
Twistormethoden in der Quantenfeldtheorie

Diplomarbeit

am

Institut für Physik

Johannes-Gutenberg-Universität Mainz



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

vorgelegt von

Sebastian Buchta

Mai 2010

Autor:

Sebastian Buchta
Theoretische Hochenergiephysik
Institut für Physik
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
55128 Mainz
E-Mail: sbuchta@students.uni-mainz.de

Betreuer:

Prof. Dr. Stefan Weinzierl
Theoretische Hochenergiephysik
Institut für Physik
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
55128 Mainz

Zweitkorrektor:

Prof. Dr. Florian Scheck
Theoretische Hochenergiephysik
Institut für Physik
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
55128 Mainz

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	5
1 Einleitung	7
1.1 Überblick	10
2 Moderne Behandlung von Eichtheorien	11
2.1 Notation und Konventionen	11
2.2 Das Standardmodell der Teilchenphysik	12
2.2.1 QCD	12
2.2.2 Elektroschwache Wechselwirkung	14
2.3 Spontane Symmetriebrechung	16
2.3.1 Einfaches Beispiel	16
2.3.2 $O(3)$ Sigma-Modell	17
2.3.3 Higgs und elektroschwache Wechselwirkung	21
2.4 Spinor-Helizitäts-Formalismus	23
2.4.1 Masselose Spinoren	23
2.4.2 Polarisationsvektoren	25
2.4.3 Massive Spinoren	26
2.5 Reduktionstechniken	27
2.6 Farbgeordnete partielle Amplituden	28
2.7 Die Parke-Taylor-Amplitude	29
2.8 Die CSW-Regeln	30
2.8.1 Allgemeine Regeln	30
2.8.2 Illustration am Beispiel der Amplitude $A(1^+2^-3^-4^-)$	32
2.8.3 Beweis	34
2.9 Die BCF-Rekursion	34

3	Präsentation der Methode	37
3.1	Die Yang-Mills-Wirkung in Lichtkegelkoordinaten	37
3.2	Die Transformation	40
3.3	Impulsraum	43
3.4	Lösung	46
3.4.1	Erste Ordnung	46
3.4.2	Zweite Ordnung	47
3.4.3	Rekursion	48
3.5	Ausblick	50
3.A	Inverse Differentialoperatoren	51
3.A.1	Partielle Integration	51
3.A.2	Produktregel	51
3.B	Ausintegrieren eines Freiheitsgrades	52
3.C	Kanonische Transformationen	53
4	Anwendung auf den elektroschwachen Eichbosonensektor	55
4.1	Lichtkegelkoordinaten	55
4.2	Die Transformation	60
4.3	Impulsraum	62
4.4	Lösung	63
4.4.1	Erste Ordnung	64
4.4.2	Zweite Ordnung	64
4.4.3	Rekursion	65
4.5	Einfluß der spontanen Symmetriebrechung	65
4.5.1	Eichboson-Skalar-Kopplung	65
4.5.2	Potentialverschiebung	67
4.6	Diskussion	68
4.6.1	Ausblick	68
4.6.2	Rückblick	68
4.6.3	Zusammenfassung	69
4.A	Fierzidentität	70

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Stefan Weinzierl für das sichere Geleit durch das Thema der Diplomarbeit danken. Mit seiner Unterstützung und Weitsicht hat er ganz wesentlich zum Gelingen dieses Projektes beigetragen.

Weiterer Dank gebührt meinen Kollegen im Büro Alimujiang Kadeer, Mohammad Assadsoimani, Sebastian Becker und Marko Ternick. Es war eine Freude, neben ihnen zu arbeiten. Wann immer ich sie um Rat fragte, standen sie mir helfend zur Seite.

Besonderen Dank möchte ich Stefan Medina Hernando aussprechen, mit dem ich das Studium quasi im Tandem bestritten habe und mit dem mich viele angenehme Erinnerungen aus dieser Zeit verbinden.

Innerhalb meiner Arbeitsgruppe würde ich mich gerne bei Christian Reuschle bedanken, der sich meiner Probleme mit der Computeralgebra angenommen hat.

Ferner danke ich meinem Großvater Dr. Günther Meffle sowie meinen Eltern für das Korrekturlesen.

Schließlich möchte ich noch meine Eltern Helmut und Brigitte Buchta nennen, die mich über das komplette Studium hinweg sowohl in guten als auch in schlechten Zeiten in unverbrüchlicher Weise unterstützt haben.

1 Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist eine Quantenfeldtheorie mit einer $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$ Eichsymmetrie. Es stellt damit eine Beschreibung von drei der vier fundamentalen Kräften der Natur, nämlich starker, schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung, dar. Bis heute ist die adäquate Quantisierung der Gravitation ein ungelöstes Problem. Der $SU(3)_C$ -Anteil gehört zur starken und der $SU(2)_I \times U(1)_Y$ -Anteil zur elektroschwachen Wechselwirkung. Während die Symmetrie der starken Wechselwirkung perfekt erhalten ist, wird die Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien über den Higgsmechanismus spontan zu $U(1)_{EM}$ gebrochen. Dies führt dann zu den Massen der Eichbosonen W^\pm und Z von 80 GeV bzw. 91 GeV.

Das Standardmodell in seiner heutigen Form hat sich als sehr erfolgreiche Theorie erwiesen. Einerseits hat es zahllose experimentelle Tests mit Bravour bestanden, andererseits bleiben einige kleine Schönheitsfehler. Das für den Higgsmechanismus ursächliche Higgsboson wurde noch nicht beobachtet, seine Masse läßt sich lediglich auf den Bereich zwischen 115 GeV und 180 GeV einschränken [1]. Jenseits des Standardmodells bleiben Fragen nach der Masse der Neutrinos, der Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie sowie der sogenannten “Neuen Physik”, d.h. neuartige physikalische Effekte bei hohen Energien oder Präzisionsmessungen, offen.

Zur Klärung dieser Probleme wird der LHC (**L**arge **H**adron **C**ollider) am Kernforschungszentrum in Genf beitragen. Dieser Teilchenbeschleuniger arbeitet bei Schwerpunktsenergien von bis zu 14 TeV. Damit sind die Energiebereiche zugänglich, in denen wir das Auftreten des Higgsbosons vermuten. Zusätzlich ist die Energie hoch genug, um erste Signale der “Neuen Physik” aufzufangen. Diese könnten von Supersymmetrie oder auch verborgenen Extradimensionen herrühren, um nur die populärsten der gegenwärtig diskutierten Modelle zu nennen.

1 Einleitung

Die Aufgabe der theoretischen Physiker ist die Bereitstellung entsprechender Rechnungen von Streuquerschnitten, die sich dann mit dem Experiment vergleichen lassen. Dabei ist bis heute die Methode der Feynmandiagramme das Mittel der Wahl, wenn es um die störungstheoretische Berechnung von Amplituden geht. Für Prozesse mit vielen äußeren Beinen steigt die Zahl der zu berechnenden Diagramme überproportional stark an. Daher ist es erforderlich, Möglichkeiten zu finden, den Rechenaufwand zu reduzieren. In der Vergangenheit sind dazu bereits einige Verfahren entwickelt und mit Erfolg angewendet worden. Eine Methode, den Komplexitätsgrad der Amplituden nichtabelscher Eichtheorien zu verringern sind die “partiellen” Amplituden. Dabei wird aus der gewünschten Amplitude die Farbstruktur extrahiert, übrig bleibt der kinematische Anteil. Ein weiteres prominentes Beispiel sind die sogenannten MHV-Amplituden (**m**aximal **h**elicity **v**iolating), die von Parke und Taylor entdeckt wurden [2]. Sie erlauben die schnelle Berechnung der Amplitude von n Gluonen, davon zwei mit negativer Helizität:

$$\begin{aligned} A(1^+, \dots, n^+) &= 0 \\ A(1^-, 2^+, \dots, n^+) &= 0 \\ A(1^-, 2^+, \dots, j^-, \dots, n^+) &= \frac{\langle 1j \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n-1, n \rangle \langle n1 \rangle} \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse sind geradzublüffend viel einfacher, als man es von einer üblichen Diagrammrechnung erwarten würde. Sie wurden später von Berends und Giele bewiesen [3]. Der Ursprung der MHV-Amplituden geht auf die Untersuchung der Twistorräume im Zusammenhang mit Eichtheorien zurück. Der Twistorraum ist der projektive Raum über dem Minkowskiraum. Punkte im Minkowskiraum entsprechen Geraden im Twistorraum. Vertices im Minkowskiraum sind Punkte, also gilt dies auch für sie. Ferner stellte sich heraus, daß besagte MHV-Amplituden ebenfalls Geraden im Twistorraum entsprechen. Damit entstand die Idee, sie als Vertices zur Berechnung von Amplituden von Eichtheorien zu verwenden. Witten hat, zusammen mit Cachazo und Svrček, ein Regelwerk (CSW-Regeln) ausgearbeitet, mit dem sich die Amplituden beliebiger Helizitätskonfigurationen auf Baumgraphenniveau berechnen lassen [4]. Dafür werden die MHV-Amplituden als Vertices benutzt und in bestimmter Weise mit skalaren Propagatoren verknüpft. Damit steht ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung, um die Berechnung von Baumamplituden dramatisch zu beschleunigen. Es wurden ebenfalls Anstrengungen unternommen, Ähnliches für Schleifen zu finden, doch existiert bis heute kein vergleichbares Resultat in diesem Bereich.

Eine Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist: Besteht eine Möglichkeit, die MHV-Vertices im Rahmen einer Feldtheorie sichtbar zu machen? Bzw. genauer: Kann man die Lagrangedichte einer Quantenfeldtheorie so umbauen, daß die bekannte Feynmandiagrammentwicklung als Ergebnis die MHV-Regel liefert? Die Beantwortung dieser Frage zielt darauf ab, den Ursprung dieser Simplizität aufzuklären. Die Vermutung liegt nahe, daß Eichtheorien einfacher aufgebaut sind, als bisher angenommen. Für die QCD ist es James Eitle [6],[11] bereits gelungen, eine entsprechende Transformation an der Lagrangedichte vorzunehmen. Er transformiert kanonisch auf einen neuen Satz von dynamischen Freiheitsgraden, die tatsächlich die bekannten CSW-Regeln reproduzieren. In dieser Diplomarbeit soll untersucht werden, inwiefern sich dies auch im Falle einer gebrochenen Symmetrie anwenden läßt. Konkret soll versucht werden, die MHV-Regeln für den elektroschwachen Eichbosonensektor zu finden. Dabei erwartet man einerseits Gemeinsamkeiten, weil die elektroschwache Wechselwirkung, ebenso wie die QCD, eine lokale Eichtheorie mit einer Liegruppe als Symmetriegruppe ist. Andererseits ist damit zu rechnen, daß die gebrochene Natur dieser Symmetrie zu Abweichungen führt. Im Rahmen der hier vorgenommenen Überlegungen kommt der spontanen Symmetriebrechung eine Schlüsselrolle zu. Einerseits, wegen ihrer Relevanz für die Diplomarbeit einerseits, und andererseits, weil sie eines der wichtigsten Konzepte moderner Physik ist. Dies wurde durch die Verleihung des Nobelpreises an Nambu, Kobayashi und Masukawa im Jahre 2008 bestätigt.

1.1 Überblick

Diese Diplomarbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

In Kapitel 2 diskutiere ich die grundlegenden Werkzeuge und Techniken der störungstheoretischen Behandlung von Eichtheorien und bereite den Boden für die Inhalte von Kapitel 3 und 4. Insbesondere gebe ich einen kurzen Abriss über QCD sowie elektroschwache Wechselwirkung und bespreche sowohl den Spinor-Helizitäts-Formalismus als auch die spontane Symmetriebrechung. Ein weiterer Schwerpunkt des zweiten Kapitels sind die verschiedenen Techniken zur Reduktion des Rechenaufwandes: Farbgeordnete partielle Amplituden, die Parke-Taylor MHV-Amplitude und deren Verwendung innerhalb der CSW Regeln auf Baumgraphenniveau, sowie die BCF-Rekursion.

Kapitel 3 dient dazu, den von Mansfield [11] und Eittle [6] ausgearbeiteten Weg zur MHV-Lagrangedichte am Beispiel der reinen Yang-Mills-Theorie nachzuvollziehen. Die entscheidenden Schritte dafür sind das Umschreiben der Lagrangedichte auf Lichtkegelkoordinaten und die Formulierung der Bestimmungsgleichung für die MHV-Form. Anschließend transformiert man kanonisch auf neue Freiheitsgrade, in denen man die Bestimmungsgleichung löst. Die Lösung dieser Gleichung ist der Schlüssel zur MHV-Amplitude.

In Kapitel 4 bringe ich das in Kapitel 3 gewonnene Wissen zur Anwendung. Zunächst kümmere ich mich um die korrekte Einbindung des Higgsdubletts. Anhaltspunkte dafür finden sich in [10]. In Anwesenheit dieses zusätzlichen Skalarfeldes nehmen die kanonische Transformation und infolgedessen auch die Bestimmungsgleichung eine veränderte Form an. Am Ende spielen Effekte im Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung eine Rolle.

2 Moderne Behandlung von Eichtheorien

2.1 Notation und Konventionen

Zunächst die Festlegung, mit welchen Konventionen ich vorhabe zu arbeiten. Berechnungen werden in natürlichen Einheiten durchgeführt, das bedeutet:

$$\hbar = c = 1$$

Metrik:

$$\{g_{\mu\nu}\} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Summenkonvention:

$$\sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu \equiv a^\mu b_\mu$$

Paulimatrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sie erfüllen die Relationen:

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\varepsilon^{abc}\sigma^c, \quad \text{tr}(\sigma^a\sigma^b) = 2\delta^{ab} \quad (2.1)$$

Die Zeichenfolge “tr” steht für engl. “trace” also Spur und bezeichnet die Spurbildung.

2.2 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell ist eine Quantenfeldtheorie, mit der wir heutzutage nahezu alle Prozesse der Teilchenphysik mit hoher Präzision auf fundamentalem Niveau richtig beschreiben können. Ihr liegt eine $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie zugrunde. Obwohl die wechselwirkenden Konstituenten eigentlich Felder sind, erfolgt die perturbative Beschreibung beinahe vollständig im Teilchenbild. Wir stellen uns vor, daß die Kraft zwischen zwei Materieteilchen durch Austauschteilchen vermittelt wird. Allen Wechselwirkungen gemein ist, daß die Materiefelder Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen sind und die Austauschteilchen Spin-1-Bosonen.

2.2.1 QCD

Die QCD, Quantenchromodynamik, ist eine nichtabelsche Eichtheorie mit der Wirkung

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \quad (2.2)$$

und der Symmetriegruppe $SU(3)$. Die Fermionfelder ψ transformieren unter deren fundamentaler Darstellung. Sie sind, neben den Gluonen, die dynamischen Freiheitsgrade der Theorie und werden über die Felder ψ beschrieben. Die Quarks existieren in sechs verschiedenen Sorten, wobei die Quarks jeder Sorte eine andere Masse besitzen. D ist die sogenannte kovariante Ableitung, definiert als

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} A_\mu \quad (2.3)$$

mit dem Gluonfeld $A_\mu = A_\mu^a T^a$, das in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe formuliert wird. Die Gruppe $SU(N)$ hat $N^2 - 1$ Generatoren, daher hat die $SU(3)$ acht Stück. Sie spannen die Liealgebra $\mathfrak{su}(3)$ auf und sind gemäß $\text{tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}$ und $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$ normalisiert. $F_{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor. Er ist eine algebrawertige Zweiform und über

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.4)$$

definiert. Die ersten beiden Terme sind eine vierdimensionale Rotation und aus der QED wohlbekannt. Der zweite Term ist typisch für nichtabelsche Symmetriegruppen und Ursache für die Gluon selbstwechselwirkung.

Betrachtet man die QCD in Abwesenheit von Quarks, so bleibt nur diese Gluonselfwechselwirkung übrig. Der zugehörige Zweig der Physik wird als (reine) Yang-Mills Theorie bezeichnet.

Die QCD zeigt zwei besondere Eigenschaften: Confinement (Einkerkerung) und asymptotische Freiheit. Sie haben im wesentlichen mit der laufenden Kopplungskonstante der QCD zu tun. Laufend bedeutet, daß die Kopplungskonstante eine Abhängigkeit von der Energie des ablaufenden Prozesses zeigt [9]:

$$\alpha_s(Q) = \frac{2\pi}{(11 - 2n_f/3) \ln(Q/\Lambda_{QCD})} \quad (2.5)$$

Confinement tritt bei niedrigen Energien auf. Dort ist die Kopplung stark, und physikalische Zustände sind immer Farbsingulets. Weder freie Quarks noch freie Gluonen werden in diesen Energieregionen beobachtet.

