unserem Modell mit einem (5D-)Fermion und einer  $U(1)$ -Eichgruppe. Im Folgenden werden wir (wieder in der 4D-Betrachtungsweise) die Kopplungen zwischen Fermionen und Eichbosonen im Bulk von RS untersuchen.

### 9.2.3 Eichboson-Wechselwirkung

Ausgangspunkt ist wieder die Wirkung (9.30). Wir konzentrieren uns jetzt auf den Wechselwirkungsterm:

$$S_{int} = \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} E_m^M \bar{\Psi}^{(d)} \Gamma^m g_5 A_M(x, \phi) \Psi^{(d)} \quad (9.99)$$

und spalten diesen auf in:

$$\begin{aligned}
S_{int}^{A_\mu} &= \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \bar{\Psi}^{(d)} e^\sigma \gamma^\mu g_5 A_\mu(x, \phi) \Psi^{(d)} \\
&= \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} e^\sigma g_5 \left( \bar{\Psi}_L^{(d)} \gamma^\mu A_\mu(x, \phi) \Psi_L^{(d)} + \bar{\Psi}_R^{(d)} \gamma^\mu A_\mu(x, \phi) \Psi_R^{(d)} \right) \quad (9.100)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
S_{int}^{A_4} &= \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \bar{\Psi}^{(d)} \frac{1}{r} i \gamma^5 g_5 A_4(x, \phi) \Psi^{(d)} \\
&= \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \frac{i g_5}{r} \left( \bar{\Psi}_L^{(d)} A_4(x, \phi) \Psi_R^{(d)} - \bar{\Psi}_R^{(d)} A_4(x, \phi) \Psi_L^{(d)} \right). \quad (9.101)
\end{aligned}$$

Wir führen nun eine KK-Zerlegung mit (7.5), (7.12) und (9.11) durch. Für die Wechselwirkung mit  $A_\mu$  gilt:

$$S_{int}^{A_\mu} = \int d^4x \int d\phi e^\sigma \frac{g_5}{\sqrt{r}} \sum_{n,k,m} \left( \bar{\psi}_n^{L(d)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \psi_m^{L(d)} \hat{f}_n^{L(d)} \hat{f}_m^{L(d)} \chi^{(k)} + \bar{\psi}_n^{R(d)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \psi_m^{R(d)} \hat{f}_n^{R(d)} \hat{f}_m^{R(d)} \chi^{(k)} \right) \quad (9.102)$$

Wir schreiben diese als

$$S_{int}^{A_\mu} \equiv \int d^4x g_4 \sum_{n,k,m} \left( \bar{\psi}_n^{L(d)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \psi_m^{L(d)} I_L^{(n,m,k)} + \bar{\psi}_n^{R(d)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \psi_m^{R(d)} I_R^{(n,m,k)} \right) \quad (9.103)$$

mit

$$I_{L,R}^{(n,m,k)} := \sqrt{2\pi} \int d\phi e^\sigma \hat{f}_n^{L,R(d)}(\phi) \hat{f}_m^{L,R(d)}(\phi) \chi^{(k)}(\phi). \quad (9.104)$$

Solche Integrale über die Profile der beteiligten Felder in der Zusatzdimension nennt man „Überlappintegrale“. In t-Notation (9.15) gilt:

$$\begin{aligned} I_{L,R}^{(n,m,k)} &:= \sqrt{2\pi} \, 2 \int_\epsilon^1 dt f_n^{L,R(d)}(t) f_m^{L,R(d)}(t) \chi^{(k)}(t), \\ \text{mit } \chi^{(k)}(t) &= \frac{\sqrt{kr}t}{J_1(x_k)} (J_1(x_k t) + \alpha_k Y_1(x_k t)) \\ \chi^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (9.105)$$

Mit  $S_{int}^{A_4}$  wird genauso verfahren:

$$\begin{aligned} S_{int}^{A_4} &= \int d^4x \int d\phi \frac{ig_5}{r^{3/2}} \sum_{n,m,k=1} \frac{1}{m_k} \left( \bar{\psi}_n^{(d)L} A_4^{(k)} \psi_m^{(d)R} \hat{f}_n^{(d)L} \hat{f}_m^{(d)R} \partial_\phi \chi^{(k)} - \bar{\psi}_n^{(d)R} A_4^{(k)} \psi_m^{(d)L} \hat{f}_n^{(d)R} \hat{f}_m^{(d)L} \partial_\phi \chi^{(k)} \right) \\ &\equiv \int d^4x \frac{ig_4}{r} \sum_{n,m,k=1} \frac{1}{m_k} \left( \bar{\psi}_n^{(d)L} A_4^{(k)} \psi_m^{(d)R} I_4^{(n,m,k)} - \bar{\psi}_n^{(d)R} A_4^{(k)} \psi_m^{(d)L} I_4^{(m,n,k)} \right) \end{aligned} \quad (9.106)$$

wobei

$$I_4^{(n,m,k)} := \sqrt{2\pi} \int d\phi \hat{f}_n^{(d)L}(\phi) \hat{f}_m^{(d)R}(\phi) \partial_\phi \chi^{(k)}(\phi). \quad (9.107)$$

Wir formen dieses Überlappintegral mittels partieller Integration und Relation (9.13) um:

$$\begin{aligned} I_4^{(n,m,k)} &= -\sqrt{2\pi} \int d\phi \partial_\phi \left( \hat{f}_n^{(d)L} \hat{f}_m^{(d)R} \right) \chi^{(k)} \\ &= -\sqrt{2\pi} \int d\phi \left\{ \left( m_d \hat{f}_n^{(d)L} - M_n e^\sigma \hat{f}_n^{(d)R} \right) \hat{f}_m^{(d)R} + \hat{f}_n^{(d)L} \left( -m_d \hat{f}_m^{(d)R} + M_n e^\sigma \hat{f}_m^{(d)L} \right) \right\} \chi^{(k)} \\ &= \sqrt{2\pi} \int d\phi e^\sigma \left( M_n \hat{f}_n^{(d)R} \hat{f}_m^{(d)R} - M_m \hat{f}_n^{(d)L} \hat{f}_m^{(d)L} \right) \chi^{(k)} \\ &= M_n I_R^{(n,m,k)} - M_m I_L^{(n,m,k)}. \end{aligned} \quad (9.108)$$