Asymptotische Freiheit tritt bei hohen Energien auf. Die Kopplung ist dann sehr schwach und die Quarks bewegen sich quasi wie freie Teilchen. In diesem Energiebereich wird die physikalische Beschreibung mit Feynmandiagrammen möglich. Zu diesem Zweck quantisiert man die Wirkung über die Faddeev-Popov Methode. Auf diesem Wege gelangen sogenannte Geistfelder in die Theorie. Sie heißen so, da sie aufgrund ihres falschen Spin-Statistik-Zusammenhangs unphysikalisch sind. Um sie abzuschütteln, wechselt man in die axiale Eichung, in der die Geister von den Gluonen entkoppeln. Damit ist die Wirkung eichfixiert. Nun bestimmt man mit der üblichen Feynmanprozedur Propagatoren und Vertices. Zur Berechnung einer Amplitude in beliebiger Ordnung in g malt man sich alle beitragenden Feynmandiagramme auf, kontrahiert sie mit den äußeren Polarisationsvektoren und Spinoren und summiert sie auf.

$i \xrightarrow{p} j$	$\frac{i}{p-m} \delta_{ij}$	$\frac{i}{p-m}$
$\mu, a \xrightarrow{p} \text{oooooo} v, b$	$-\frac{i}{p^2} g^{\mu\nu} \delta^{ab}$	$-\frac{i}{p^2} g^{\mu\nu}$

Tabelle 2.1: Propagatoren in der QCD in Feynmaneichung, ohne Berücksichtigung der Geister. In der zweiten Spalte stehen die gewöhnliche Feynmanregeln, in der dritten die farbgeordneten.

	$\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\mu T^a$	$\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\mu$
	$gf^{abc}[g^{\mu\nu}(p-k)^\rho + g^{\nu\rho}(q-p)^\mu + g^{\rho\mu}(k-q)^\nu]$	$-\frac{ig}{\sqrt{2}}[g^{\mu\nu}(p-k)^\rho + g^{\nu\rho}(q-p)^\mu + g^{\rho\mu}(k-q)^\nu]$
	$-ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})]$	$ig^2(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}[g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}])$

Tabelle 2.2: Vertices in der QCD in Feynmanzeichnung, ebenfalls ohne Geister. In der zweiten Spalte stehen die gewöhnliche Feynmanregeln, in der dritten die farbgeordneten. Alle Impulse sind auslaufend.

Leider ist diese Methode bei maschineller Realisierung sehr rechenintensiv. So wächst beispielsweise die Anzahl der Feynmandiagramme, die zur n -Gluonen Amplitude beitragen, schneller als $n!$. Wie man dieser Problematik begegnet, ist in Kapitel 2.5 weiter ausgeführt.

2.2.2 Elektroschwache Wechselwirkung

Bis 1967 wurden elektromagnetische und schwache Wechselwirkung durch separate Quantenfeldtheorien beschrieben. In jenem Jahr gelang es Salam, Weinberg und Glashow beide Wechselwirkungen als Spezialfälle einer einzigen, vereinheitlichten Theorie zu verstehen. Die Ursache, warum beide Wechselwirkungen im Labor so verschieden erscheinen, liegt in

der spontan gebrochenen Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung.

Die Wirkung der elektroschwachen Theorie ist ähnlich aufgebaut, wie die der QCD:

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} \text{tr} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \text{tr} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right\} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2$$

Die Materiefelder ψ der elektroschwachen Wechselwirkung sind die sechs Leptonen, aber auch Quarks tragen schwache Ladung. Sie können in drei Generationen gruppiert werden. Elektron, Myon und Tauon nehmen sowohl an der schwachen wie auch an der elektromagnetischen Wechselwirkung teil. Die korrespondierenden Neutrinos wechselwirken ausschließlich schwach. Innerhalb des Standardmodells werden sie als masselos angenommen. Jedoch belegen jüngere Experimente, daß auch sie eine, wenn auch sehr kleine, Masse besitzen. Damit werden Effekte, wie die Neutrinooszillationen, möglich, mit denen z.B. das solare Neutrinoproblem gelöst wird.

Der Operator D ist definiert als

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{2} W_\mu^a \sigma^a - \frac{ig'}{2} B_\mu Y \quad (2.6)$$

Die zugrundeliegende Symmetriegruppe der elektroschwachen Wechselwirkung ist die $SU(2) \times U(1)$. Im obigen Ausdruck sind die σ^a die Generatoren der $SU(2)$ und die Hyperladung Y ist der Generator der $U(1)$. Wegen des direkten Produkts der beiden Gruppen, tragen sie unterschiedliche Kopplungskonstanten.

Die Felder W und B sind die Eichfelder der Theorie. W ist ein Yang-Mills-Feld, genauso wie die Gluonen der QCD. Der zugehörige Feldstärketensor $W_{\mu\nu}$ ergibt sich, indem man in Gleichung (2.4) A mit W vertauscht. Zu B gehört die abelsche Symmetriegruppe $U(1)$. Demzufolge fehlt im Feldstärketensor von B der Kommutatorterm.

So, wie B und W in der Lagrangedichte erscheinen, handelt es sich um masselose Felder. Wir wissen aber aus Experimenten, daß die W - und Z -Bosonen massiv sind. Um diesen Makel der Theorie zu beseitigen, behilft man sich mittels eines weiteren Feldes ϕ , des sogenannten Higgsfeldes, das über den Term $(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi$ an die Eichbosonen ankoppelt. Über den Higgsmechanismus erhalten die a priori unphysikalischen und masselosen Felder B und W Masse. Wandelt man nun die unphysikalischen Felder W und B in physikalische um, so wird die $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie auf eine $U(1)$ -Symmetrie heruntergebrochen und man hat eine Lagrangedichte mit den korrekten Massentermen für die W - und Z -Bosonen sowie das Photon. Wie dies im Detail funktioniert, ist in Kapitel (2.3.3) erläutert.

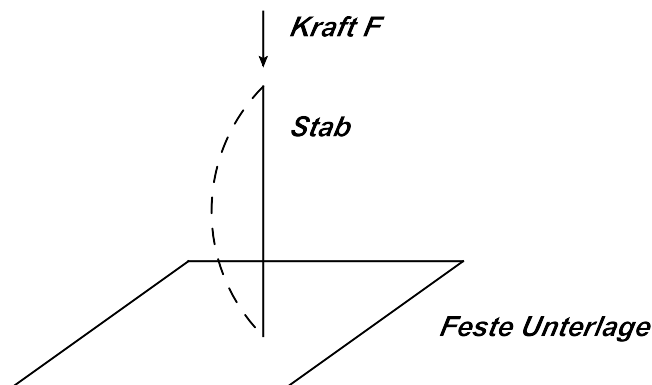
Die restlichen Terme stellen das Potential des Higgsfeldes dar.

Warum spielt trotz der Ähnlichkeiten von QCD und elektroschwacher Wechselwirkung das Phänomen “Confinement” keine Rolle? Die Ursache liegt darin, daß die Austauschbosonen der schwachen Wechselwirkung sehr schwer sind, nämlich 80 GeV für das W^\pm und 91 GeV für das Z^0 , so daß keine gebundenen Zustände möglich sind. “Asymptotische Freiheit” hingegen wird, wie in der QCD, beobachtet.

2.3 Spontane Symmetriebrechung

2.3.1 Einfaches Beispiel

Als erstes möchte ich ein einfaches Beispiel für die spontane Symmetriebrechung geben [8]. Dieses Beispiel kommt ohne kompliziertes Formelwerk aus und trägt bereits die wesentlichen Züge der gebrochenen Symmetrie. Man betrachte einen Stab, der senkrecht auf einer Ebene steht. Die Abbildung unten zeigt die Situation.



Solange die Kraft F , mit der von oben entlang der Längsachse auf den Stab gedrückt wird, klein ist, verformt sich der Stab nicht. Überschreitet F einen Schwellwert S , d.h. $F > S$, verbiegt sich der Stab bogenförmig (gestrichelte Linie), wie in der Abbildung angedeutet. Für $F < S$ ist das System also in einer symmetrischen Konfiguration. Drehungen mit beliebigem Winkel um die Stabachse überführen das System in sich selbst. Sobald $F > S$ wird die bisherige Konfiguration instabil und das System geht in einen neuen Grundzustand über. Dieser weist nicht mehr die gleiche Symmetrie wie der alte auf. Die Symmetrie ist gebrochen. Die

Richtung, in welche der Bogen zeigt, ist dabei vollkommen zufallsabhängig. Alle möglichen Richtungen, in die der Bogen zeigen könnte, gehen durch Rotation auseinander hervor. Klarerweise muß das System aus allen möglichen neuen Grundzuständen einen auswählen, den es dann tatsächlich annimmt. Die wichtigen Phänomene sind hier:

- Ein Parameter des physikalischen Systems (hier die Kraft F) nimmt einen kritischen Wert an.
- Jenseits dieses kritischen Wertes wird die symmetrische Konfiguration instabil.
- Der neue Grundzustand ist entartet.

2.3.2 $O(3)$ Sigma-Modell

Das $O(3)$ Sigma-Modell eignet sich zur Demonstration einer globalen spontan gebrochenen Symmetrie [7]. Die spontane Symmetriebrechung tritt hier auf, wenn der Grundzustand des Systems eine niedrigere Symmetrie als der Hamiltonoperator aufweist. Zur Illustration dient hier ein Hamiltonoperator mit $SO(3)$ -Symmetrie. Die korrespondierende Lagrange-dichte ist:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - \frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i - \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2 \quad (2.7)$$

Die Φ_i sind hier reelle oder auch hermitesche Felder. Damit lautet die zugehörige Hamiltondichte:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\Phi}_i^2 + \frac{1}{2} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_i}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i + \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2}_{V(\Phi)} \quad (2.8)$$

Wir fordern $\lambda > 0$, damit \mathcal{H} nach unten beschränkt ist, d.h. das System besitzt einen Grundzustand. Die Feldkonfiguration, welche \mathcal{H} minimiert, muß räumlich und zeitlich konstant sein, um den kinetischen Anteil ebenso zu minimieren. Anhand des Parameters m werden zwei Fälle unterschieden.

- $m^2 > 0$: Wigner-Weyl-Realisierung der Symmetrie. $\Phi = 0$ minimiert \mathcal{H} . Dem entspricht ein eindeutiger Grundzustand $|0\rangle$ in der Quantentheorie.

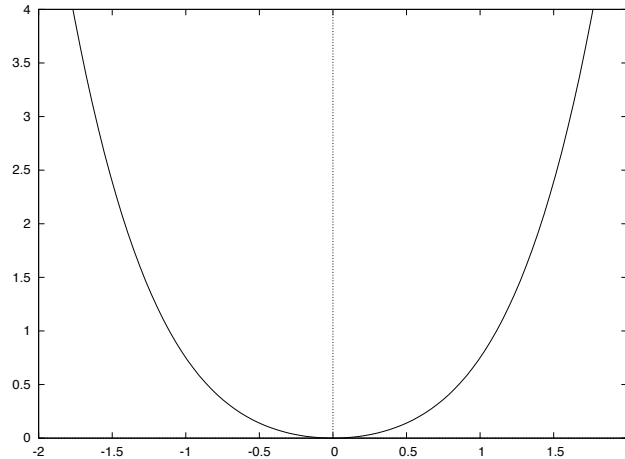


Abbildung 2.1: Gestalt des Potentials $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$

- $m^2 < 0$: Nambu-Goldstone-Realisierung der Symmetrie. Es gibt mehrere voneinander verschiedene Minima.

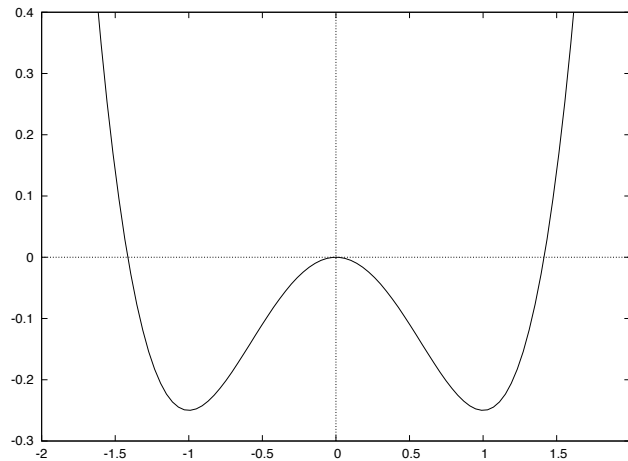


Abbildung 2.2: Gestalt des Potentials $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$

Dieses Potential wird in den Lehrbüchern oft auch als “Mexikanerhutpotential” bezeichnet.

Für die spontane Symmetriebrechung ist der Fall $m^2 < 0$ von Relevanz. Die Lagrangedichte \mathcal{L} ist invariant unter globaler "Isospin"-Rotation, d.h.

$$g \in SO(3) : \Phi_i \rightarrow \Phi'_i = D_{ij}(g)\Phi_j = (e^{-i\alpha_k T_k})_{ij} \Phi_j \quad (2.9)$$

mit

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \quad (2.10)$$

wo

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Gesucht ist nun das Minimum des Potentials. Dies liefert den Grundzustand des physikalischen Systems. Durch Ableiten nach Φ_i findet man

$$|\Phi|_{\min} = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \equiv v, \quad |\Phi| = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2} \quad (2.12)$$

Φ_{\min} kann in jede mögliche Richtung des Isospinraums zeigen, da durch die Minimierung keine Richtung ausgewählt wird. \Rightarrow Es existieren überabzählbar viele entartete Grundzustände. Jede noch so kleine Störung des Systems wird eine spezielle Richtung auswählen. Man orientiert das innere Koordinatensystem nun so, daß Φ_{\min} in die 3-Richtung zeigt.

$$\vec{\Phi}_{\min} = v\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Damit lassen sich zwei Aspekte beobachten.

$\vec{\Phi}_{\min}$ ist nicht invariant unter der vollen Symmetriegruppe $G = SO(3)$. Um dies zu zeigen, betrachten wir infinitesimale Rotationen um die 1- und 2-Achse. Damit Invarianz vorliegt, müssten die Generatoren T_1 und T_2 das Feld $\vec{\Phi}_{\min}$ vernichten. Es ist aber

$$T_1 \vec{\Phi}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$T_2 \vec{\Phi}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Die Menge der Transformationen, die das Vakuum nicht vernichten, kann keine Gruppe bilden, da die Einheit nicht in dieser Menge liegt.

Damit kommen wir zum zweiten Aspekt. $\vec{\Phi}_{\min}$ ist invariant unter einer Untergruppe H von G. In diesem Beispiel hier sind dies Drehungen um die 3-Achse.

$$h \in H : \Phi_i \rightarrow \Phi'_i = D_{ij}(h)\Phi_j = (e^{-i\alpha_3 T_3})_{ij} \Phi_j, \quad D(h)\Phi_{\min} = \Phi_{\min}, \quad (2.16)$$

$$T_3 \vec{\Phi}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

Man kann jetzt Φ_3 umschreiben als $\Phi_3 = v + \eta(x)$ mit $v = \text{const}$ und erhält daraus einen neuen Ausdruck für das Potential $V(\Phi)$.

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} (-2m^2) \eta^2 + \underbrace{\lambda v \eta (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \eta^2) + \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \eta^2)^2}_{\text{Wechselwirkungsterme}} - \underbrace{\frac{\lambda}{4} v^4}_{\text{Konstante}} \quad (2.18)$$

In dieser neuen Form lassen sich sehr leicht die Massen der beteiligten Felder ablesen.

$$m_{\Phi_1}^2 = m_{\Phi_2}^2 = 0, \quad m_{\eta}^2 = -2m^2 \quad (2.19)$$

Im Sigma-Modell wurden wieder die Eigenschaften des ersten Beispiels sichtbar. Weiterhin halten wir fest:

1. Für jeden der Generatoren T_1 und T_2 , die den Grundzustand nicht vernichten, erhält man ein masseloses Goldstoneboson.
2. Die Anzahl der Goldstonebosonen wird durch die Struktur der Symmetriegruppe festgelegt.
 - G ist die Symmetriegruppe der Lagrangedichte. Sie besitzt n_g Generatoren.
 - H ist die Untergruppe mit n_H Generatoren, die den Grundzustand nach dem spontanen Symmetriebruch invariant läßt.
 - Die Anzahl der Goldstonebosonen ist $n_G - n_H$
3. Das Kriterium für die spontane Symmetriebrechung ist das Nichtverschwinden eines Vakuumerwartungswertes eines hermiteschen Operators. In diesem Beispiel hier:

$$\langle 0 | \Phi_3(0) | 0 \rangle = v$$

2.3.3 Higgs und elektroschwache Wechselwirkung

Das Standardmodell basiert auf der Eichgruppe

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1),$$

wo die $SU(3)$ die Eichgruppe der starken Wechselwirkung, die $SU(2)$ die Eichgruppe des schwachen Isospins und die $U(1)$ die Eichgruppe der Hyperladung ist. Diese stimmt nicht mit der Eichgruppe der QED überein. Um Verwechslungen zu vermeiden, schreibt man $U(1)_Y$ für die auf die Hyperladung bezogene Gruppe und $U(1)_{EM}$ für die Eichgruppe der QED. Im Standardmodell ist die Eichgruppe $SU(2) \times U(1)_Y$ des elektroschwachen Sektors gebrochen [12]. Als "Restsymmetrie" bleibt die $U(1)_{EM}$. Sie entspricht der Gruppe H im vorigen Beispiel. Im Unterschied zum vorigen Beispiel hat man es hier mit einer lokalen Symmetrie zu tun. Was geschieht in diesem Fall?

Im Standardmodell nimmt man die Existenz eines zusätzlichen komplexen Skalarfeldes an, das unter der fundamentalen Darstellung der $SU(2)$ transformiert und Hyperladung $Y = 1$ besitzt. Im Raum des schwachen Isospins läßt es sich als zweikomponentiger Vektor mit komplexen Einträgen schreiben.

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x) + i\chi(x)) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$\phi^+(x)$ ist ein komplexes Feld, d.h. es setzt sich aus zwei reellen Komponenten zusammen. Die drei Komponenten von $\phi^+(x)$ und $\chi(x)$ werden in die longitudinalen Moden von W_μ^\pm und Z_μ absorbiert. $H(x)$ ist das eigentliche (physikalische) Higgsfeld. Die Lagrangedichte des Higgssektors lautet

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \underbrace{m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2}_{V(\phi)} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \quad (2.21)$$

Wie vorher wird $\lambda > 0$ gefordert, damit das System einen Grundzustand besitzt. Außerdem $m^2 > 0$, damit auch tatsächlich spontane Symmetriebrechung vorliegt (Nambu-Goldstone-Modus). Die kovariante Ableitung ist gegeben durch

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{2} W_\mu^a \sigma^a - \frac{ig'}{2} B_\mu Y \quad (2.22)$$

Das Higgs-Dublett hat Hyperladung $Y = 1$; aus der Minimierung des Potentials $V(\phi)$ ergibt sich

$$|\phi_{\min}|^2 = \frac{2m^2}{\lambda} = \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = 2\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (2.23)$$

Im nächsten Schritt berechnen wir den $(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)$ -Anteil der Lagrangedichte. Dabei betrachten wir nur Beiträge von den Feldern H, W, B . Dies deuten wir durch den Index “phys” an.

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)\Big|_{\text{phys}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{1}{8}g^2v^2(W_\mu^1W^{1\mu} + W_\mu^2W^{2\mu}) + \\ &+ \frac{1}{8}v^2(B_\mu, W_\mu^3) \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

H ist bereits ein physikalisches Feld, B und W aber nicht. Sie werden erst mithilfe der Transformationen

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp W_\mu^2) \quad (2.25)$$

und

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

in physikalische Felder überführt. Dabei sind $\sin\theta_W$ und $\cos\theta_W$ gegeben durch:

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{und} \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.27)$$

Damit wird dieser Anteil der Lagrangedichte zu

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)\Big|_{\text{phys}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{1}{2}\left(\frac{gv}{2}\right)^2(W_\mu^{+*}W^{+\mu} + W_\mu^{-*}W^{-\mu}) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\right)^2(A_\mu, Z_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Hier lassen sich die Massen der W - und Z -Bosonen leicht ablesen. Sie betragen

$$m_W = \frac{v}{2}g \quad \text{und} \quad m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} \quad (2.29)$$

Was haben wir hier gewonnen? Ein Problem der schwachen Wechselwirkung ist, daß Eichbosonen wegen der $SU(2)$ -Symmetrie masselos sein müssen. Experimentell werden aber von

Null verschiedene Massen für die W - und Z -Bosonen beobachtet. Mithilfe der spontanen Symmetriebrechung über das zusätzliche Higgsfeld wird die lokale Symmetrie gebrochen und die vorher masselosen Eichbosonen massiv. Ursache der spontanen Symmetriebrechung ist hier das Higgsfeld, das einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert $\frac{v}{\sqrt{2}}$ annimmt.

Die Kopplungskonstanten g und g' stehen mit der Elementarladung e über die Gleichung

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{bzw.} \quad g = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad \text{und} \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad (2.30)$$

in Beziehung.

2.4 Spinor-Helizitäts-Formalismus

Der in dieser Arbeit verwendete Formalismus zur Beschreibung von Spinoren folgt im wesentlichen dem bekannten Spinor-Helizitäts-Formalismus. Ich möchte hier die wichtigsten Eigenschaften zusammenstellen.

2.4.1 Masselose Spinoren

Ausgangspunkt ist die masselose Diracgleichung $\not{p}u(x) = 0$, deren Lösungen die bekannten Spinoren sind. In der Weyldarstellung zerfällt die Diracgleichung in zwei voneinander unabhängige Gleichungen, jeweils eine für den oberen und den unteren Zweierspinor. Jedem dieser beiden Spinoren ordnen wir eine Helizität zu. Dem oberen "+", dem unteren "-".

$$\not{p}u(p) = \begin{pmatrix} 0 & p_\mu \cdot \sigma^\mu \\ p_\mu \cdot \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+(p) \\ u_-(p) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Wobei

$$\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.32)$$

Weiterhin erinnert man sich der Tatsache, daß die Lorentzgruppe lokal isomorph zur $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ ist. Daher kann man ihre Darstellungen als (m, n) -Tupel klassifizieren, mit $m, n = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$. Die Zahlen m und n geben den Spin der Darstellung an.

So gehören $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$ zu den links- bzw rechtshändigen Weylspinoren; ihre direkte Summe, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entspricht dem Viererspinor $u(p)$.

Die Paulimatrizen zusammen mit der Einheit vermitteln zwischen beiden Gruppen.

$$p_\mu \leftrightarrow p_{\alpha\dot{\alpha}} = p_\mu \cdot \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \quad \text{mit} \quad \alpha, \dot{\alpha} = 1, 2 \quad (2.33)$$

Klarerweise ist der entstandene Bispinor $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ als Matrix darstellbar. Ist p zusätzlich noch ein Nullvektor, d.h. $p^2 = 0$, dann läßt sich der Bispinor faktorisieren als

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \quad \text{mit} \quad (2.34)$$

$$\lambda_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\sqrt{p^-}} \\ \sqrt{p^-} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{p}}{\sqrt{p^-}} \\ \sqrt{p^-} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Die Bedeutung der Koordinaten p_-, p, \bar{p} ist in Kapitel (3.1) erläutert. Man nennt λ_α den holomorphen Spinor, er transformiert unter der $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung, und $\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ den antiholomorphen Spinor, er transformiert unter der $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung. Auf dem Raum der Spinoren existiert die Metrik:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Sie wird zum ‘‘Rauf- und Runterziehen’’ der Indices benutzt.

$$\lambda^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \lambda_\beta \quad \text{und} \quad \lambda_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \lambda^\beta \quad (2.37)$$

Die Metrik mit Indices ‘‘unten’’ ist das Inverse der Metrik mit Indices ‘‘oben’’, d.h. $\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$. Damit ergibt sich für das Produkt zweier lichtartiger Bispinoren $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ und $q^{\alpha\dot{\alpha}}$.

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} q^{\alpha\dot{\alpha}} = 2p \cdot q \quad (2.38)$$

Nichts anderes hätte man von einer Rechnung auf dem Minkowskiraum erwartet. Die Benutzung der Bispinoren ist also eine äquivalente Methode. Dennoch unterscheidet sich die Metrik auf dem Raum der Bispinoren in ihren übrigen Eigenschaften stark von der bekannten Minkowskimetrik.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha} \quad \text{und} \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (2.39)$$

Aus zwei Spinoren λ_1 und λ_2 kann man in folgender Weise eine Lorentzinvariante konstruieren.

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 \rangle := \epsilon_{\alpha\beta} \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \quad (2.40)$$

Aus dem Konstruktionsprinzip folgt direkt $\langle \lambda_1 \lambda_2 \rangle = -\langle \lambda_2 \lambda_1 \rangle$. Analoges funktioniert für Spinoren der entgegengesetzten Händigkeit. Für sie verwendet man statt der spitzen Klammern eckige: $[\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2] := \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \lambda_1^{\dot{\alpha}} \lambda_2^{\dot{\beta}}$. Eine alternative Schreibweise, die Vorteile besitzt, wenn es darum geht, konkrete physikalische Größen auszurechnen ist $\langle pq \rangle \equiv \langle p - | q + \rangle$ bzw. $[qp] \equiv \langle q + | p - \rangle$. Dabei entspricht $\langle p - | = \lambda^\alpha$, $|p - \rangle = \lambda^{\dot{\alpha}}$, $\langle p + | = \lambda_{\dot{\alpha}}$ und $|p + \rangle = \lambda_\alpha$. Vereinfachend schreibt man statt $\langle \lambda_i \lambda_j \rangle$ auch oft $\langle ij \rangle$. Damit ist es möglich, bekannte Relationen zu reformulieren, z.B. $\langle pq \rangle [pq] = 2p \cdot q$. Zusätzlich kann man weitere Beziehungen elegant angeben.

$$\langle AB \rangle \langle CD \rangle = \langle AD \rangle \langle CB \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle \quad (2.41)$$

$$[AB][CD] = [AD][CB] + [AC][BD] \quad (2.42)$$

Ein weiteres Beispiel ist die Fierz-Identität:

$$\langle A + |\gamma_\mu | B + \rangle \langle C - | \gamma^\mu | D - \rangle = 2[AD] \langle CB \rangle \quad (2.43)$$

Allgemeine Eigenschaft:

$$\langle p \pm | \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_{2n+1}} | q \pm \rangle = \langle \mp q | \gamma_{\mu_{2n+1}} \dots \gamma_{\mu_1} | p \mp \rangle \quad (2.44)$$

$$\langle p \pm | \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_{2n}} | q \mp \rangle = - \langle \pm q | \gamma_{\mu_{2n}} \dots \gamma_{\mu_1} | p \mp \rangle \quad (2.45)$$

2.4.2 Polarisationsvektoren

Der Formalismus für masselose Spin- $\frac{1}{2}$ -Spinoren läßt sich auch auf Teilchen mit Spin 1 ausdehnen. Diese werden üblicherweise durch Polarisationsvektoren beschrieben, die im Fall $m=0$ zwei Einstellmöglichkeiten besitzen.

$$\varepsilon_\mu^+(p, q) = \frac{\langle q - | \gamma_\mu | p - \rangle}{\sqrt{2} \langle qp \rangle} \quad \varepsilon_\mu^-(p, q) = \frac{\langle q + | \gamma_\mu | p + \rangle}{\sqrt{2} [qp]} \quad (2.46)$$

bzw. in Bispinorschreibweise

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^+(p, q) = \frac{|q + \rangle \langle p + |}{\sqrt{2} \langle qp \rangle} \quad \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}^-(p, q) = \frac{|p + \rangle \langle q + |}{\sqrt{2} [qp]} \quad (2.47)$$

Der Spinor $\langle q \pm |$ ist hier ein frei wählbarer Referenzspinor (er darf jedoch nicht parallel zu $|p \pm \rangle$ liegen). Er kann einmal willkürlich ausgesucht werden und liegt dann für alle nicht

eichinvarianten Größen fest. Hat man zwei physikalische Größen, die unabhängig voneinander eichinvariant sind, so können dort auch zwei verschiedene Wahlen von $\langle q \pm |$ getroffen werden. Indem man den Referenzspinor geschickt wählt, kann man manche Rechnungen stark vereinfachen. Die so beschaffenen Polarisationsvektoren erfüllen die Relationen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\mu^\pm(p, q)p^\mu &= \varepsilon_\mu^\pm(p, q)q^\mu = 0 \\ \varepsilon^+ \cdot (\varepsilon^+)^* &= \varepsilon^- \cdot (\varepsilon^-)^* = -1 \\ \varepsilon^+ \cdot (\varepsilon^-)^* &= 0 \\ (\varepsilon_\mu^+)^* &= \varepsilon_\mu^-\end{aligned}$$

2.4.3 Massive Spinoren

Arbeitet man mit massiven Spinoren, wird man feststellen, daß obige Formeln nicht mehr benutzt werden können, da sie nur für masselose Spinoren gelten. Um ihre Anwendung dennoch zu ermöglichen, behilft man sich durch folgende Definition

$$p^b = p - \frac{p^2}{2p \cdot q} q \quad (2.48)$$

Dieser Vektor ist nun wieder lichtartig. Der Vektor q ist hier, ähnlich dem Fall der Polarisationsvektoren, ein frei wählbarer, lichtartiger Referenzvektor. Die entsprechenden Spinoren lauten:

$$u(p, \pm) = \frac{(\not{p} + m)|q\mp\rangle}{\langle p^b \pm | q\mp\rangle} \quad v(p, \pm) = \frac{(\not{p} - m)|q\mp\rangle}{\langle p^b \pm | q\mp\rangle} \quad (2.49)$$

Sie genügen der Orthogonalitätsbeziehungen

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{\lambda})u(\lambda) &= 2m\delta_{\bar{\lambda}\lambda} \\ \bar{v}(\bar{\lambda})v(\lambda) &= -2m\delta_{\bar{\lambda}\lambda} \\ \bar{u}(\bar{\lambda})v(\lambda) &= \bar{v}(\bar{\lambda})u(\lambda) = 0\end{aligned}$$

und den Vollständigkeitsrelationen

$$\begin{aligned}\sum_\lambda u(\lambda)\bar{u}(\lambda) &= \not{p} + m \\ \sum_\lambda v(\lambda)\bar{v}(\lambda) &= \not{p} - m\end{aligned}$$

2.5 Reduktionstechniken

Heutzutage erlauben Computer die schnelle Berechnung von Feynmandiagrammen. Doch mit den Möglichkeiten sind auch die Ansprüche gestiegen. So wächst die Anzahl der zu berechnenden Feynmandiagramme überproportional schnell mit der Anzahl der äußeren Beine [13].

n	2	3	4	5	6	7	8
Anz. Diagramme	4	25	220	2485	34300	559405	10525900

Tabelle 2.3: Anzahl der Diagramme, die zum Prozess $gg \rightarrow ng$ beitragen.

Also wird es erforderlich, Techniken zu finden, die in der Lage sind, die Rechenlast zu reduzieren. In der jüngeren Vergangenheit hat es auf diesem Gebiet große Fortschritte gegeben, und ich möchte hier einen groben Überblick über eine Auswahl an Methoden und ihre Wirksamkeit geben. Einige werden in weiteren Unterkapiteln detaillierter besprochen.

- *Ladungsinversion und Parität*

Die Ladungsinversion ersetzt alle Teilchen durch ihre Antiteilchen und umgekehrt. Die Parität dreht alle Helizitäten um. Beide Techniken setzen Helizitätsamplituden untereinander in Beziehung. Jede einzelne von ihnen reduziert die Anzahl der zu berechnenden Helizitätsamplituden.

- *Farbgeordnete Amplituden*

Bei dieser Technik wird die Farbstruktur aus den Amplituden extrahiert und getrennt berechnet. Der verbleibende kinematische Anteil wird als partielle, farbgeordnete Amplitude bezeichnet. Der Vorteil ist, daß für verschiedene Farbstrukturen der kinematische Anteil gleich ist und bei der maschinellen Berechnung über partielle Amplituden nicht redundant berechnet wird.