In t-Notation lautet es:

$$I_4^{(n,m,k)} = \sqrt{2\pi} \, 2 \int_\epsilon^1 dt \left( M_n f_n^{(d)R}(t) f_m^{(d)R}(t) - M_m f_n^{(d)L}(t) f_m^{(d)L}(t) \right) \chi^{(k)}(t). \quad (9.109)$$

### 9.3 Feynmanregeln

Wir wollen nun zu Masseneigenzuständen transformieren. Hierzu schreiben wir die Wirkung um mit

$$\begin{aligned}
 \psi_n^{L(d)} &\equiv \widehat{\Psi}_L^{(2n-1)} \quad (n > 0) \\
 \psi_0^{L(d)} &\equiv \widehat{\Psi}_L^{(0)} \\
 \psi_n^{R(d)} &\equiv \widehat{\Psi}_R^{(2n-1)} \quad (n > 0).
 \end{aligned} \tag{9.110}$$

Es existiert nur eine linkshändige Nullmode für  $\Psi^{(d)}$ . Wir lassen ab jetzt das Dach über dem Vektor  $\widehat{\Psi}_{L,R}$  weg. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 S_{int}^{A_\mu} &\equiv \int d^4x g_4 \left\{ \sum_k \bar{\Psi}_L^{(0)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \Psi_L^{(0)} I_L^{(0,0,k)} \right. \\
 &+ \sum_{m=1,k} \bar{\Psi}_L^{(0)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \Psi_L^{(2m-1)} I_L^{(0,m,k)} + \sum_{n=1,k} \bar{\Psi}_L^{(2n-1)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \Psi_L^{(0)} I_L^{(n,0,k)} \\
 &\left. + \sum_{n=1,m=1,k} \left( \bar{\Psi}_L^{(2n-1)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \Psi_L^{(2m-1)} I_L^{(n,m,k)} + \bar{\Psi}_R^{(2n-1)} \gamma^\mu A_\mu^{(k)} \Psi_R^{(2m-1)} I_R^{(n,m,k)} \right) \right\}. \tag{9.111}
 \end{aligned}$$

Die ungeraden Indizes der Spinoren sowie der Index 0 entsprechen den U(1)-geladenen Teilchen (siehe (9.110)), gerade Indizes würden ungeladenen Teilchen entsprechen, die hier

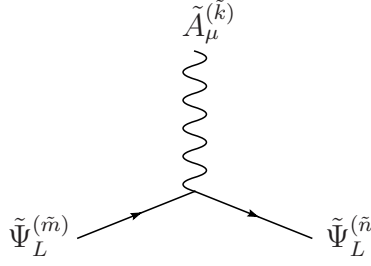
nicht koppeln. Die Transformation auf Masseneigenzustände liefert nun (9.60),(9.68),(8.34):

$$\begin{aligned}
S_{int}^{A\mu} &\equiv \int d^4x g_4 \left\{ \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}, k, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} U^{\dagger(\tilde{n},0)} \gamma^\mu B^{(k,\tilde{k})} \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} U^{(0,\tilde{m})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} I_L^{(0,0,k)} \right. \\
&+ \sum_{m=1, \tilde{n}, \tilde{m}, k, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} U^{\dagger(\tilde{n},0)} \gamma^\mu B^{(k,\tilde{k})} \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} U^{(2m-1,\tilde{m})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} I_L^{(0,m,k)} \\
&+ \sum_{n=1, \tilde{n}, \tilde{m}, k, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} U^{\dagger(\tilde{n},2n-1)} \gamma^\mu B^{(k,\tilde{k})} \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} U^{(0,\tilde{m})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} I_L^{(n,0,k)} \\
&+ \sum_{n=1, m=1, \tilde{n}, \tilde{m}, k, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} U^{\dagger(\tilde{n},2n-1)} \gamma^\mu B^{(k,\tilde{k})} \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} U^{(2m-1,\tilde{m})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} I_L^{(n,m,k)} \\
&+ \left. \sum_{n=1, m=1, \tilde{n}, \tilde{m}, k, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{n})} V^{\dagger(\tilde{n},2n-1)} \gamma^\mu B^{(k,\tilde{k})} \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} V^{(2m-1,\tilde{m})} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{m})} I_R^{(n,m,k)} \right\} \\
&\equiv \int d^4x g_4 \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} \gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} \\
&\sum_k B^{(k,\tilde{k})} \left\{ U^{(0,\tilde{n})} U^{(0,\tilde{m})} I_L^{(0,0,k)} + \sum_{m=1} U^{(0,\tilde{n})} U^{(2m-1,\tilde{m})} I_L^{(0,m,k)} + \sum_{n=1} U^{(2n-1,\tilde{n})} U^{(0,\tilde{m})} I_L^{(n,0,k)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1, m=1} U^{(2n-1,\tilde{n})} U^{(2m-1,\tilde{m})} I_L^{(n,m,k)} \right\} \\
&+ \int d^4x g_4 \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{n})} \gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{m})} \sum_{n=1, m=1, k} B^{(k,\tilde{k})} V^{(2n-1,\tilde{n})} V^{(2m-1,\tilde{m})} I_R^{(n,m,k)}. \quad (9.112)
\end{aligned}$$

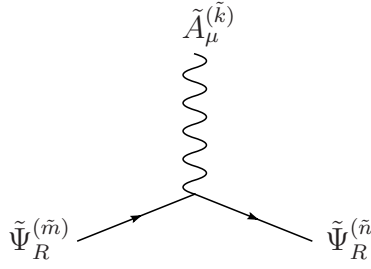
Um eine kompaktere Schreibweise zu erhalten, definieren wir  $U^{(-1,\tilde{n})} := U^{(0,\tilde{n})}$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
S_{int}^{A\mu} &= \int d^4x g_4 \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} \gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} \sum_{n=0, m=0, k} B^{(k,\tilde{k})} U^{(2n-1,\tilde{n})} U^{(2m-1,\tilde{m})} I_L^{(n,m,k)} \\
&+ \int d^4x g_4 \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{k}} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{n})} \gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{m})} \sum_{n=1, m=1, k} B^{(k,\tilde{k})} V^{(2n-1,\tilde{n})} V^{(2m-1,\tilde{m})} I_R^{(n,m,k)}. \quad (9.113)
\end{aligned}$$