- *MHV-Vertices*

Die Amplitude eines Graphs mit n Gluonen gleicher Helizität ist Null. Auch bei einem Gluon, das einen von den anderen verschiedene Helizität aufweist, bleibt die Amplitude gleich Null. Für zwei abweichende Gluonen ergibt sich, wider Erwarten, ein besonders einfacher Ausdruck. Er wird als Parke-Taylor-Amplitude oder kürzer

MHV-Amplitude bezeichnet. MHV steht dabei für **m**aximal **h**elicity **v**iolating. Diese Entdeckung läßt sich über die CSW-Regeln nutzbringend verwenden. Mit ihnen lassen sich die Amplituden beliebiger Helizitätskonfigurationen berechnen. Dabei werden MHV-Amplituden als Vertices benutzt und in besonderer Weise mit skalaren Propagatoren verknüpft. So lassen sich auch komplizierte Helizitätsamplituden schnell berechnen, indem man sie auf einfache Bausteine herunterbricht.

- *BCF-Rekursion*

Die BCF-Rekursion funktioniert ähnlich wie die CSW-Regeln. Auch hier geht es darum, komplizierte Amplituden in einfachere Bausteine zu zerlegen. Die BCF-Rekursion stellt im wesentlichen eine Vorschrift dar, wie dies zu geschehen hat. Sie ist aber nicht auf Helizitätsamplituden beschränkt, sondern gilt für allgemeine Baumgraphen.

Mit der Anwendung dieser Techniken läßt sich die Zahl der benötigten Rechnungen stark reduzieren. Dies soll am Beispiel der sechs-Gluonen-Amplitude illustriert werden.

Methode	Anzahl Diagramme
Klassische Feynmandiagramme	220
Farbgeordnete partielle Amplituden	36
MHV-Vertices	6
BCF-Rekursion	2

Tabelle 2.4: Aufgetragen sind die Anzahl der Diagramme der sechs-Gluonen-Amplitude $A_6(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$, die nach Anwendung der verschiedenen Reduktionstechniken noch berechnet werden müssen.

2.6 Farbgeordnete partielle Amplituden

Eine erste wesentliche Vereinfachung bei der Berechnung von Streuamplituden auf Baumgraphenniveau resultiert aus der Beobachtung, daß sich die Farbinformation vom kinematischen Anteil abseparieren läßt. Dies liefert die sogenannten farbgeordneten partiellen Amplituden.

Feynmangraphen in der Yang-Mills-Theorie enthalten die Strukturkonstanten der zugrundeliegenden Symmetriegruppe. Sie treten linear oder quadratisch auf. Über die Beziehung

$i\sqrt{2}T^c f^{abc} = [T^a, T^b]$ lassen sie sich auf Spuren von Produkten der Generatoren umschreiben:

$$f^{abc} = \frac{i}{\sqrt{2}} \text{tr} (T^a T^b T^c - T^c T^b T^a) \quad (2.50)$$

Mit dieser Technik kann man aus rein gluonischen Amplituden alle Farbmatriizen herausziehen und dann gesondert berechnen. Konkret lassen sich die Amplituden gemäß

$$\mathcal{A}(1, \dots, n) = \sum_{\sigma \in S_n / \mathbb{Z}_n} \text{tr} (T^{a_{\sigma(1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}) A(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \quad (2.51)$$

zerlegen. Dabei zählt der Index i Gluonen, p_i sind die zugehörigen Impulse und a_i die Farbindices; S_n / \mathbb{Z}_n ist die Permutationsgruppe modulo Vertauschungen. Das nun farblose Objekt $A(1, \dots, n)$ nennt man partielle Amplitude.

Sind weiterhin Quarks beteiligt, so trägt jede Quarklinie einen zusätzlichen Faktor T^a bei. In diesem Fall benutzt man zur weiteren Vereinfachung die $SU(N)$ -Fierzidentität

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.52)$$

Bei nur einem Quark darf man den $\frac{1}{N}$ -Term vernachlässigen. Um dies einzusehen, vergegenwärtigt man sich, daß die Farbmatriizen spurfrei sind. Für die $U(N)$ existiert kein solcher $\frac{1}{N}$ -Term. Eine Theorie mit der $U(N)$ als Symmetriegruppe hat wegen $U(N) = SU(N) \times U(1)$ ein zusätzliches farbloses Eichboson, da der zugehörige Generator, die Einheit, mit allen anderen Generatoren vertauscht und das entsprechende Eichboson damit von den anderen entkoppelt. Folglich unterscheiden sich die $U(N)$ - und die $SU(N)$ -Amplituden auf Baumgraphenniveau nicht und es ist erlaubt, den $\frac{1}{N}$ -Term zu vernachlässigen.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1_q, \dots, n-1, n_{\bar{q}}) &= \sum_{\sigma \in S_{n-2} / \mathbb{Z}_n} \text{tr} (T^{a_{\sigma(2)}} \dots T^{a_{\sigma(n-1)}}) \\ &\cdot A(1_q, \sigma(2), \dots, \sigma(n-1), n_{\bar{q}}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.7 Die Parke-Taylor-Amplitude

Eine der bedeutsamsten Amplituden ist die sogenannte MHV-Amplitude. MHV steht für **m**aximal **h**elicity **v**iolating, also maximale Helizitätsverletzung. Sie wurde zuerst von Parke und Taylor vermutet. Erst später konnte ihre Richtigkeit rigoros bewiesen werden. Die

folgenden Ausdrücke sind für eine beliebige Zahl von Gluonen positiver Helizität und bis zu zwei Gluonen negativer Helizität gültig.

$$A(1^+, \dots, n^+) = 0 \quad (2.54)$$

$$A(1^-, 2^+, \dots, n^+) = 0 \quad (2.55)$$

$$A(1^-, 2^+, \dots, j^-, \dots, n^+) = ig^{n-2} \frac{\langle 1j \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n-1, n \rangle \langle n1 \rangle} \quad (2.56)$$

Die Formeln für die entgegengesetzten Helizitäten erhält man, indem man alle $\langle \rangle$ durch $[\]$ ersetzt. Das folgt aus der Symmetrie unter Parität. Die letzte der oben angegebenen Amplituden ist die erste, welche nicht verschwindet und die in der Literatur üblicherweise als “die” MHV-Amplitude bekannt ist. Bei umgekehrten Helizitäten spricht man von der $\overline{\text{MHV}}$ -Amplitude.

In Anbetracht des überproportional starken Komplexitätswachstums von Baumgraphen sind die Formeln (2.54-2.56) geradezu verblüffend einfach. Damit stellt sich automatisch die Frage nach dem Warum. Die Formeln suggerieren, daß Eichtheorien eine einfachere Struktur besitzen, als man aufgrund der gewöhnlichen Feynmandiagramme anzunehmen geneigt ist. Daher fragt man sich, wie diese Einfachheit in höheren Ordnungen zum Tragen kommt und worin ihr Ursprung liegt.

2.8 Die CSW-Regeln

2.8.1 Allgemeine Regeln

Die Erkenntnis, daß MHV-Amplituden komplexe Geraden im Twistorraum, und Geraden im Twistorraum Punkte im Ortsraum entsprechen, gestattete Cachazo, Svrček und Witten ein Regelwerk zur Berechnung farbgeordneter Amplituden zu formulieren [4]. Dabei setzt man MHV-Amplituden in folgender Art und Weise zusammen:

1. Verwende die MHV-Amplituden als Vertices.
2. Verbinde die Vertices von $+$ nach $-$ mit Propagatoren $\frac{i}{p^2}$, wobei p der Impuls ist, der zwischen den Vertices läuft.

- Benutze $(\lambda_P)_\alpha = P_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\eta}^{\dot{\alpha}}$ als Spinor für die äußeren Beinen derjenigen Vertices, die mit dem Propagator verbundenen sind. Dabei ist $\tilde{\eta}$ ein willkürlich gewählter Referenzspinor.

Aus einem vorhergehenden Abschnitt ist bekannt, daß man jeden beliebigen Vierervektor mithilfe der Projektion

$$p^b = p - \frac{p^2}{2p \cdot q} q \tag{2.57}$$

auf einen lichtartigen Vierervektor abbilden kann. In diesem Fall hat der zugehörige Bispinor die Darstellung

$$(p^b)_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha^p \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^p \quad \text{mit} \quad \lambda_\alpha^p = \frac{p_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\eta}^{\dot{\alpha}}}{[\lambda\eta]} \tag{2.58}$$

Dies entspricht gerade der obigen Regel Nummer 3, da der Nenner vernachlässigbar ist. Streuamplituden sind invariant unter Reskalierung der Spinoren innerer Linien, die nicht auf der Massenschale liegen.

Aufsummieren aller auf diese Art entstandenen CSW-Diagramme liefert die gesuchte Streuamplitude. An den Diagrammen läßt sich Folgendes feststellen:

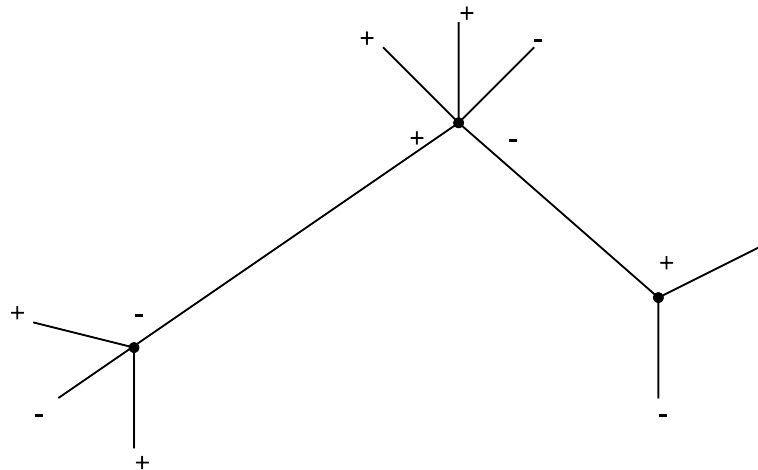


Abbildung 2.3: Einfaches Beispiel für einen CSW-Graph mit drei Vertices

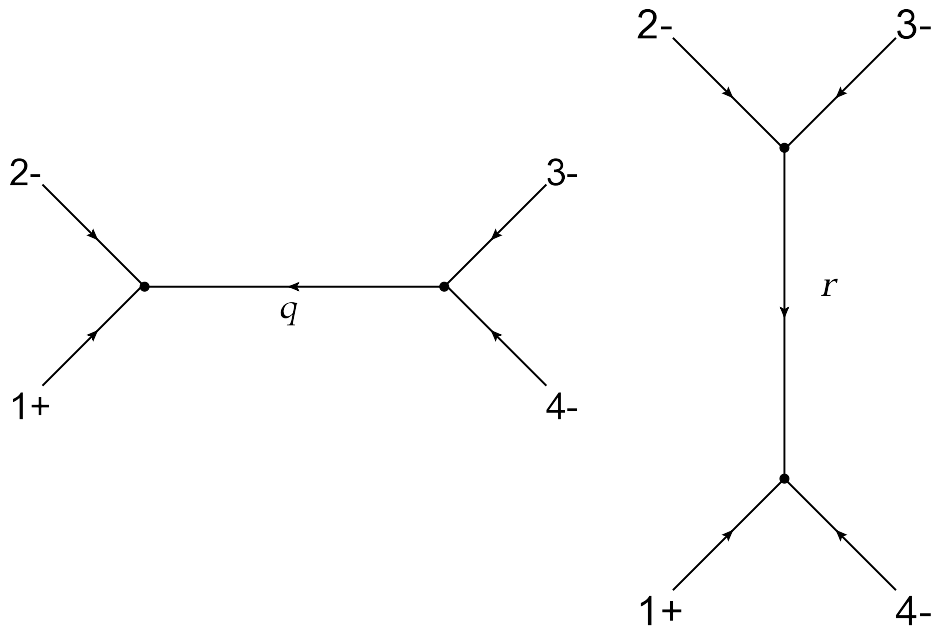
Ein Baumgraph mit n_V Vertices enthält $n_V - 1$ Propagatoren, siehe zur Illustration obige Abbildung. Von jedem Vertex gehen $2n_V$ Gluonlinien negativer Helizität aus. An diese $2n_V$ Gluonlinien negativer Helizität docken $n_V - 1$ Propagatoren an. Übrig bleiben

$2n_V - (n_V - 1) = n_V + 1 =: n_-$ Linien negativer Helizität. Sie sind notwendigerweise äußere Beinchen. Eine Amplitude mit n_- Gluonen mit negativer Helizität hat $n_- - 1$ Vertices. Da MHV-Baumgraphen mit $n_- < 2$ äußeren Beinchen keinen Vertex enthalten, verschwinden sie also, in Übereinstimmung mit der Yang-Mills-Theorie.

Für insgesamt n Gluonen wächst die Anzahl der Diagramme nicht schneller als n^2 , folglich bietet diese Methode bei der maschinellen Berechnung von Amplituden auf Baumgraphen-niveau Vorteile gegenüber gewöhnlichen Feynmandiagrammen.

2.8.2 Illustration am Beispiel der Amplitude $A(1^+2^-3^-4^-)$

Hier sollen die oben beschriebenen Regeln zu Demonstrationsszwecken am Beispiel der Amplitude $A(1^+2^-3^-4^-)$ angewandt werden. Die Anzahl der Gluonen negativer Helizität beträgt 3. Daraus folgt, daß die beitragenden Diagramme 2 Vertices besitzen. Im Rahmen der bekannten Yang-Mills-Theorie verschwindet diese Amplitude. Zu zeigen ist, daß die Berechnung mit MHV-Diagrammen ebenfalls Null liefert.



Im linken Diagramm trägt der Propagator den Impuls $q = -p_1 - p_2 = p_3 + p_4$. Die zugehörigen Spinoren sind λ_α^q und $\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^q$ mit $\lambda_\alpha^q = q_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\eta}^{\dot{\alpha}}$ gemäß Regel 3 oben. Damit findet

man für λ_α^q :

$$\begin{aligned}
 \lambda_\alpha^q &= q_{\alpha\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} \\
 &= (-p_1 - p_2)_{\alpha\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} = (p_3 + p_4)_{\alpha\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} \\
 &= -\lambda_\alpha^1 \tilde{\lambda}_\alpha^1 \eta^{\dot{\alpha}} - \lambda_\alpha^2 \tilde{\lambda}_\alpha^2 \eta^{\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha^3 \tilde{\lambda}_\alpha^3 \eta^{\dot{\alpha}} + \lambda_\alpha^4 \tilde{\lambda}_\alpha^4 \eta^{\dot{\alpha}} \\
 &= -\lambda_\alpha^1 \Theta_1 - \lambda_\alpha^2 \Theta_2 = \lambda_\alpha^3 \Theta_3 + \lambda_\alpha^4 \Theta_4
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Im letzten Schritt wurde die Schreibweise $\Theta_i := \tilde{\lambda}_\alpha^i \eta^{\dot{\alpha}}$ eingeführt. Die Amplitude, die zum linken Diagramm gehört, heißt

$$\frac{\langle 2q \rangle^3}{\langle q1 \rangle \langle 12 \rangle} \frac{1}{q^2} \frac{\langle 34 \rangle^3}{\langle 4q \rangle \langle q3 \rangle} \tag{2.60}$$

Man erhält sie, indem man $\frac{1}{q^2}$ als Propagator nimmt und als Vertices die MHV-Amplitude für drei äußere Beinen einsetzt. Mittels Gleichung (2.59) lassen sich die Spinorprodukte mit λ^q berechnen.

$$\langle 2q \rangle = -\langle 21 \rangle \Theta_1, \quad \langle q1 \rangle = -\langle 21 \rangle \Theta_2, \quad \langle 4q \rangle = \langle 43 \rangle \Theta_3 \quad \text{und} \quad \langle q3 \rangle = \langle 43 \rangle \Theta_4 \tag{2.61}$$

Damit wird Gleichung (2.60) zu

$$\frac{\Theta_1^3}{\Theta_2 \Theta_3 \Theta_4} \frac{\langle 21 \rangle}{\langle 21 \rangle \langle 12 \rangle} \frac{1}{q^2} \frac{\langle 34 \rangle^3}{\langle 43 \rangle \langle 43 \rangle} \tag{2.62}$$

Diese Gleichung kann mithilfe der Relation $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = \langle 12 \rangle [12]$ weiter vereinfacht werden.

$$-\frac{\Theta_1^3}{\Theta_2 \Theta_3 \Theta_4} \frac{\langle 34 \rangle}{[21]} \tag{2.63}$$

Analoge Berechnung des rechten Diagramms liefert

$$-\frac{\Theta_1^3}{\Theta_2 \Theta_3 \Theta_4} \frac{\langle 32 \rangle}{[41]} \tag{2.64}$$

Andererseits ist eine explizite Rechnung nicht wirklich nötig, da das rechte Diagramm aus dem linken durch Vertauschung der Rollen von p_2 und p_4 hervorgeht. Aus der Impulserhaltung folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_i p_i = \sum_i |i+\rangle \langle i+| \\
 &= \sum_i \langle 3- | i+\rangle \langle i+ | 1-\rangle \\
 &= \sum_i \langle 3i \rangle [i1] = \langle 32 \rangle [21] + \langle 34 \rangle [41]
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Aufgrund obiger Gleichung ist die Summe der Ausdrücke (2.63) und (2.64) tatsächlich Null. Sie stimmt, wie gewünscht, mit dem Ergebnis gewöhnlicher Feynmandiagramme überein.

2.8.3 Beweis

Die Gültigkeit der CSW-Regeln konnte mithilfe von Polstruktur und Lorentzinvarianz bewiesen werden. Ich möchte den Beweis hier kurz skizzieren.

Aufgrund der analytischen Fortsetzung komplexer Impulse sind Baumgraphen vollständig durch ihre physikalischen Singularitäten festgelegt - dies ist die Ursache für die "on-shell"-Rekursionsbeziehungen zwischen Amplituden. Eine beliebige (Baum-)Amplitude kann nun auf zwei Arten berechnet werden. Einerseits über gewöhnliche Feynmandiagramme, dies liefert A_{Feyn} , andererseits über die CSW-Regeln, die A_{CSW} liefern. Beides sind rationale Funktionen der Spinoren der äußeren Impulse. Es kann nun gezeigt werden, daß die physikalischen Singularitäten beider Amplituden gleich sind. Also muß die Differenz $A_{\text{Feyn}} - A_{\text{CSW}}$ ein Polynom sein. Für n Gluonen läßt sich bei $n = 3, 4$ durch direktes Nachprüfen zeigen, daß dieses Polynom verschwindet. Für höhere n kann dieses Polynom aus Dimensionsgründen nicht existieren. Folgerung: $A_{\text{Feyn}} = A_{\text{CSW}}$.

2.9 Die BCF-Rekursion

Britto, Cachazo und Feng entdeckten einen Weg, um Baumgraphen höherer Ordnung aus Baumgraphen niedrigerer Ordnung zu berechnen. Dabei müssen die Amplituden der niederen Baumgraphen auf der Massenschale liegen und über skalare Propagatoren miteinander verbunden werden. Hintergrund ist die Verschiebung der äußeren Impulse mittels eines komplexen Verschiebeparameters z . Die gesuchte Amplitude ist dann eine rationale Funktion von z und wird vollständig durch ihre Polstruktur festgelegt. Am Ende reduziert sich alles auf Summen von Produkten von MHV- und $\overline{\text{MHV}}$ -Amplituden.

Angenommen, man beabsichtigt, eine Amplitude $A(1, \dots, n)$ mit zufälliger, aber fester Helizitätskonfiguration zu berechnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit greift man nun willkürlich zwei externe Linien k und l mit Helizitätskonfiguration $-+$, $--$ oder $++$

heraus [5]. Man verschiebt die zugehörigen äußeren Impulse $p_k = \lambda_\alpha^k \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k \rightarrow \hat{p}_k(z)$ und $p_l = \lambda_\alpha^l \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^l \rightarrow \hat{p}_l(z)$, indem man die Spinoren gemäß

$$\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k \rightarrow \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k - z \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^l \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^l \rightarrow \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^l + z \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k \quad (2.66)$$

verschiebt. Dies definiert die Amplitude $A(z) \equiv A(1, \dots, \hat{k}(z), \dots, \hat{l}(z), \dots, n)$. Wir greifen nun einen bestimmten ‘‘Bereich’’ äußerer Linien heraus; hier zum Beispiel alle äußeren Beinchen i bis j , und zwar so, daß l irgendwo zwischen i und j liegt. Für allgemeine Impulse lautet der zugehörige Propagator auf Baumgraphenniveau $P_{ij} := \sum_{k=i}^j p_k$. Durch die Verschiebung wird er zu:

$$\hat{P}_{ij}(z) = P_{ij} + z \lambda^k \tilde{\lambda}^l \quad (2.67)$$

$A(z)$ hat dort Pole, wo $\hat{P}_{ij}(z)$ die Massenschalenbedingung erfüllt, d.h. $\hat{P}_{ij}^2(z) = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij}^2(z) &= \frac{1}{2} \hat{P}_{ij}(z)_{\alpha\dot{\alpha}} \hat{P}_{ij}(z)^{\alpha\dot{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2} \{ (P_{ij})_{\alpha\dot{\alpha}} (P_{ij})^{\alpha\dot{\alpha}} + 2z (P_{ij})_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda_k^\alpha \tilde{\lambda}_l^{\dot{\alpha}} \} \\ &= P_{ij}^2 - z \langle k | P_{ij} | l \rangle \end{aligned} \quad (2.68)$$

sind diese Pole bei

$$z = z_{ij} := \frac{P^2}{\langle k | P_{ij} | l \rangle} \quad (2.69)$$

An dieser Stelle wurde die neue Schreibweise

$$\langle k | P_{ij} | l \rangle \equiv -\lambda_k^\alpha P_{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_l^{\dot{\alpha}} \quad (2.70)$$

eingeführt. Da $A(z)$ eine rationale Funktion ist, sind dies die einzigen Pole. Angenommen $A(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, dann folgt mit dem Residuensatz

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{A(z)}{z} = A(0) + \sum_{z \in \{z_{ij}\}} \frac{1}{z_{ij}} \text{Res}_{z=z_{ij}} A(z), \quad (2.71)$$

wobei C eine Kontur im Unendlichen ist. Da an den Punkten, an denen die Residuen ausgewertet werden, die Propagatoren auf der Massenschale liegen, muß jeder Term der Summe ein Produkt aus den Amplituden zu beiden Seiten dieses Propagators, multipliziert mit dem Residuum des verschobenen Propagators, sein. Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{ij}} \text{Res}_{z=z_{ij}} A(z) &= \frac{\langle k | P_{ij} | n \rangle}{P_{ij}^2} \sum_{\pm} A_L^\pm(z_{ij}) \text{Res}_{z=z_{ij}} \frac{1}{P_{ij}^2 - z \langle k | P_{ij} | n \rangle} A_R^\mp(z_{ij}) \\ &= - \sum_{\pm} A_L^\pm(z_{ij}) \frac{1}{P_{ij}^2} A_R^\mp(z_{ij}) \end{aligned} \quad (2.72)$$

mit den Unteramplituden

$$A_L^\pm(z_{ij}) = A(\hat{P}_{ij}^\pm(z_{ij}), j+1, \dots, k(z_{ij}), \dots, i-1) \quad (2.73)$$

$$A_R^\mp(z_{ij}) = A(-\hat{P}_{ij}^\mp(z_{ij}), i, \dots, l(z_{ij}), \dots, j), \quad (2.74)$$

wobei die Indices zyklisch geordnet sind. Damit lautet die volle Rekursionsbeziehung

$$A(1, \dots, n) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} \sum_{\pm} A(\hat{P}_{ij}^\pm(z_{ij}), j+1, \dots, k(z_{ij}), \dots, i-1) \cdot \frac{1}{P_{ij}^2} A(-\hat{P}_{ij}^\mp(z_{ij}), i, \dots, l(z_{ij}), \dots, j), \quad (2.75)$$

wo \mathcal{P} die Menge aller möglichen Bereiche äußerer Beinchen, die l enthalten, ist. Als Gedankenstütze läßt sich das folgende Diagramm verwenden.

$$A(1 \cdots n) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} \sum_{\pm} \hat{k} \begin{array}{c} i-1 \\ \diagdown \\ \textcircled{A_L} \\ \diagup \\ j+1 \end{array} \xrightarrow[\hat{P}_{ij}(z_{ij})]{\pm} \begin{array}{c} i \\ \diagup \\ \textcircled{A_R} \\ \diagdown \\ j \end{array} \hat{l} \times \frac{1}{P_{ij}^2}$$

Es bleibt zu zeigen, daß $A(z)$ für $|z| \rightarrow \infty$ verschwindet. Dafür erinnert man sich zuerst an die Einschränkungen der Helizitäten von k und l , wie oben beschrieben. In der weiteren Argumentation beschränkt man sich nun darauf, daß l positive Helizität hat. Für die Fälle, in denen k negative Helizität hat, benutzt man die gleichen Argumente mit konjugierten CSW-Regeln und $\overline{\text{MHV}}$ -Vertices.

Ein allgemeiner CSW-Baumgraph besteht aus einer Anzahl von MHV-Vertices und deren “off-shell”-Fortsetzungen und einigen Propagatoren. “off-shell” bedeutet, daß sie nicht auf der Massenschale liegen. Bei der Impulsverschiebung werden einige der Propagatoren in solcher Weise mitverschoben, daß sie bei $|z| \rightarrow \infty$ verschwinden. Gemäß CSW-Vorschrift bildet man den holomorphen Spinor durch $\lambda_\alpha^P = (\hat{P}_{ij})_{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\eta}^{\dot{\alpha}}$, wobei $\tilde{\eta}$ ein willkürlich gewählter Spinor ist. Mit $\tilde{\eta} = \lambda^l$ wird λ^P wegen $\hat{P}_{ij} = P_{ij} + z\lambda_k \tilde{\lambda}_l$ unabhängig von z . Folglich werden alle MHV-Vertices, die mit diesem Propagator verbunden sind, unabhängig von z . Einzige Ausnahme ist der Vertex, der mit Gluon l verbunden ist. Wie eingangs angenommen, hat Gluon l positive Helizität; demzufolge taucht sein verschobener Spinor im Nenner des Vertex auf. Wenn $|z| \rightarrow \infty$ geht, dann verschwindet der Beitrag dieses Vertex und damit auch die ganze Amplitude.

3 Präsentation der Methode

3.1 Die Yang-Mills-Wirkung in Lichtkegelkoordinaten

Hier soll das Verfahren, mit dem man auf eine “MHV-Lagrangedichte” transformiert, am Beispiel des reinen Yang-Mills Sektors vorgestellt werden. Ich folge hier in weiten Teilen der Doktorarbeit von James Eittle [6]. Zuerst ist es nützlich, auf Lichtkegelkoordinaten zu transformieren. Das hat den Vorteil, daß dann die Koordinatenfunktionen der YM-Felder den vier möglichen Polarisationsrichtungen (logitudinal, zeitartig und zweimal transversal) entsprechen. Die zugehörigen Gleichungen lauten wie folgt:

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x^3), \quad x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x^3), \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2).$$

t und x^i sind hier die gewöhnlichen Minkowskikoordinaten. Durch die Wahl der Vorfaktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ treten bei der Transformation der Volumenform keine zusätzlichen Faktoren auf. Die Metrik besitzt in diesen Koordinaten mehrere nichtdiagonale Einträge:

$$A \cdot B = A_+ B_- + A_- B_+ - A \bar{B} - \bar{A} B \quad (3.1)$$

Für die Koordinaten des n -ten äußeren Impulses $(p_{n+}, p_{n-}, p_n, \bar{p}_n)$ wird es im folgenden üblich sein zu schreiben (n_+, n_-, n, \bar{n}) . Als nächstes wird die YM-Lagrangedichte auf Lichtkegelform gebracht. Die zugehörige Wirkung lautet:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Dabei ist d^4x das Volumenelement auf dem Minkowskiraum und \mathcal{F} der Feldstärketensor, definiert über kovariante Ableitung und Eichpotential gemäß

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad \mathcal{A}_\mu = \frac{i}{2} A_\mu^a T^a \quad (3.3)$$

3 Präsentation der Methode

Dabei sind die T^a die Generatoren der Symmetriegruppe $SU(N)$. Für sie gelten die Normalisierungen:

$$[T^a, T^b] = 2if^{abc}T^c \quad \text{und} \quad \text{tr}(T^a T^b) = 2\delta^{ab} \quad (3.4)$$

Die obige Wirkung ist noch rein klassisch. Indem man eine Eichfixierung vornimmt und dann die Faddeev-Popov-Methode benutzt, kann man sie quantisieren. Hier wird die Wirkung auf einer dreidimensionalen Fläche konstanter Lichtkegelzeit x_+ quantisiert. Die Fläche hat den Normalenvektor $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T$ in Minkowskikoordinaten. Als Eichfixierung wird hier die sogenannte Lichtkegeleichung gewählt. Die zugehörige Eichbedingung lautet:

$$\mu \cdot A = A_- = 0 \quad (3.5)$$

In diesem Fall entkoppeln die Faddeev-Popov-Geister von den Eichfeldern und tragen zum Pfadintegral nur eine unendliche Konstante als Vorfaktor bei. Diese ist aber für die Dynamik irrelevant. Nach Anwendung der Eichbedingung und partieller Integration hat die YM-Wirkung die folgende Gestalt:

$$S = \int d^4x \text{tr} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4) \quad (3.6)$$

mit

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{A}_+ \partial_-^2 \mathcal{A}_+ - 2\mathcal{A}_+ \partial \partial_- \bar{\mathcal{A}} - 2\mathcal{A}_+ \bar{\partial} \partial_- \mathcal{A} + \mathcal{A} \bar{\partial}^2 \mathcal{A} + 4\mathcal{A} \partial_+ \partial_- \bar{\mathcal{A}} - 2\mathcal{A} \bar{\partial} \partial \bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{A}} \partial^2 \bar{\mathcal{A}} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}_3 = 2(-\partial_- \mathcal{A}[\mathcal{A}_+, \bar{\mathcal{A}}] - \partial_- \bar{\mathcal{A}}[\mathcal{A}_+, \mathcal{A}] + \partial \bar{\mathcal{A}}[\bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}] + \bar{\partial} \mathcal{A}[\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}]) \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}_4 = [\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}][\bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}] \quad (3.9)$$

An der resultierenden Lagrangedichte Gl.(3.7-3.9) lassen sich einige Merkmale beobachten. Sie ist quadratisch in A_+ und es gibt keinerlei $\partial_- A_+$ -Terme. Daher kann man diesen Freiheitsgrad ausintegrieren. Die Motivation für diesen Schritt ist klar: Gluonen oder Photonen besitzen nur zwei Freiheitsgrade bzw. Polarisationsrichtungen. Also möchte man dies in der Lagrangedichte dadurch sichtbar machen, daß dort nur noch zwei voneinander unabhängige Felder auftreten.

Anhand eines einfachen Modells soll erläutert werden, wie das Ausintegrieren funktioniert. Angenommen man hat eine Theorie mit einem hermiteschen, algebrawertigen Feld ϕ , und

eine Menge unabhängiger Felder, die mit Ψ_i bezeichnet werden, weiterhin $K(\Psi)$, was ebenfalls hermitesch und algebrawertig ist. Das Pfadintegral dieser Theorie hat die Gestalt:

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \left\{ \text{tr} \left[\frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + K \phi \right] + L \right\} \quad (3.10)$$

Dabei ist k konstant, Δ^{-1} ein Differentialoperator gerader Ordnung und $L(\Psi)$ eine reellwertige Funktion der Ψ_i . Im ersten Schritt führt man eine Variablentransformation durch.

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \Delta K \quad (3.11)$$

Da diese Variablentransformation nur eine Verschiebung ist, ist die zugehörige Jacobimatrix die Einheit; das heißt es treten keine zusätzlichen Faktoren im Pfadintegral auf. Die Details dieser Rechnung sind im Appendix am Ende dieses Kapitels dargelegt. Das Ergebnis ist:

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \left\{ \text{tr} \left[\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' - \frac{1}{2} K \Delta K \right] + L \right\} \quad (3.12)$$

Der erste Summand ergibt $\det(-k\Delta^{-1})^{-\frac{1}{2}}$. Falls Δ keine Felder enthält, dann ist der erste Summand lediglich eine unendliche Konstante, die nicht zur Dynamik beiträgt. Deshalb kann sie für die weitere Betrachtung ignoriert werden.