Es ergeben sich also die folgenden Vertexregeln für die Kopplung zwischen zwei Fermion-Masseneigenzuständen  $\tilde{\Psi}_{R,L}^{(\tilde{n})}$ ,  $\tilde{\Psi}_{R,L}^{(\tilde{m})}$  und dem Vektorboson  $\tilde{A}_\mu^{(\tilde{k})}$ :



$$= ig_4 \gamma^\mu \sum_{n=0, m=0, k} B^{(k, \tilde{k})} U^{(2n-1, \tilde{n})} I_L^{(n, m, k)} U^{(2m-1, \tilde{m})} \quad (9.114)$$



$$= ig_4 \gamma^\mu \sum_{n=1, m=1, k} B^{(k, \tilde{k})} V^{(2n-1, \tilde{n})} I_R^{(n, m, k)} V^{(2m-1, \tilde{m})} \quad (9.115)$$

Man sieht, dass für gerade  $\tilde{n}, \tilde{m}$  eine Kopplung nur über die Beimischung von U(1) geladenen Fermionen geschieht. Diese ist mit  $O(\epsilon)$  unterdrückt (9.86). Die Summe im unteren Diagramm startet auch erst bei eins, weil die rechtshändige Nullmode auf Flavorniveau ungeladen ist.

Bei der Feynmanregel für die Kopplung an  $A_4$  muss berücksichtigt werden, dass dieses mit dem Goldstone-Boson  $\varphi \equiv A_4^{(0)}$  mischt. Die Goldstone-Fermion-Wechselwirkung ist (9.33):

$$S_{YU} = - \int d^4x \left\{ \left( \sum_{m=1} \bar{\Psi}_L^{(0)}(x) \lambda_f^{(0, m)} \frac{iA_4^{(0)}}{\sqrt{2}} \Psi_R^{(2m)}(x) + \sum_{n=1, m=1} \lambda_f^{(n, m)} \bar{\Psi}_L^{(2n-1)}(x) \frac{iA_4^{(0)}}{\sqrt{2}} \Psi_R^{(2m)}(x) \right) \right. \\ \left. - \left( \sum_{n=1} \bar{\Psi}_R^{(2n)}(x) \lambda_f^{(0, n)} \frac{iA_4^{(0)}}{\sqrt{2}} \Psi_L^{(0)}(x) + \sum_{n=1, m=1} \lambda_f^{(m, n)} \bar{\Psi}_R^{(2n)}(x) \frac{iA_4^{(0)}}{\sqrt{2}} \Psi_L^{(2m-1)}(x) \right) \right\} \quad (9.116)$$

mit

$$\lambda_f^{(n, m)} \equiv e^{kr\pi} \hat{f}_n^{L(d)}(\pi) \hat{f}_m^{R(s)}(\pi) \lambda_f^{(5)}.$$

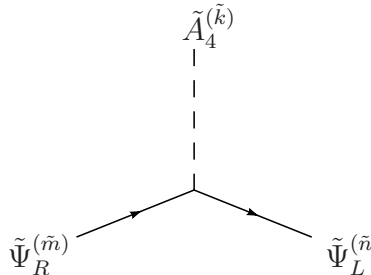
Dazu kommt die  $A_4$ -Wechselwirkung:

$$S_{int}^{A_4} \equiv \int d^4x \frac{ig_4}{r} \left\{ \sum_{m=1, k=1} \frac{1}{m_k} \bar{\Psi}_L^{(0)} A_4^{(k)} \bar{\Psi}_R^{(2m-1)} I_4^{(0, m, k)} + \sum_{n=1, m=1, k=1} \frac{1}{m_k} \bar{\Psi}_L^{(2n-1)} A_4^{(k)} \Psi_R^{(2m-1)} I_4^{(n, m, k)} \right. \\ \left. - \sum_{n=1, k=1} \frac{1}{m_k} \bar{\Psi}_R^{(2n-1)} A_4^{(k)} \Psi_L^{(0)} I_4^{(0, n, k)} - \sum_{n=1, m=1, k=1} \frac{1}{m_k} \bar{\Psi}_R^{(2n-1)} A_4^{(k)} \Psi_L^{(2m-1)} I_4^{(m, n, k)} \right\}. \quad (9.117)$$

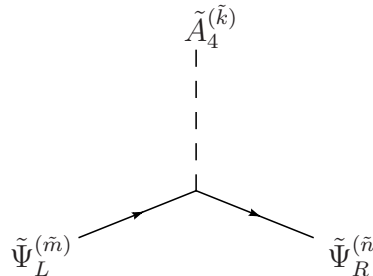
Wir definieren auch wieder  $V^{(-1,\tilde{n})} := V^{(0,\tilde{n})}$  und mit (9.60),(9.68) und (8.45) folgt dann:

$$\begin{aligned}
S_{int}^{A_4} + S_{YU} \equiv & \int d^4x \frac{ig_4}{r} \left\{ \sum_{\tilde{n},\tilde{m},\tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})} A_4^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{m})} \sum_{n=0,m=1,k=1} \frac{1}{m_k} G^{(k,\tilde{k})} U^{(2n-1,\tilde{n})} V^{(2m-1,\tilde{m})} I_4^{(n,m,k)} \right. \\
& \left. - \sum_{\tilde{n},\tilde{m},\tilde{k}} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{n})} A_4^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})} \sum_{n=1,m=0,k=1} \frac{1}{m_k} G^{(k,\tilde{k})} V^{(2n-1,\tilde{n})} U^{(2m-1,\tilde{m})} I_4^{(m,n,k)} \right\} \\
& - \int d^4x \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{\tilde{n},\tilde{m},\tilde{k}} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{n})}(x) A_4^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{m})}(x) \sum_{n=0,m=1} G^{(0,\tilde{k})} U^{(2n-1,\tilde{n})} V^{(2m,\tilde{m})} \lambda_f^{(n,m)} \right. \\
& \left. - \sum_{\tilde{n},\tilde{m},\tilde{k}} \tilde{\Psi}_R^{(\tilde{n})}(x) A_4^{(\tilde{k})} \tilde{\Psi}_L^{(\tilde{m})}(x) \sum_{n=1,m=0} G^{(0,\tilde{k})} V^{(2n,\tilde{n})} U^{(2m-1,\tilde{m})} \lambda_f^{(m,n)} \right\}. \quad (9.118)
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die Feynmanregeln:



$$\begin{aligned}
& = -\frac{g_4}{r} \sum_{n=0,m=1,k=1} \frac{1}{m_k} G^{(k,\tilde{k})} U^{(2n-1,\tilde{n})} I_4^{(n,m,k)} V^{(2m-1,\tilde{m})} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0,m=1} G^{(0,\tilde{k})} U^{(2n-1,\tilde{n})} \lambda_f^{(n,m)} V^{(2m,\tilde{m})}
\end{aligned} \quad (9.119)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{g_4}{r} \sum_{n=1, m=0, k=1} \frac{1}{m_k} G^{(k, \tilde{k})} V^{(2n-1, \tilde{n})} I_4^{(n, m, k)} U^{(2m-1, \tilde{m})} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1, m=0} G^{(0, \tilde{k})} V^{(2n, \tilde{n})} \lambda_f^{(m, n)} U^{(2m-1, \tilde{m})}.
\end{aligned} \tag{9.120}$$

Mit Hilfe dieser Regeln ist es prinzipiell möglich auch die  $\xi$ -Abhängigkeit für Prozesse mit Bulk-Fermionen zu untersuchen. Es gibt hier jedoch die erhebliche Komplikation, dass nun verschiedenste Integrale über Profile der Fermionen und Bosonen vorkommen. Dadurch ist die Art und Weise wie sich der Eichparameter heraushebt verschleiert. Er muss natürlich herausfallen, da die Theorie eichinvariant ist.



# Kapitel 10

## Phänomenologie

Zum Abschluss wollen wir noch einmal zur Phänomenologie von RS-Modellen mit Bulk-Feldern kommen. Die folgenden Betrachtungen gehen von der Existenz mehrerer Fermion-Generationen aus, um bei niedrigen Energien das SM modellieren zu können.

### 10.1 Massenhierarchien

In Abschnitt 9.2.1 wurde schon der Mechanismus zum Generieren der Fermionmassenhierarchien angesprochen (siehe dazu auch [39]). Man kann die Möglichkeit der Lokalisation von Fermionen bei der Planck Brane speziell auch zur Erklärung der sehr kleinen Neutrinomassen benutzen. Dies wurde in [34] behandelt. Durch Einführen zweier steriler Bulk-Neutrinos mit rechtshändiger Nullmode und  $c > 1/2$  werden kleine Überlappe mit TeV-Brane-lokalisierten linkshändigen (SM-)Neutrinos (und dem Higgs-Feld) und so kleine Massen erzeugt (ein Neutrino bleibt masselos). Für  $c > 1/2$  wird der Nenner in  $|f_0^R(1)|^2$  (9.21) sehr groß. Diese Wahl von  $c$  bedeutet, dass der fundamentale Massenparameter des Fermions größer als die halbe Krümmung  $k/2$  ist, was eine natürliche Annahme ist. Durch kleine Variationen von  $c$  entstehen auch ohne Feinabstimmung hierarchische Neutrinomassenverhältnisse. Des Weiteren werden generisch große Mischungswinkel vorhergesagt.

### 10.2 Höherdimensionale Operatoren

In Abschnitt 6.5 wurde das Problem angesprochen, dass im original RS-Modell höherdimensionale Operatoren nur noch mit  $1/TeV$  statt  $1/M_{PL}$  unterdrückt sind. Für Bulk-Fermionen sieht die Situation besser aus. Ein generischer Operator, der z.B. für  $K - \bar{K}$ -Mischung bzw. Protonzerfall relevant ist, hat die Struktur [39]:

$$\int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \frac{1}{M^3} \bar{\Psi}_i \Psi_j \bar{\Psi}_k \Psi_l \equiv \int d^4x \frac{1}{M_4^2} \bar{\Psi}_i^{(0)} \Psi_j^{(0)} \bar{\Psi}_k^{(0)} \Psi_l^{(0)}. \quad (10.1)$$

Die Unterdrückung  $M_4$  enthält die Terme aus den Fermionprofilen und bewegt sich jetzt je nach Wahl der  $c$ -Parameter zwischen  $M_{EW}$  und  $M_{PL}$ . Man kann so die  $K - \bar{K}$ -Mischung

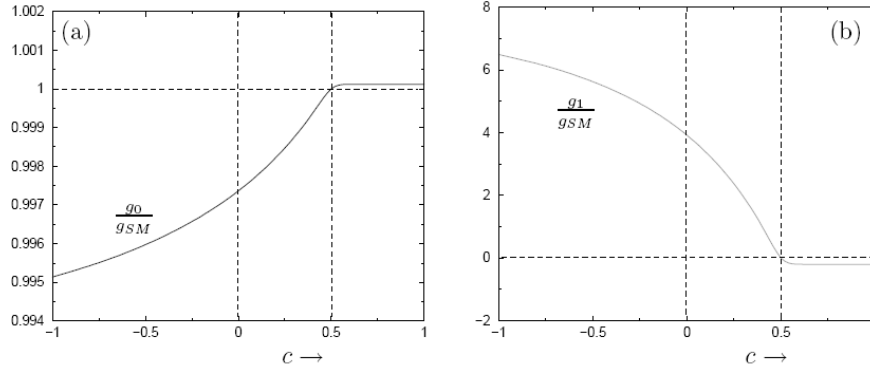


Abbildung 10.1: Kopplung des Z-Bosons (links) und seiner ersten KK-Anregung (rechts) an Fermionen in Abhängigkeit ihrer Lokalisierung, relativ zum SM-Wert (aus[40]).

genügend unterdrücken. Um die Grenzen aus dem nichtbeobachteten Protonzerfall zu erfüllen, müssten allerdings die Fermionen zu weit in Richtung der Planck-Brane lokalisiert sein, was zu kleine Fermionmassen bewirkt. Problematisch ist hier vor allem das Top-Quark. Hier sind weitere Mechanismen/Symmetrien von Nöten.