Jetzt überträgt man das Modell auf den YM-Fall. Δ^{-1} ist der Differentialoperator des quadratischen Terms, der aus den Feldern, die man ausintegrieren will, hier \mathcal{A}_+ , besteht. Um K zu bilden, sucht man zuerst alle Terme, die *ein* auszuintegrierendes Feld enthalten, heraus. Dann teilt man aus jedem dieser Terme das auszuintegrierende Feld heraus. Anschließend summiert man alle so entstandenen Terme auf und erhält K . Die konkreten Entsprechungen sind hier:

$$\phi = \mathcal{A}_+ \quad \Delta = \frac{1}{2} \partial_-^{-2} \quad (3.13)$$

$$K = -2\partial\partial_- \bar{\mathcal{A}} - 2\bar{\partial}\partial_- \mathcal{A} + 2[\partial_- \mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] + 2[\partial_- \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}] \quad (3.14)$$

Obige Analoga setzt man nun in den Term

$$- \int d^4x \frac{1}{4} \text{tr}[K \partial_-^{-2} K] \quad (3.15)$$

ein. Bei der Berechnung dieses Ausdruckes wird explizit angenommen, daß Ableitungen und inverse Ableitungen vertauschen. Außerdem wird mehrfach von der partiellen Integration Gebrauch gemacht. Bemerkung: Inverse Differentialoperatoren verhalten sich zwar bei

partieller Integration genauso wie gewöhnliche Differentialoperatoren, jedoch gibt es für sie keine Produktregel! Siehe dazu den Appendix am Ende dieses Kapitels. Weiterhin ist der folgende Zusammenhang nützlich, der sich durch Rückwärtsanwendung der Produktregel ergibt:

$$[\partial_- \mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] = \partial_- [\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] + [\partial_- \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}] \quad (3.16)$$

Schließlich läßt man alle Terme mit \mathcal{A}_+ in Gl.(3.6) weg und ersetzt sie mit den neuen aus Gl.(3.15). Als Ergebnis erhält man eine Yang-Mills Wirkung in Lichtkegleichung, die nur noch zwei transversale Freiheitsgrade enthält. Sie lautet:

$$S = \frac{4}{g^2} \int dx_+ \text{tr}(\mathcal{L}^{+-} + \mathcal{L}^{++-} + \mathcal{L}^{+--} + \mathcal{L}^{+++}) \quad (3.17)$$

mit

$$\mathcal{L}^{-+} = \int d^3x \bar{\mathcal{A}}(\partial_+ \partial_- - \partial \bar{\partial}) \mathcal{A} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{L}^{-++} = - \int d^3x \bar{\partial} \partial_-^{-1} \mathcal{A} [\mathcal{A}, \partial_- \bar{\mathcal{A}}] \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L}^{--+} = - \int d^3x [\bar{\mathcal{A}}, \partial_- \mathcal{A}] \partial \partial_-^{-1} \bar{\mathcal{A}} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{L}^{---+} = - \int d^3x [\partial_- \mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] \partial_-^{-2} [\partial_- \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}] \quad (3.21)$$

Das Ziel, die Lagrangedichte auf zwei Freiheitsgrade zu reduzieren, ist an dieser Stelle erreicht. Dies gestattet uns, \mathcal{A} und $\bar{\mathcal{A}}$ mit den Feldern positiver und negativer Helizität zu identifizieren. Demzufolge wurden die Lagrangedichten (3.18-3.21) gemäß ihrer Helizitätszusammensetzung indiziert. Weiterhin läßt sich beobachten, daß \mathcal{L}^{-+} in der Feynmandiagrammentwicklung einen masselosen Propagator liefert. Dies ist bereits ein Hinweis auf die Koinzidenz mit den CSW-Regeln.

3.2 Die Transformation

Die Anteile \mathcal{L}^{--+} und \mathcal{L}^{---+} sind bereits in MHV-Form. Das bedeutet, sie bestehen aus zwei Feldern negativer Helizität und einer beliebigen Anzahl, hier eins beziehungsweise zwei, an Feldern positiver Helizität. Der Term \mathcal{L}^{-++} hingegen ist nicht in MHV-Form, bedarf also gesonderter Behandlung [11]. Um auch diesen ‘‘Störterm’’ auf MHV-Form zu

bringen benutzt man eine Feldtransformation mithilfe derer man den Störterm in einen Term, der bereits MHV-Form besitzt, hineinabsorbiert. In Formeln bedeutet das:

$$\mathcal{L}^{-+}[\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] + \mathcal{L}^{-++}[\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] = \mathcal{L}^{-+}[\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}] \quad (3.22)$$

Dabei sind \mathcal{B} und $\bar{\mathcal{B}}$ die neuen Eichfelder, auf die transformiert wird. An dieser Stelle soll noch angemerkt werden, daß alle beteiligten Felder *dieselbe* Abhängigkeit von der Lichtkegelzeit x_+ haben. Zugunsten einer kompakteren Schreibweise wird sie aber in der Regel weggelassen.

Nun zu der kanonischen Transformation. Es ist wichtig hier eine kanonische Transformation zu benutzen, da die Eigenschaften einer solchen Transformation die weitere Rechnung an einigen Punkten wesentlich vereinfacht. Eine nützliche Eigenschaft kanonischer Transformationen ist die Erhaltung des Pfadintegralmaßes. Dadurch treten keine zusätzlichen Terme oder Faktoren auf, die die Rechnung komplizierter machen. Konkret sieht die Transformation so aus:

$$\partial_- \bar{\mathcal{B}}^a(\mathbf{y}) = \int d^3x \frac{\delta \mathcal{A}^b(\mathbf{x})}{\delta \mathcal{B}^a(\mathbf{y})} \partial_- \bar{\mathcal{A}}^b(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

Warum die Transformation genau diese Gestalt haben muß, läßt sich mithilfe des Appendix über kanonische Transformationen am Ende dieses Kapitels nachvollziehen. Gleichung (3.78) ist aus der Punktmechanik bekannt. In der Klassischen Mechanik sind die dynamischen Freiheitsgrade die Ortskoordinaten der Punktteilchen. In der Feldtheorie sind es die Felder. Um die Formel zu übertragen ersetzt man also die Ortskoordinaten durch Felder und die partiellen Ableitungen durch Funktionalableitungen. Dadurch ergibt sich automatisch Gleichung (3.23). Schreibe nun Gleichung (3.22) explizit aus.

$$\text{tr} \int d^3x \bar{\mathcal{A}}(\partial_+ \partial_- - \partial \bar{\partial}) \mathcal{A} - \text{tr} \int d^3x (\bar{\partial} \partial_-^{-1} \mathcal{A}) [\mathcal{A}, \partial_- \bar{\mathcal{A}}] = \text{tr} \int d^3x \bar{\mathcal{B}}(\partial_+ \partial_- - \partial \bar{\partial}) \mathcal{B} \quad (3.24)$$

Für die weiteren Betrachtungen lohnt es sich diese Gleichung in eine einfachere Gestalt zu bringen. Man nutzt im zweiten Term auf der linken Seite Zyklizität und Kommutativität der Spur.

$$\text{tr} \int d^3x \bar{\mathcal{A}}(\partial_+ \partial_- - \partial \bar{\partial}) \mathcal{A} - \text{tr} \int d^3x [\bar{\partial} \partial_-^{-1} \mathcal{A}, \mathcal{A}] \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \text{tr} \int d^3x \bar{\mathcal{B}}(\partial_+ \partial_- - \partial \bar{\partial}) \mathcal{B} \quad (3.25)$$

Danach integriert man partiell im ersten Term auf der linken Seite und auf der rechten Seite. Anschließend fügt man $1 = \partial_-^{-1} \partial_-$ im $\bar{\mathcal{A}} \partial \bar{\partial} \mathcal{A}$ -Term auf der linken Seite und im $\bar{\mathcal{B}} \partial \bar{\partial} \mathcal{B}$ -Term auf der rechten Seite ein. Zuletzt verwendet man nochmals die Kommutativität der

Spur und integriert den ∂_-^{-1} -Operators partiell. Ergebnis:

$$\begin{aligned} \text{tr} \int d^3x \{ \partial_+ \bar{\mathcal{A}} \partial_- \mathcal{A} - \partial_-^{-1} \partial \bar{\partial} \mathcal{A} \partial_- \bar{\mathcal{A}} \} + \text{tr} \int d^3x [\bar{\partial} \partial_-^{-1} \mathcal{A}, \mathcal{A}] \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \\ = \text{tr} \int d^3x \{ \partial_+ \bar{\mathcal{B}} \partial_- \mathcal{B} - \partial_-^{-1} \partial \bar{\partial} \mathcal{B} \partial_- \bar{\mathcal{B}} \} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Zur Vereinfachung werden die Operatoren $\omega := \partial_-^{-1} \partial \bar{\partial}$ und $\zeta := \partial_-^{-1} \bar{\partial}$ eingeführt.

$$\begin{aligned} \text{tr} \int d^3x \{ \partial_+ \bar{\mathcal{A}} \partial_- \mathcal{A} - \omega \mathcal{A} \partial_- \bar{\mathcal{A}} \} + \text{tr} \int d^3x [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}] \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \\ = \text{tr} \int d^3x \{ \partial_+ \bar{\mathcal{B}} \partial_- \mathcal{B} - \omega \mathcal{B} \partial_- \bar{\mathcal{B}} \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Jetzt benutzt man die Eigenschaft kanonischer Transformationen, nämlich daß $\dot{q}p = \dot{Q}P$ (siehe Appendix 3C Gleichung (3.80)), d.h. das Produkt aus Impuls und Geschwindigkeit ist in allen Koordinatensystemen, die durch kanonische Transformation auseinander hervorgehen, gleich. q entspricht \mathcal{A} , also folgt: \dot{q} entspricht $\partial_+ \mathcal{A}$. Der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls lautet:

$$\frac{\delta \mathcal{L}^{-+}}{\delta \partial_+ \mathcal{A}^a} = -\partial_- \bar{\mathcal{A}}^a \quad (3.28)$$

Das Produkt $\dot{q}p$ entspricht also genau dem ersten Term auf der linken Seite von Gleichung (3.27). Wegen der Kanonizität der Transformation stimmt es mit dem ersten Term auf der rechten Seite überein, und man kann die beiden Ausdrücke gegeneinander wegekürzen. Damit vereinfacht sich obige Gleichung zu:

$$\text{tr} \int d^3x \omega \mathcal{A} \partial_- \bar{\mathcal{A}} - \text{tr} \int d^3x [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}] \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \text{tr} \int d^3x \omega \mathcal{B} \partial_- \bar{\mathcal{B}} \quad (3.29)$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter zusammenfassen, indem man auf der linken Seite alles unter ein Integral schreibt und $\partial_- \mathcal{A}$ ausklammert.

$$\text{tr} \int d^3x \{ \omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}] \} \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \text{tr} \int d^3x \omega \mathcal{B} \partial_- \bar{\mathcal{B}} \quad (3.30)$$

Da die Transformation auf den Koeffizientenfunktionen der Felder gegeben ist, löst man die B-Felder in SU(3)-Basismatrizen und Koeffizientenfunktionen auf.

$$\text{tr} \int d^3x \{ \omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}] \} \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \text{tr} \int d^3x \omega \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}} B^a T^a \right) \left(-\frac{ig}{\sqrt{2}} \partial_- \bar{B}^b T^b \right) \quad (3.31)$$

$$\text{tr} \int d^3x \{ \omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}] \} \partial_- \bar{\mathcal{A}} = -\frac{g^2}{2} \int d^3x \omega B^b \partial_- \bar{B}^b \quad (3.32)$$

Jetzt hat man die Bestimmungsgleichung (3.22) in einer Form, in der man sehr leicht die Transformation (3.23) einsetzen kann.

$$\text{tr} \int d^3x \{\omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}]\} \partial_- \bar{\mathcal{A}} = -\frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \omega B^b(x) \frac{\delta \mathcal{A}^a(y)}{\delta B^b(x)} \partial_- \bar{\mathcal{A}}^c(y) \delta^{ac} \quad (3.33)$$

$$\text{tr} \int d^3x \{\omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}]\} \partial_- \bar{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \int d^3x d^3y \omega B^b(x) \frac{\delta \mathcal{A}(y)}{\delta B^b(x)} \partial_- \bar{\mathcal{A}}(y) \quad (3.34)$$

In der obigen Gleichung (3.34) erkennt man auf beiden Seiten der Gleichung eine ähnliche Struktur. Dabei stört die y-Abhängigkeit des $\partial_- \bar{\mathcal{A}}$ -Terms auf der rechten Seite. Da aber über x und y integriert wird, darf man sie einfach vertauschen.

$$\text{tr} \int d^3x \underbrace{\{\omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}]\}} \partial_- \bar{\mathcal{A}} = \text{tr} \int d^3x \underbrace{d^3y \omega B^b(y) \frac{\delta \mathcal{A}(x)}{\delta B^b(y)}} \partial_- \bar{\mathcal{A}}(x) \quad (3.35)$$

Sind die unterklammerten Ausdrücke gleich, so wird obige Gleichung auf jeden Fall erfüllt. An dieser Stelle ist anzumerken, daß diese Operation keine Äquivalenzumformung darstellt, da die Bedingung unten (3.36) eine stärkere Forderung als (3.34) darstellt. Dennoch ist der Schritt sinnvoll, da sich die resultierende Gleichung (3.36) wesentlich leichter bearbeiten läßt.

$$\omega \mathcal{A} - [\zeta \mathcal{A}, \mathcal{A}] = \int d^3y \omega B^b(y) \frac{\delta \mathcal{A}(x)}{\delta B^b(y)} \quad (3.36)$$

Im nächsten Schritt löst man die A-Felder in SU(3)-Basismatrizen und Koeffizientenfunktionen auf. Infolgedessen erhält man eine Gleichung, die nur noch aus kommutierenden Objekten besteht.

$$\omega A^a - g f^{abc} \zeta A^b A^c = \int d^3y \omega B^b(y) \frac{\delta A^a(x)}{\delta B^b(y)} \quad (3.37)$$

3.3 Impulsraum

Ziel ist es jetzt, diese Gleichung in den Impulsraum zu übertragen. Der Vorteil des Impulsraumes besteht darin, daß man eine Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung überführt. Algebraische Gleichungen sind im allgemeinen leichter zu lösen. Der übliche Weg der Transformation in den Impulsraum läuft über die Fouriertransformation $A(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A(k) e^{-ikx}$. Dabei behandle ich beide Seiten der Gleichung getrennt.

Zuerst die linke Seite.

$$\omega \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1 A^a(k_1) e^{-ik_1 x} - gf^{abc} \zeta \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_3 A^b(k_3) e^{-ik_3 x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 A^c(k_2) e^{-ik_2 x}$$

Jetzt lasse ich die Differentialoperatoren ω und ζ wirken. Zur Schreibweise: ω_1 bedeutet $\omega(k_1)$; d.h. es wird der entsprechende Impuls indiziert.

$$(-i\omega_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1 A^a(k_1) e^{-ik_1 x} - gf^{abc} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 k_2 d^3 k_3 \zeta_3 A^b(k_3) A^c(k_2) e^{-i(k_2+k_3)x}$$

Einschachteln einer $1 = \int d^3 k_1 \delta(k_1 - k_2 - k_3)$ in den zweiten Summanden. Durch die Deltadistribution wird für die Impulse die Relation $k_1 = k_2 + k_3$ vorgegeben. Diese wird zur Vereinfachung in die Exponentialfunktion eingesetzt.

$$\begin{aligned} (-i\omega_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1 A^a(k_1) e^{-ik_1 x} - \\ - gf^{abc} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \zeta_3 A^b(k_3) A^c(k_2) e^{-ik_1 x} \delta(k_1 - k_2 - k_3) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Es wird später nützlich sein, den ganzen Ausdruck als ein einziges Integral zu schreiben.