### 10.3 Flavor Changing Neutral Currents

Wir wollen hier konkret untersuchen, wie es in RS zu neuen FCNCs kommen kann. Die in Abschnitt 9.3 hergeleiteten Feynmanregeln für Kopplungen von Bulk-Fermionen an Bulk-Eichbosonen hängen ab von Überlappintegralen  $I_{L,R}$  (9.104) und  $I_4$  (9.108). Wenn man nun Fermionmassenhierarchien durch unterschiedliche Lokalisation der Fermionen in der Extradimension annimmt, hat dies zur Folge, dass die Kopplungen von verschiedenen Quark-Flavorn an Eichbosonen, die ein nichttriviales Profil haben, unterschiedlich sind (Abb. 10.1). Dieser Effekt ist zu beobachten für Austausch von KK-Eichbosonen sowie von massiven Eichboson-Nullmoden (Masseneigenzustände), da diese eine Beimischung von KK-Moden besitzen. Entscheidend ist, dass das Profil nicht flach ist. In Frage kommen für die SM-Eichfelder also alle KK-Moden sowie W- und Z-Nullmoden.

Wenn man im SM eine Kopplung durch ein neutrales Eichboson betrachtet (2.8), spielen die Drehungen der Fermionen zwischen WW- und Masseneigenzuständen aufgrund der Unitarität der Drehmatrizen, die sich einfach herausheben, keine Rolle. Diese Situation ist für Bulk-Fermionen nun anders. Die Kopplungen haben hier eine Struktur  $\sim \sum_{n,m,k} B^{(k,\tilde{k})} U^{(2n-1,\tilde{n})} I_L^{(n,m,k)} U^{(2m-1,\tilde{m})}$  (siehe z.B. (9.114)), bzw. falls alle mischenden Fermionen die gleiche Ladung haben  $\sim \sum_{n,m,k} B^{(k,\tilde{k})} U^{(n,\tilde{n})} I_L^{(n,m,k)} U^{(m,\tilde{m})}$ . Für eine WW mit einem massiven Eichboson ist dieser Ausdruck nun, falls die Fermionen unterschiedliche Profile haben, auch im Unterraum der Flavor, nicht mehr  $\sim 1$ . Dies liegt an den unterschiedlichen Überlappintegralen  $I_L^{(n,m,k)}$ . So werden neue FCNCs schon auf Baumgraphenniveau induziert. Durch die gleiche Ursache kommt es auch bei geladenen-Strom-Prozessen zu neu-

en Effekten. Hier steht jetzt auch ein Überlappintegral zwischen den Drehmatrizen für up- und down-type Quarks. Die so entstehende Matrix, welche die geladenen Wechselwirkungen beschreibt, ist nun nicht mehr unitär.<sup>1</sup> Deswegen funktioniert der GIM-Mechanismus nur noch bedingt, und durch Loopgraphen können größere FCNCs erzeugt werden (siehe hierzu auch[40]). Die Effekte sind am stärksten für das Top-Quark (und damit einhergehend auch für das im gleichen Dublett stehende Bottom-Quark  $b_L$ ), weil dieses bei der  $TeV$ -Brane lokalisiert sein sollte wo die Eichbosonprofile die größten Steigungen haben. Ohne weitere Annahmen sollten die neuen Tree-Level-FCNCs (z.B. KK-Gluon-Austausch) dominieren. Man kann ihren Effekt im Vergleich zu den bekannten SM-FCNCs abschätzen zu [41]:

$$\frac{M_{RS}}{M_{SM}} \sim 16\pi^2 \frac{g_{RS}^2}{g_2^4} \frac{m_W^2}{m_{kk}^2}, \quad (10.2)$$

wobei  $g_{RS}$  hier eine Kopplung in der Art von (9.114) bezeichnet. Die Effekte durch RS können so in die Größenordnung von SM-Effekten kommen. Solche Mechanismen könnten eine Erklärung für die in Abschnitt 2.3 erwähnten Abweichungen von Observablen gegenüber der SM Vorhersage sein. Es sei allerdings angemerkt, dass diese Abweichungen zu klein sind, um sie schon als neue Physik anzusehen.

Man kann auch so aus Präzisionsmessungen Grenzen an die Parameter von RS erhalten wie z.B. die KK-Massen. Wie in Abschnitt 7.3 erläutert liefert auch alleine schon die starke Kopplung von KK-Eichbosonen an bei der  $TeV$ -Brane lokalisierte Fermionen (t,b) Grenzen an die KK-Eichboson-Massen. Diese waren für reine Brane-Fermionen im Bereich von  $m_{kk} \stackrel{!}{>} 20TeV$ . Für Bulk-Fermionen sind die Grenzen schwächer [39], was ein Vorteil dieses Szenarios bezüglich des „little hierarchy problems“ ist. Jedoch bleibt (t,b) etwas problematisch und es kommen die neuen Effekte durch die nichtuniversellen Kopplungen hinzu.

---

<sup>1</sup>Des weiteren führt eine Mischung von Dubletts und Singletts zu Abweichungen.



# Kapitel 11

## Zusammenfassung und Ausblick

Das Randall-Sundrum-Modell bietet eine interessante Möglichkeit das Hierarchieproblem zu lösen. In Kapitel 7 und Kapitel 9 haben wir gesehen, dass es dafür nicht nötig ist, die Fermionen und Eichbosonen auf der  $TeV$ -Brane zu lokalisieren. Als Bulk-Felder haben ihre Kaluza-Klein-Anregungen immer noch Massen im  $TeV$ -Bereich und die Nullmoden können als Standardmodell-Teilchen fungieren. Zudem eröffnen sich Erklärungsansätze für im Standardmodell unverstandene Dinge. So entstehen z.B. Fermionmassenhierarchien auf natürliche Art und Weise (Abschnitt 10.1) und Grand Unified Theories im Randall-Sundrum-Szenario liefern z.B. auch einen Dunkle-Materie-Kandidaten [42]. Des Weiteren sind neue durch Kaluza-Klein-Eichbosonen, im Zusammenhang mit Bulk-Fermionen, induzierte Effekte (z.B. Flavor Changing Neutral Currents, Abschnitt 10.3) es Wert, genauer studiert zu werden. Zu diesem Zweck wurden in Kapitel 8 die  $R_\xi$ -Eichungen und die Betrachtungen zu den Bulk-Fermionen in Kapitel 9 durchgeführt. Eine Untersuchung in effektiver Feldtheorie mit ausintegrierten Kaluza-Klein-Anregungen bietet sich an. Hierzu muss man die hergeleiteten Feynmanregeln (Anhang B) auf die  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichgruppe erweitern, was keine größeren Probleme aufwirft. Die Berechnung von Schleifengraphen in Randall-Sundrum-Modellen sollte in endlicher  $R_\xi$ -Eichung auch möglich sein.



# Anhang A

## Gravitonen im Randall-Sundrum-Modell

In diesem Anhang wird die KK-Zerlegung für Gravitonen und ihre Kopplung an  $TeV$ -Brane-Felder in RS angegeben [43]. Die Tensorfluktuationen um die flache Metrik werden parametrisiert als:

$$G_{\alpha\beta} = e^{-2\sigma} (\eta_{\alpha\beta} + \kappa h_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.1})$$

mit  $\kappa = 2/M^{3/2}$ . Es wird eine Entwicklung in  $\kappa$  durchgeführt und nur lineare Terme werden berücksichtigt. Wir arbeiten in der Eichung  $\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\alpha} = 0$ . Mit der Zerlegung:

$$h_{\alpha\beta}(x, \phi) = \sum_n h_{\alpha\beta}^{(n)}(x) \frac{\Omega^{(n)}(\phi)}{\sqrt{r}} \quad (\text{A.2})$$

liefern die Einsteingleichungen in der Eichung  $\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\beta\gamma}^{(n)} = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(n)} = 0$  die Bewegungsgleichung für Gravitonen der Masse  $m_n$

$$(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta - m_n^2) h_{\mu\nu}^{(n)}(x) = 0, \quad (\text{A.3})$$

falls

$$-\frac{1}{r^2} \partial_\phi (e^{-4\sigma} \partial_\phi \Omega^{(n)}(\phi)) = m_n^2 e^{-2\sigma} \Omega^{(n)}(\phi), \quad (\text{A.4})$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2\sigma} \Omega^{(n)}(\phi) \Omega^{(m)}(\phi) = \delta^{mn} \quad (\text{A.5})$$

gilt. Die Lösung zu (A.4) ist eine Überlagerung von Besselfunktionen der zweiten Art:

$$\Omega^{(n)}(\phi) = \frac{e^{2\sigma}}{N_n} [J_2(z_n) + \beta_n Y_2(z_n)], \quad (\text{A.6})$$

mit  $z_n(\phi) = m_n e^\sigma / k$ . Mit

$$x_n \equiv z_n(\pi) = \frac{m_n}{k} e^{k\pi} \quad (\text{A.7})$$

ergibt sich im Limes  $m_n/k \ll 1$  sowie  $e^{kr\pi} \gg 1$  aus Stetigkeit der Ableitungen bei den Branes:

$$J_1(x_n) = 0, \quad \beta_n \sim x_n^2 e^{-2kr\pi}. \quad (\text{A.8})$$

Die erste Relation liefert die KK-Massen der Graviton-Anregungen. Diese sind in jedem KK-Level schwerer als die Eichfeldmassen (7.23). Für die Normierung gilt für  $x_n \ll e^{kr\pi}$  die Näherung

$$N_n \approx \frac{e^{kr\pi}}{\sqrt{kr}} J_2(x_n), \quad (n > 0). \quad (\text{A.9})$$

Es existiert zu (A.4) auch die Nullmodenlösung

$$\Omega^{(0)}(\phi) \approx \sqrt{kr}. \quad (\text{A.10})$$

Die Graviton-Nullmode wird also gerade durch den Warp-Faktor beschrieben (A.1). Kopplungen an  $TeV$ -Brane-Felder sind nun gegeben durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{M^{3/2}} T^{\alpha\beta}(x) h_{\alpha\beta}(x, \phi = \pi), \quad (\text{A.11})$$

wobei  $T^{\alpha\beta}(x)$  der Energie-Impuls-Tensor der Brane-Felder ist. Mit (A.2) erhält man [43]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{M_{PL}} T^{\alpha\beta}(x) h_{\alpha\beta}^{(0)}(x) - \frac{1}{\Lambda_\pi} T^{\alpha\beta}(x) \sum_{n=1} h_{\alpha\beta}^{(n)}(x), \quad (\text{A.12})$$

wobei:

$$\Lambda_\pi = e^{-kr\pi} M_{PL}. \quad (\text{A.13})$$

Man sieht hier dass die Nullmode mit der gewöhnlichen Stärke  $1/M_{PL}$  koppelt, während die KK Moden nur mit  $1/\Lambda_\pi \sim 1/M_{EW}$  unterdrückt koppeln.



# Anhang B

## Feynmanregeln

### B.1 Reine Eichtheorie

$$\langle A_\mu^{(n)} A_\nu^{(n)} \rangle = \frac{-i}{k^2 - m_n^2} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_n^2} (1 - \xi) \right). \quad (\text{B.1})$$

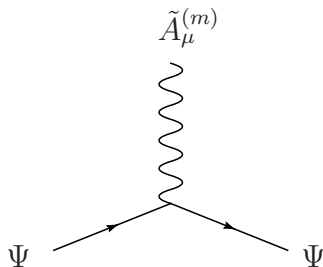
$$\langle A_4^{(n)} A_4^{(n)} \rangle = \frac{i}{k^2 - \xi m_n^2}. \quad (\text{B.2})$$

mit  $m_n$  aus (7.23)

### B.2 Abelsches Higgs-Modell mit Brane-Fermionen

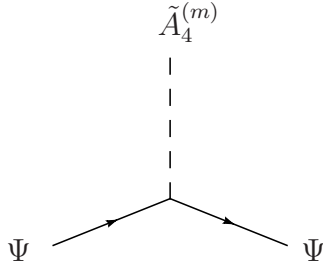
$$\langle \tilde{A}_\mu^{(n)} \tilde{A}_\nu^{(n)} \rangle = \frac{-i}{k^2 - M_A^{(n)2}} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M_A^{(n)2}} (1 - \xi) \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\langle \tilde{A}_4^{(n)} \tilde{A}_4^{(n)} \rangle = \frac{i}{k^2 - \xi M_A^{(n)2}}. \quad (\text{B.4})$$

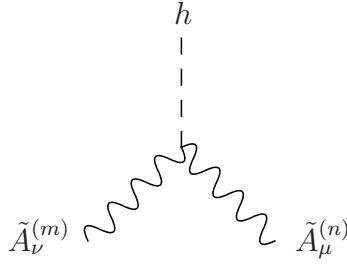


The diagram shows a vertex where a fermion line labeled  $\Psi$  enters from the left and splits into two outgoing fermion lines labeled  $\Psi$ . A wavy line labeled  $\tilde{A}_\mu^{(m)}$  also originates from this vertex and extends upwards.