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1 \left[-i\omega_1 A^a(k_1) - gf^{abc} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 d^3 k_3 \zeta_3 A^b(k_3) A^c(k_2) \delta(k_1 - k_2 - k_3) \right] e^{-ik_1 x}$$

Jetzt wende ich mich der rechten Seite zu. Anhand von Gleichung (3.37) sieht man, daß sie nicht so einfach in den Impulsraum transformiert werden kann. Schwierigkeiten bereitet hier der Ausdruck $\frac{\delta A^a(x)}{\delta B^b(y)}$, da ein B-Feld im Nenner steht. Daher präsentiere ich zunächst eine Vorbetrachtung. Die Kettenregel der Funktionalableitung lautet:

$$\frac{\delta}{\delta B^b(x)} = \sum_a \int d^3 q \frac{\delta B^a(q)}{\delta B^b(x)} \frac{\delta}{\delta B^a(q)} \quad (3.39)$$

Der Ausdruck $\frac{\delta B^a(q)}{\delta B^b(x)}$ ist leicht zu berechnen, da sich $B^a(q)$ in gewohnter Weise fouriertransformieren läßt.

$$\begin{aligned} \frac{\delta B^a(q)}{\delta B^b(x)} &= \frac{\delta}{\delta B^b(x)} \int d^3 y e^{iqy} B^a(y) \\ &= \int d^3 y \delta^{ab} \delta(x - y) e^{iqy} \\ &= \delta^{ab} e^{iqx} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mit dieser Vereinfachung kann man nun wieder in die allgemeine Kettenregel (3.39) gehen und erhält:

$$\frac{\delta}{\delta B^b(y)} = \int d^3 q e^{iqy} \frac{\delta}{\delta B^b(q)} \quad (3.41)$$

Nachdem jetzt die Wirkung der Funktionalableitung bekannt ist, kann die Ableitung auf der rechten Seite fouriertransformiert werden.

$$\begin{aligned}\frac{\delta A^a(x)}{\delta B^b(y)} &= \int d^3 q e^{iqy} \frac{\delta}{\delta B^b(q)} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{-ik_1 x} A^a(k_1) \\ &= \int d^3 q \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{i(qy - k_1 x)} \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(q)}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Einsetzen in die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}&\int d^3 y \omega_y \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ipy} B^b(p) \int d^3 q \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{i(qy - k_1 x)} \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(q)} \\ &= \int d^3 y \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 q \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} (-i\omega_p) B^b(p) \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(q)} e^{iy(q-p)} e^{-ik_1 x}\end{aligned}\quad (3.43)$$

Jetzt bedient man sich der Fourierdarstellung der Deltadistribution $(2\pi)^3 \delta(q-p) = \int d^3 y \exp[iy(q-p)]$.

$$\begin{aligned}&\int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \left[\int d^3 p d^3 q (-i\omega_p) B^b(p) \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(q)} \delta(q-p) \right] e^{-ik_1 x} \\ &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \left[\int d^3 p (-i\omega_p) B^b(p) \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(p)} \right] e^{-ik_1 x}\end{aligned}\quad (3.44)$$

Damit lautet Gleichung (3.37):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1 \left[-i\omega_1 A^a(k_1) - g f^{abc} \zeta_3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 d^3 k_3 A^b(k_3) A^c(k_2) \delta(k_1 - k_2 - k_3) \right] e^{-ik_1 x} \\ &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \left[\int d^3 p (-i\omega_p) B^b(p) \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(p)} \right] e^{-ik_1 x}\end{aligned}\quad (3.45)$$

Als nächstes verfährt man genauso wie zuvor bei Gleichung (3.35). Man vergleicht nämlich die Integranden (große eckige Klammern) der linken und rechten Seite. Dies ist, wie oben, keine Äquivalenzumformung, stellt aber kein Problem dar, weil die resultierende Forderung stärker ist.

$$\begin{aligned}-i\omega_1 A^a(k_1) - g f^{abc} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 d^3 k_3 \zeta_3 A^b(k_3) A^c(k_2) \delta(k_1 - k_2 - k_3) &= \\ &= \int d^3 p (-i\omega_p) B^b(p) \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(p)}\end{aligned}$$

Aufmultiplizieren der Gleichung mit i ; Vertauschung $b \leftrightarrow c$ auf der linken Seite.

$$\omega_1 A^a(k_1) + i g f^{abc} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 d^3 k_3 \zeta_3 A^b(k_3) A^c(k_2) \delta(k_1 - k_2 - k_3) = \int d^3 p \omega_p B^b(p) \frac{\delta A^a(k_1)}{\delta B^b(p)}$$

3.4 Lösung

Diese Gleichung gilt es nun zu lösen. Dafür macht man einen Reihenansatz mit

$$A_1^a = \sum_{n=2}^{\infty} \int d^3 k_2 \dots d^3 k_n \Upsilon_{1\dots n}^{aa_1\dots a_{n-1}} B_2^{a_1} \dots B_n^{a_{n-1}} \delta(\sum_{i=1}^n k_i) \quad (3.46)$$

Hier wurde die vereinfachende Schreibweise

$$A^a(k_1) \equiv A_1^a \quad (3.47)$$

eingeführt. In dieser Schreibweise nimmt die Zielgleichung die folgende Gestalt an:

$$\omega_1 A_1^a + igf^{abc} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 d^3 k_3 \zeta_3 A_3^b A_2^c \delta(k_1 - k_2 - k_3) = \int d^3 p \omega_p B_p^b \frac{\delta A_1^a}{\delta B_p^b} \quad (3.48)$$

Zur Lösung setzt man die Reihe in die Bestimmungsgleichung ein und führt Ordnung für Ordnung einen Koeffizientenvergleich nach Feldern durch. Der Zusammenhang zwischen der Ordnung $\mathcal{O}(k)$ und dem Parameter n ist durch $k = n - 1$ gegeben.

3.4.1 Erste Ordnung

In erster Ordnung lautet die Entwicklung des A-Feldes:

$$A_1^a = \int d^3 k_2 \Upsilon_{12}^{aa_1} B_2^{a_1} \quad (3.49)$$

Der Übersichtlichkeit halber wurde die Deltafunktion nicht mit ausgeschrieben. Dennoch behalte man für die folgenden Kalkulationen im Hinterkopf, daß die beteiligten Impulse die Impulserhaltung erfüllen, auch wenn die korrespondierende Deltafunktion nicht explizit dabeisteht. Damit geht man nun in die Zielgleichung (3.48). In erster Ordnung braucht man den Term mit den zwei A-Feldern (im folgenden 2A-Term genannt) nicht zu betrachten, da dieser erst zur zweiten Ordnung beiträgt. Als erstes berechnet man die Funktionalableitung auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta B_p^b} \int d^3 k_2 \Upsilon_{12}^{aa_1} B_2^{a_1} &= \int d^3 k_2 \Upsilon_{12}^{aa_1} \frac{\delta B_2^{a_1}}{\delta B_p^b} \\ &= \int d^3 k_2 \Upsilon_{12}^{aa_1} \delta^{a_1 b} \delta(k_2 - p) \\ &= \Upsilon_{1p}^{ab} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Jetzt kann man sich daran machen, die eigentliche Gleichung zu lösen, also:

$$\omega_1 \int d^3 k_2 \Upsilon_{12}^{aa_1} B_2^{a_1} = \int d^3 p \omega_p B_p^b \Upsilon_{1p}^{ab} \quad (3.51)$$

Da auf der rechten Seite über ω integriert wird, auf der linken Seite aber nicht, ist die einzig mögliche Lösung eine Deltadistribution.

$$\Upsilon_{12}^{aa_1} = \delta^{aa_1} \delta(k_1 - k_2) \quad (3.52)$$

3.4.2 Zweite Ordnung

Die Lösung der Bestimmungsgleichung in erster Ordnung war nicht instruktiv, da die Lösung letztlich erraten wurde und der 2A-Term nicht beitrug. Dies ändert sich in zweiter Ordnung. Die Feldentwicklung für das A-Feld lautet hier:

$$A_1^a = \mathcal{O}(B^1) + \int d^3 k_2 d^3 k_3 \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} B_2^{a_1} B_3^{a_2} + \mathcal{O}(B^3) + \dots \quad (3.53)$$

Es ist allerdings zu beachten, daß im 2A-Term die Entwicklung von A nur bis zur ersten Ordnung benutzt wird, damit der Term insgesamt die Ordnung zwei hat. Berechne nun, genau wie in erster Ordnung, zuerst die Funktionalableitung. Bei mehr als einem Feld kommt die Produktregel zum Tragen.

$$\begin{aligned} \frac{\delta A_1^a}{\delta B_p^b} &= \int d^3 k_2 d^3 k_3 \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} \frac{\delta}{\delta B_p^b} (B_2^{a_1} B_3^{a_2}) \\ &= \int d^3 k_3 \Upsilon_{1p3}^{aba_2} B_3^{a_2} + \int d^3 k_2 \Upsilon_{12p}^{aa_1 b} B_2^{a_1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Daraus folgt dann für die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} &\int d^3 p \omega_p B_p^b \left[\int d^3 k_3 \Upsilon_{1p3}^{aba_2} B_3^{a_2} + \int d^3 k_2 \Upsilon_{12p}^{aa_1 b} B_2^{a_1} \right] \\ &= \int d^3 k_2 d^3 k_3 (\omega_2 + \omega_3) \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} B_2^{a_1} B_3^{a_2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Einsetzen in Bestimmungsgleichung:

$$\int d^3 k_2 d^3 k_3 \left(\omega_1 \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} + \frac{ig}{(2\pi)^3} f^{aa_1 a_2} \zeta_3 \right) B_2^{a_1} B_3^{a_2} = \int d^3 k_2 d^3 k_3 (\omega_2 + \omega_3) \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} B_2^{a_1} B_3^{a_2}$$

Wenn die beiden Integranden gleich sind, ist obige Gleichung auf jeden Fall erfüllt:

$$\begin{aligned} \omega_1 \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} + \frac{ig}{(2\pi)^3} f^{aa_1 a_2} \zeta_3 &= (\omega_2 + \omega_3) \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} \\ \Rightarrow \Upsilon_{123}^{aa_1 a_2} &= -\frac{ig}{(2\pi)^3} \frac{\zeta_3}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} f^{aa_1 a_2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.4.3 Rekursion

Zuletzt soll die Zielgleichung für die Entwicklung nach n B-Feldern gelöst werden. Daraus läßt sich eine Rekursionsgleichung gewinnen, mit der sich dann alle höheren Koeffizienten ermitteln lassen.

$$A_1^a = \int d^3 k_2 \dots d^3 k_n \Upsilon_{1\dots n}^{aa_1\dots a_{n-1}} B_2^{a_1} \dots B_{n+1}^{a_n} \delta(\Sigma_{i=1}^{n+1} k_i) \quad (3.57)$$

In den beiden vorangegangenen Unterkapiteln haben wir gesehen, was beim Einsetzen der Feldentwicklung geschieht. Der allgemeine Fall hier erfordert keine neuartigen Methoden. Es bedarf allerdings der umsichtigen Behandlung der Indices, um Fehler zu vermeiden. Also:

$$\begin{aligned} & \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \omega_1 \Upsilon_{1\dots n+1}^{aa_1\dots a_n} B_2^{a_1} \dots B_{n+1}^{a_n} \delta(\Sigma_{i=1}^{n+1} k_i) + \\ & + \frac{igf^{abc}}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+3} \zeta_3 \sum_{j=4}^{n+2} \Upsilon_{2,j+1\dots n+3}^{ca_j\dots a_{n+2}} \Upsilon_{34\dots j}^{ba_3\dots a_{j-1}} B_4^{a_3} \dots B_{n+3}^{a_{n+2}} \cdot \\ & \cdot \delta(\Sigma_{i=3}^j k_i) \delta(k_2 + \Sigma_{i=j+1}^{n+3} k_i) \delta(k_1 - k_2 - k_3) \\ & = \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} (\omega_2 + \dots + \omega_{n+1}) \Upsilon_{1\dots n+1}^{aa_1\dots a_n} B_2^{a_1} \dots B_{n+1}^{a_n} \delta(\Sigma_{i=1}^{n+1} k_i) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Im nächsten Schritt fasst man den ersten Term der linken mit dem der rechten Seite zusammen und wendet anschließend einige Deltafunktionen an. Zur Nomenklatur: Das Symbol “(-)” steht für minus eins mal die Summe der übrigen Argumente/Impulse; und $\zeta_{i,j} = \zeta(\Sigma_{l=i}^j k_l)$.

$$\begin{aligned} & \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \left(\omega_1 - \sum_{i=2}^{n+1} \omega_i \right) \Upsilon_{1\dots n+1}^{aa_1\dots a_n} B_2^{a_1} \dots B_{n+1}^{a_n} \delta(\Sigma_{i=1}^{n+1} k_i) \\ & = - \frac{igf^{abc}}{(2\pi)^3} \int d^3 k_4 \dots d^3 k_{n+3} \sum_{j=4}^{n+2} \zeta_{4,j} \Upsilon_{(-)4\dots j}^{ba_3\dots a_{j-1}} \Upsilon_{(-),j+1\dots n+3}^{ca_j\dots a_{n+2}} B_4^{a_3} \dots B_{n+3}^{a_{n+2}} \delta(k_1 + \Sigma_{i=4}^{n+3} k_i) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Jetzt verschiebt man noch die Grenzen der Summe und passt die anderen Größen ggf. an, um danach die Integralkerne leichter vergleichen zu können: $n \rightarrow n - 2$.

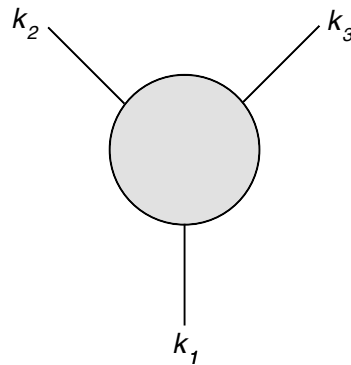
$$\begin{aligned} & \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \left(\omega_1 - \sum_{i=2}^{n+1} \omega_i \right) \Upsilon_{1\dots n+1}^{aa_1\dots a_n} B_2^{a_1} \dots B_{n+1}^{a_n} \delta(\Sigma_{i=1}^{n+1} k_i) \\ & = - \frac{igf^{abc}}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \sum_{j=2}^n \zeta_{2,j} \Upsilon_{(-)2\dots j}^{ba_1\dots a_{j-1}} \Upsilon_{(-),j+1\dots n+1}^{ca_j\dots a_n} B_2^{a_1} \dots B_{n+1}^{a_n} \delta(\Sigma_{i=1}^{n+1} k_i) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Vergleich der Integralkerne. Man findet:

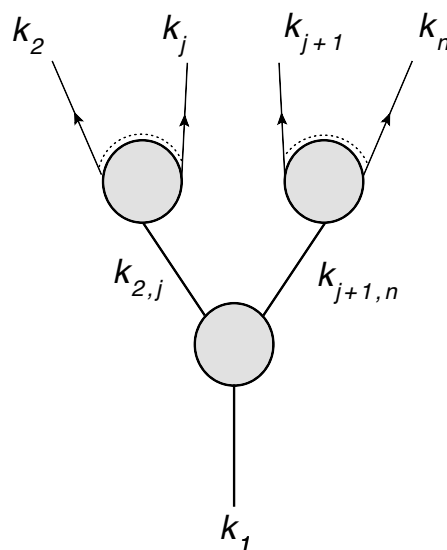
$$\Upsilon_{1\dots n+1}^{aa_1\dots a_n} = -\frac{igf^{abc}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_1 - \sum_{i=2}^{n+1} \omega_i} \sum_{j=2}^n \zeta_{2,j} \Upsilon_{(-)2\dots j}^{ba_1\dots a_{j-1}} \Upsilon_{(-),j+1\dots n+1}^{ca_j\dots a_n} \quad (3.61)$$

Vermittels dieser Rekursion lassen sich alle höheren Entwicklungskoeffizienten, ausgedrückt in ω und ζ , finden. Damit ist die höchste Hürde bei der Transformation auf MHV-Form genommen.

An dieser Stelle bietet es sich an, die Transformation des 2A-Terms diagrammatisch zu betrachten. Im ursprünglichen Zustand sieht er so aus:



Durch die Trafo ändern sich die mit k_2 und k_3 beschrifteten Beinchen. Das ist klar, weil bei der Herleitung der Rekursionsbeziehung die Feldentwicklung für $A(k_2)$ und $A(k_3)$ eingesetzt wurde.



3.5 Ausblick

Die restlichen Schritte bis hin zur MHV-Lagrangedichte sind konzeptionell nichts Neues, zumal James Eitle den Weg bereits in seiner Doktorarbeit beschrieben hat. Außerdem soll der Schwerpunkt dieser Diplomarbeit verstärkt auf der Anwendung der in diesem Kapitel gelernten Methoden auf den Eichbosonensektor der elektroschwachen Wechselwirkung liegen. Der Vollständigkeit halber möchte ich jedoch die verbleibenden Schritte kurz verbal skizzieren.