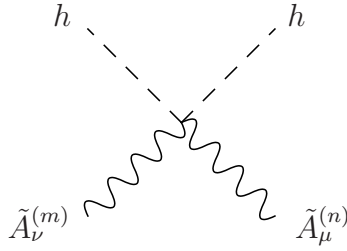
$$= i\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \sqrt{2\pi} g_4 \sum_{n=0} B^{(n,m)} \chi^{(n)}(\pi)$$



$$= \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \gamma^5 G^{(0,m)}$$



$$= i\eta^{\mu\nu} 2\pi \frac{2m_A^2}{v} \sum_{k,l} B^{(k,m)} B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi) \chi^{(k)}(\pi)$$



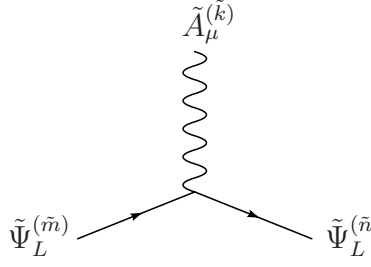
$$= i\eta^{\mu\nu} 2\pi \frac{2m_A^2}{v^2} \sum_{k,l} B^{(k,m)} B^{(l,n)} \chi^{(l)}(\pi) \chi^{(k)}(\pi)$$

|              |                        |
|--------------|------------------------|
| $m_n$        | aus (7.23)             |
| $m_A^2$      | aus (8.19)             |
| $M_A^{(n)2}$ | aus (8.23) bzw. (8.49) |
| $B^{(n,m)}$  | aus (8.34)             |
| $G^{(n,m)}$  | aus (8.45)             |
| $\chi^{(n)}$ | aus (7.17),(7.25)      |

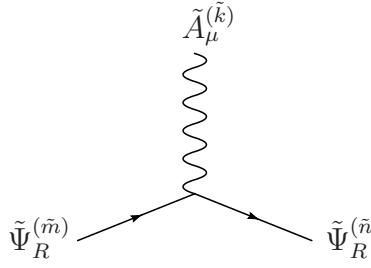
### B.3 Bulk-Fermionen

$$\langle \tilde{A}_\mu^{(n)} \tilde{A}_\nu^{(n)} \rangle = \frac{-i}{k^2 - M_A^{(n)2}} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M_A^{(n)2}} (1 - \xi) \right) \quad (\text{B.5})$$

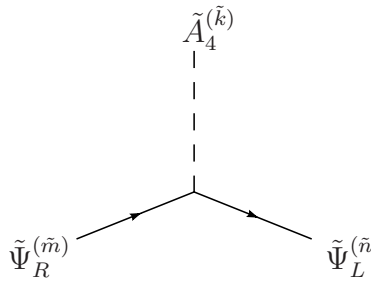
$$\langle \tilde{A}_4^{(n)} \tilde{A}_4^{(n)} \rangle = \frac{i}{k^2 - \xi M_A^{(n)2}}. \quad (\text{B.6})$$



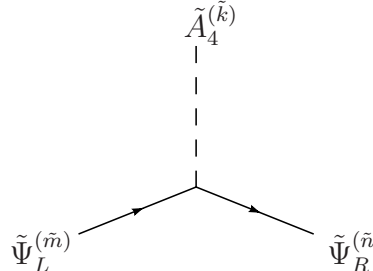
$$= ig_4 \gamma^\mu \sum_{n=0, m=0, k} B^{(k, \tilde{k})} U^{(2n-1, \tilde{n})} I_L^{(n, m, k)} U^{(2m-1, \tilde{m})} \quad (\text{B.7})$$



$$= ig_4 \gamma^\mu \sum_{n=1, m=1, k} B^{(k, \tilde{k})} V^{(2n-1, \tilde{n})} I_R^{(n, m, k)} V^{(2m-1, \tilde{m})} \quad (\text{B.8})$$



$$= -\frac{g_4}{r} \sum_{n=0, m=1, k=1} \frac{1}{m_k} G^{(k, \tilde{k})} U^{(2n-1, \tilde{n})} I_4^{(n, m, k)} V^{(2m-1, \tilde{m})} + \frac{1}{2} \sum_{n=0, m=1} G^{(0, \tilde{k})} U^{(2n-1, \tilde{n})} \lambda_f^{(n, m)} V^{(2m, \tilde{m})} \quad (\text{B.9})$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{g_4}{r} \sum_{n=1, m=0, k=1} \frac{1}{m_k} G^{(k, \tilde{k})} V^{(2n-1, \tilde{n})} I_4^{(n, m, k)} U^{(2m-1, \tilde{m})} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1, m=0} G^{(0, \tilde{k})} V^{(2n, \tilde{n})} \lambda_f^{(m, n)} U^{(2m-1, \tilde{m})}
\end{aligned}
\tag{B.10}$$

|                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| $m_n$              | aus (7.23)             |
| $M_A^{(n)2}$       | aus (8.23) bzw. (8.49) |
| $B^{(n, m)}$       | aus (8.34)             |
| $G^{(n, m)}$       | aus (8.45)             |
| $U^{(n, m)}$       | aus (9.60)             |
| $V^{(n, m)}$       | aus (9.68)             |
| $I_{L, R}$         | aus (9.104)            |
| $I_4$              | aus (9.108)            |
| $\lambda^{(n, m)}$ | aus (9.34)             |

# Literaturverzeichnis

- [1] Hirosi Ooguri and Zheng Yin. Lectures on perturbative string theories. 1996, hep-th/9612254.
- [2] Nima Arkani-Hamed. Vorlesung bei der Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach, 2007.
- [3] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 2000.
- [4] R. D. Peccei and Helen R. Quinn.  $cp$  conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.*, 38(25):1440–1443, Jun 1977.
- [5] Benjamin W. Lee, C. Quigg, and H. B. Thacker. Weak interactions at very high energies: The role of the higgs-boson mass. *Phys. Rev. D*, 16(5):1519–1531, Sep 1977.
- [6] Matthias Neubert. Vorlesung: Einführung in die Elementarteilchenphysik: Konzepte und Phänomene, 2007.
- [7] Matthias Neubert. Effective field theory and heavy quark physics. 2005, hep-ph/0512222.
- [8] Andrzej J. Buras. Weak hamiltonian,  $cp$  violation and rare decays. 1998, hep-ph/9806471.
- [9] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p.
- [10] Ugo Amaldi, Wim de Boer, and Hermann Furstenau. Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP. *Phys. Lett.*, B260:447–455, 1991.
- [11] Christopher T. Hill and Elizabeth H. Simmons. Strong dynamics and electroweak symmetry breaking. *Phys. Rept.*, 381:235–402, 2003, hep-ph/0203079.
- [12] Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, and Howard Georgi. Electroweak symmetry breaking from dimensional deconstruction. *Phys. Lett.*, B513:232–240, 2001, hep-ph/0105239.

- [13] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, 429:263, 1998, hep-ph/9803315.
- [14] Theodor Kaluza. On the problem of unity in physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, 1921:966–972, 1921.
- [15] O. Klein. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. *Z. Phys.*, 37:895–906, 1926.
- [16] Thomas Appelquist, Hsin-Chia Cheng, and Bogdan A. Dobrescu. Bounds on universal extra dimensions. *Phys. Rev.*, D64:035002, 2001, hep-ph/0012100.
- [17] V. A. Rubakov. Large and infinite extra dimensions: An introduction. *Phys. Usp.*, 44:871–893, 2001, hep-ph/0104152.
- [18] Csaba Csaki. Tasi lectures on extra dimensions and branes, 2004, hep-ph/0404096.
- [19] Eugene A. Mirabelli, Maxim Perelstein, and Michael Edward Peskin. Collider signatures of new large space dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2236–2239, 1999, hep-ph/9811337.
- [20] Schuyler Cullen and Maxim Perelstein. Sn1987a constraints on large compact dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 83:268–271, 1999, hep-ph/9903422.
- [21] Lisa Randall and Raman Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83:3370, 1999, hep-ph/9905221.
- [22] Raman Sundrum. Tasi 2004 lectures: To the fifth dimension and back, 2005, hep-th/0508134.
- [23] Csaba Csaki, Jay Hubisz, and Seung J. Lee. Radion phenomenology in realistic warped space models. 2007, arXiv:0705.3844 [hep-ph].
- [24] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999, hep-th/9906064.
- [25] Andre Lukas, Burt A. Ovrut, K. S. Stelle, and Daniel Waldram. The universe as a domain wall. *Phys. Rev.*, D59:086001, 1999, hep-th/9803235.
- [26] Herman L. Verlinde. Holography and compactification. *Nucl. Phys.*, B580:264–274, 2000, hep-th/9906182.
- [27] Walter D. Goldberger and Mark B. Wise. Modulus stabilization with bulk fields. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4922–4925, 1999, hep-ph/9907447.
- [28] H. Davoudiasl, J. L. Hewett, and T. G. Rizzo. Bulk gauge fields in the randall-sundrum model. *Phys. Lett.*, B473:43–49, 2000, hep-ph/9911262.

- [29] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. An introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [30] Lisa Randall and Matthew D. Schwartz. Quantum field theory and unification in ads5. *JHEP*, 11:003, 2001, hep-th/0108114.
- [31] Alexander Mück, Apostolos Pilaftsis, and Reinhold Rückl. Minimal higher-dimensional extensions of the standard model and electroweak observables. *Phys. Rev.*, D65:085037, 2002, hep-ph/0110391.
- [32] Alexander Mück. Diplomarbeit: Large extra dimensions: A 5d standard model, Würzburg (2001), <http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/TP2/publications/diplomarbeiten.html>.
- [33] Alexander Mück. Dissertation: The standard model in 5d: Theoretical consistency and experimental constraints, Würzburg (2004), <http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/TP2/publications/dissertationen.html>.
- [34] Yuval Grossman and Matthias Neubert. Neutrino masses and mixings in non-factorizable geometry. *Phys. Lett.*, B474:361–371, 2000, hep-ph/9912408.
- [35] A. N. Redlich. Gauge noninvariance and parity nonconservation of three-dimensional fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 52(1):18–21, Jan 1984.
- [36] Jr. Callan, Curtis G. and Jeffrey A. Harvey. Anomalies and fermion zero modes on strings and domain walls. *Nucl. Phys.*, B250:427, 1985.
- [37] Jan-Eric Daum. Zur klassischen Dynamik zweier massiver Punktteilchen im dreidimensionalen Anti-de Sitter-Raum. Mainz (2003), MZ-TH/03-D3.
- [38] Stephan J. Huber and Qaisar Shafi. Fermion masses, mixings and proton decay in a randall- sundrum model. *Phys. Lett.*, B498:256–262, 2001, hep-ph/0010195.
- [39] Tony Gherghetta and Alex Pomarol. Bulk fields and supersymmetry in a slice of ads. *Nucl. Phys.*, B586:141–162, 2000, hep-ph/0003129.
- [40] Stephan J. Huber. Flavor violation and warped geometry. *Nucl. Phys.*, B666:269–288, 2003, hep-ph/0303183.
- [41] Kaustubh Agashe, Gilad Perez, and Amarjit Soni. B-factory signals for a warped extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 93:201804, 2004, hep-ph/0406101.
- [42] Kaustubh Agashe and Geraldine Servant. Warped unification, proton stability and dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 93:231805, 2004, hep-ph/0403143.
- [43] H. Davoudiasl, J. L. Hewett, and T. G. Rizzo. Phenomenology of the randall-sundrum gauge hierarchy model. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2080, 2000, hep-ph/9909255.





# Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Matthias Neubert für die kompetente und freundliche Betreuung.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe THEP danke ich für die angenehme Atmosphäre und Hilfsbereitschaft, insbesondere Torsten Pfoh für die kollegiale Zusammenarbeit.

Ich bedanke mich bei meiner Freundin Julia für ihr Verständnis während der letzten Wochen (vor allem an Weihnachten).

Bei meiner Familie bedanke ich mich für die konstante Unterstützung.