Zur weiteren Vereinfachung setzt man für ω und ζ die entsprechenden Impulse ein. Anschließend verwendet man mehrfach die Impulserhaltung, um die Entwicklungskoeffizienten in Abhängigkeit von untereinander unabhängigen Impulsen auszudrücken. Führt man dies für die ersten drei bis vier Ordnungen durch, so ist sehr bald ein Muster erkennbar, d.h. man kann die Rekursion lösen und eine geschlossene Form für die Entwicklungskoeffizienten angeben. Diese geschlossene Form weist dann bereits bemerkenswerte Ähnlichkeit zur MHV-Amplitude auf.

Als nächstes verschafft man sich über die Umkehrung der Transformationsgleichung (3.23) die Entwicklung der $\bar{\mathcal{A}}$ -Felder. Die Besonderheit der $\bar{\mathcal{A}}$ -Entwicklung gegenüber der \mathcal{A} -Entwicklung ist ihre Linearität in $\bar{\mathcal{B}}$. Setzt man nämlich die Entwicklungen von \mathcal{A} und $\bar{\mathcal{A}}$ in die Lagrangedichten \mathcal{L}^{+--} und \mathcal{L}^{++--} ein, so ergeben sich Ausdrücke mit beliebig vielen \mathcal{B} -, aber immer nur zwei $\bar{\mathcal{B}}$ -Feldern. Die Vertices dieser neuen Lagrangedichte entsprechen genau der MHV-Amplitude.

Weiterhin überprüft man, daß die physikalischen Amplituden, welche über die MHV-Methode berechnet wurden, mit denen der gewöhnlichen Feynmandiagrammen übereinstimmen. Diese Koinzidenz sollte dann keine Überraschung darstellen, da die Transformation auf MHV-Form bereits so angelegt ist, daß die Physik nicht angetastet wird.

3.A Inverse Differentialoperatoren

3.A.1 Partielle Integration

Der Beweis, daß sich inverse und gewöhnliche Differentialoperatoren in gleicher Weise partiell integrieren lassen, erfolgt im wesentlichen durch Nachrechnen. Seien also $f(x)$ und $g(x)$ $C^\infty(\mathbb{C})$ -Funktionen. Dann gilt

$$\int dx f \partial^{-1} g = \int dx \partial^{-1} \partial f \partial^{-1} g \quad (3.62)$$

Jetzt integriert man den ∂ -Operator in gewöhnlicher Weise partiell.

$$\int dx \partial^{-1} \partial f \partial^{-1} g = \int dx \partial [\partial^{-1} f \partial^{-1} g] - \int dx \partial^{-1} f \partial \partial^{-1} g \quad (3.63)$$

Für physikalische Felder verschwindet der Randterm meistens, da von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert wird und physikalische Felder im Unendlichen den Wert Null annehmen. Es bleibt

$$\int dx f \partial^{-1} g = - \int dx \partial^{-1} f g, \quad (3.64)$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

3.A.2 Produktregel

Zum Nachweis der Nichtexistenz der Produktregel führt man einen Beweis durch Widerspruch. Seien f, g definiert wie in (3.A.1). Angenommen, es gäbe eine Produktregel, dann sähe sie so aus:

$$\partial^{-1}(fg) = f \partial^{-1} g + (\partial^{-1} f) g \quad (3.65)$$

Durch Anwenden von ∂^2 sollte man die bekannte Produktregel zurückgewinnen können. Man findet aber stattdessen:

$$\partial(ab) = -\frac{1}{2} [\partial^2 f \partial^{-1} g + \partial^{-1} f \partial^2 g] \quad (3.66)$$

Da die Produktregel nicht erfolgreich reproduziert werden konnte, bleibt als Schlußfolgerung nur, daß die Annahme falsch war. Das bedeutet, daß es keine Produktregel im Sinne von Gleichung (3.65) für inverse Differentialoperatoren gibt.

3.B Ausintegrieren eines Freiheitsgrades

Hier möchte ich im einzelnen erklären, wie das Ausintegrieren abläuft, also welche Rechenschritte konkret notwendig sind. Ausgangspunkt ist das Pfandintegral

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + K \phi] + L \} \quad (3.67)$$

Zur Erinnerung: ϕ und K sind algebrawertig, L ist skalar. Der Differentialoperator Δ muß gerade Ordnung haben, ansonsten ergeben sich beim partiellen Integrieren, siehe unten, Probleme. Man nimmt die Variablentransformation:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \Delta K \Rightarrow \phi = \phi' - \Delta K \quad (3.68)$$

vor, d.h. im Pfandintegral wird für ϕ eingesetzt. In der folgenden Rechnung wird die partielle Integration benutzt, sowie $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ für Matrizen A, B .

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} (\phi' - \Delta K) \Delta^{-1} (\phi' - \Delta K) + K (\phi' - \Delta K)] + L \} \\ = & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} (\phi' \Delta^{-1} \phi' - \phi \Delta^{-1} \Delta K - \Delta K \Delta^{-1} \phi' + \\ & \quad + \Delta K \Delta^{-1} \Delta K) + K \phi' - K \Delta K] + L \} \\ = & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' - \frac{1}{2} \phi K - \frac{1}{2} \Delta K \Delta^{-1} \phi' + \frac{1}{2} \Delta K \cdot K + K \phi' - \\ & \quad - K \Delta K] + L \} \\ = & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' + \frac{1}{2} \phi K - \underbrace{\frac{1}{2} \Delta K \Delta^{-1} \phi' - \frac{1}{2} K \Delta K}_{2 \text{ mal part. Int.}}] + L \} \\ = & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' + \frac{1}{2} \phi' K - \frac{1}{2} K \phi' - \frac{1}{2} K \Delta K] + L \} \\ = & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \exp \int d^4x ik \{ \text{tr} [\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi' - \frac{1}{2} K \Delta K] + L \} \end{aligned}$$

Der Anteil $\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'$ ergibt eine unendliche Konstante und trägt damit nicht zur Dynamik bei, kann also ignoriert werden. Der Term $-\frac{1}{2} K \Delta K$ ist die Quintessenz dieser Rechnung. Er legt die Gestalt der Lagrangedichte nach dem Ausintegrieren fest.

3.C Kanonische Transformationen

An dieser Stelle soll ein kurzer Überblick über die grundlegenden Eigenschaften kanonischer Transformationen gegeben werden. Insbesondere möchte ich auf die für dieses Kapitel relevanten Punkte eingehen.

Im allgemeinen ist eine kanonische Transformation eine Abbildung von einem Satz Phasenraumkoordinaten $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n)$ eines physikalischen Systems auf einen neuen Satz Phasenraumkoordinaten $\mathbf{Q} = (Q_1 \dots Q_n)$, $\mathbf{P} = (P_1 \dots P_n)$, und zwar so, daß die Hamilton-Bewegungsgleichungen forminvariant bleiben. Dabei sind \mathbf{p} , \mathbf{P} die zu \mathbf{q} , \mathbf{Q} kanonisch konjugierten Impulse. In Formeln:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

H ist die Hamiltonfunktion des Systems in "alten" und K in den "neuen" Koordinaten. Der Punkt über einer Koordinate steht für deren totale Zeitableitung. Das Wirkungsfunktional jeder der beiden Hamiltonfunktionen muß stationär sein, ergo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H) dt = 0 \quad (3.70)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{Q}^i P_i - K) dt = 0 \quad (3.71)$$

Die Lagrangefunktion eines physikalischen Systems ist nicht eindeutig. Sie kann immer um die totale Zeitableitung einer Funktion geändert werden, ohne daß die Dynamik des Systems dadurch verändert würde. Die Ursache dafür ist, daß die Variation an den Punkten $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwindet. Sollen also Gleichung (3.70) und (3.71) gleichzeitig erfüllt werden, dann dürfen sich die entsprechenden Lagrangefunktionen nur um eine totale Zeitableitung unterscheiden, d.h.:

$$\dot{q}^i p_i - H = \dot{Q}^i P_i - K + \frac{dM}{dt} \quad (3.72)$$

Die Funktion M kann von alten und neuen Phasenraumkoordinaten abhängen. Je nachdem, wie sie beschaffen ist, ergeben sich andere kanonische Transformationen. Man bezeichnet daher M als erzeugende Funktion. Betrachte nun den speziellen Fall, wo

$$M(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = f^i(\mathbf{q}) P_i - Q^i P_i \quad (3.73)$$

Die Zeitableitung dieses Ausdrucks ist

$$\frac{dM}{dt} = \dot{q}^i \frac{\partial f^j}{\partial q^i} P_j + f^i(\mathbf{q}) \dot{P}_i - \dot{Q}^i P_i - Q^i \dot{P}_i \quad (3.74)$$

Einsetzen in Gleichung (3.72) liefert

$$\dot{q}^i p_i - H = -K + \dot{q}^i \frac{\partial f^j}{\partial q^i} P_j + f^i(\mathbf{q}) \dot{P}_i - Q^i \dot{P}_i \quad (3.75)$$

Unter der Annahme, daß \mathbf{q} und \mathbf{P} voneinander unabhängige Koordinaten sind, ergeben sich aus obiger Gleichung per Koeffizientenvergleich folgende Bedingungen:

$$H = K \quad (3.76)$$

$$f^i(\mathbf{q}) = Q^i \quad (3.77)$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial f^j}{\partial q^i} P_j = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} P_j \quad (3.78)$$

Um die letzte Bedingung für dieses Kapitel besser verwertbar zu machen, multipliziert man Gleichung (3.78) mit $\sum_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^k}$ auf und benutzt die Kettenregel rückwärts.

$$P_i = \frac{\partial q^j}{\partial Q^i} p_j \quad (3.79)$$

Eine weitere Konsequenz von Gleichung (3.76) bis (3.78) ist, daß $\frac{dM}{dt}$ verschwindet und sich Gleichung (3.72) zu

$$\dot{q}^i p_i = \dot{Q}^i P_i \quad (3.80)$$

vereinfacht.

Was haben wir gewonnen?

- Kanonische Transformationen ändern per Konstruktion die Dynamik nicht.
- Für eine spezielle Wahl der erzeugenden Funktion ergibt sich eine einfache Relation, mit der sich alte in neue (Phasenraum-) Koordinaten übersetzen lassen.
- Der kinetische Anteil ist in alten und neuen Koordinaten identisch.

Diese Eigenschaften sind wichtig, da sie einerseits unserem Ziel entsprechen, lediglich durch Änderung der Koordinaten auf eine physikalisch äquivalente Wirkung zu transformieren, die die MHV-Amplitude produziert. Andererseits ergeben sich bei der tatsächliche Rechnung Vereinfachungen durch die Beschaffenheit der Transformation.

4 Anwendung auf den elektroschwachen Eichbosonensektor

4.1 Lichtkegelkoordinaten

Dieses Kapitel hat die Anwendung der Methode aus der Doktorarbeit von James Ertle auf den elektroschwachen Sektor zum Ziel [10]. Die relevante Wirkung hat hier die folgende Gestalt:

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} \mathcal{W}_{\mu\nu} \mathcal{W}^{\mu\nu} + \frac{1}{2g'^2} \int d^4x \operatorname{tr} \mathcal{B}_{\mu\nu} \mathcal{B}^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (4.1)$$

mit

$$\mathcal{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{W}_\nu - \partial_\nu \mathcal{W}_\mu + g[\mathcal{W}_\mu, \mathcal{W}_\nu] \quad (4.2)$$

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{B}_\nu - \partial_\nu \mathcal{B}_\mu \quad (4.3)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathcal{W}_\mu + \mathcal{B}_\mu \quad (4.4)$$

$$\mathcal{W}_\mu = -igW_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{B}_\mu = -ig' B_\mu \frac{Y}{2} \mathbb{1} \quad (4.6)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H(x) + i\chi(x)) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

wobei Y die Hyperladung und σ^a die Paulimatrizen sind. Die Normierung ist durch Gleichung (2.1) gegeben. Die nachfolgende Rechnung wird komplett in den unphysikalischen Feldern \mathcal{W} und \mathcal{B} durchgeführt. Der Grund, nicht die physikalischen Felder zu nehmen, liegt darin, daß sich die Transformation einfacher in kartesischen Feldern bewältigen läßt.

Zum Schluß schreibt man dann die Ergebnisse auf physikalische Felder um.

Ich verwende die gleiche Trafo für die Lichtkegelkoordinaten wie im Yang-Mills-Fall, also:

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x^3), \quad x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x^3), \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2).$$

Ebenfalls analog zum vorangegangenen Kapitel läuft die Quantisierung der Wirkung. Auch hier wird die Wirkung auf dreidimensionalen Flächen konstanter Lichtkegelzeit x_+ quantisiert. Die Fläche hat wieder den Normalenvektor $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T$ in Minkowskikoordinaten. Die beiden Felder W und B werden einzeln eichfixiert.

$$\mu \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B}_- = 0 = \mu \cdot \mathcal{W} = \mathcal{W}_- \quad (4.8)$$

Dies hat Konsequenzen für die Minkowskiskalarprodukte, an denen B - oder W -Felder beteiligt sind. Für beliebige Felder X, Y gilt allgemein

$$X \cdot Y = X_+ Y_- + X_- Y_+ - X \bar{Y} - \bar{X} Y \quad (4.9)$$

Für zwei B -Felder gilt

$$B_\mu B^\mu = B_+ \underbrace{B_-}_{=0} + \underbrace{B_-}_{=0} B_+ - B \bar{B} - \bar{B} B = -2\bar{B} B \quad (4.10)$$

Die Rechnung für zwei W -Felder funktioniert selbstverständlich analog. Bei einem Mischterm aus B - und W -Feldern findet man:

$$B_\mu W^{a\mu} = B_+ \underbrace{W_-^a}_{=0} + \underbrace{B_-}_{=0} W_+^a - B \bar{W}^a - \bar{B} W^a = -B \bar{W}^a - \bar{B} W^a \quad (4.11)$$

Das Ergebnis der Anwendung der Lichtkegleichung auf den Yang-Mills-Anteil des W -Feldes kann aus dem vorigen Kapitel abgeschrieben werden. Hier verändert sich nichts.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^W = & \mathcal{W}_+ \partial_-^2 \mathcal{W}_+ - 2\mathcal{W}_+ \partial \partial_- \bar{\mathcal{W}} - 2\mathcal{W}_+ \bar{\partial} \partial_- \mathcal{W} + \mathcal{W} \bar{\partial}^2 \mathcal{W} + 4\mathcal{W} \partial_+ \partial_- \bar{\mathcal{W}} - \\ & - 2\mathcal{W} \bar{\partial} \partial \bar{\mathcal{W}} + \bar{\mathcal{W}} \partial^2 \bar{\mathcal{W}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}_3^W = 2(-\partial_- \mathcal{W}[\mathcal{W}_+, \bar{\mathcal{W}}] - \partial_- \bar{\mathcal{W}}[\mathcal{W}_+, \mathcal{W}] + \partial \bar{\mathcal{W}}[\bar{\mathcal{W}}, \mathcal{W}] + \bar{\partial} \mathcal{W}[\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}]) \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}_4^W = [\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}][\bar{\mathcal{W}}, \mathcal{W}] \quad (4.14)$$

Beim Yang-Mills-Anteil des B -Feldes fallen die Terme mit drei und vier Feldern weg, da der zugehörige Kommutator Null ist.

$$\mathcal{L}_2^B = \mathcal{B}_+ \partial_-^2 \mathcal{B}_+ - 2\mathcal{B}_+ \partial \partial_- \bar{\mathcal{B}} - 2\mathcal{B}_+ \bar{\partial} \partial_- \mathcal{B} + \mathcal{B} \bar{\partial}^2 \mathcal{B} + 4\mathcal{B} \partial_+ \partial_- \bar{\mathcal{W}} - 2\mathcal{B} \bar{\partial} \partial \bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{B}} \partial^2 \bar{\mathcal{B}} \quad (4.15)$$

Neue Terme dagegen liefert der Ausdruck $(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi$, mit welchem das Higgsfeld an das Eichfeld ankoppelt und den ich im folgenden als Kopplungsterm bezeichne.

$$\begin{aligned}
 (D^\mu\phi(x))^\dagger D_\mu\phi(x) &= \\
 &= (\partial^\mu\phi^\dagger + ig\phi^\dagger\frac{\sigma^a}{2}W^{a\mu} + ig'\frac{Y}{2}B^\mu\phi^\dagger)(\partial_\mu\phi - ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a\phi - ig'\frac{Y}{2}B_\mu\phi) \\
 &= \partial^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi + \frac{ig}{2}W^{a\mu}(\phi^\dagger\sigma^a\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi^\dagger\sigma^a\phi) + \frac{ig'}{2}B^\mu(\phi^\dagger\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi^\dagger\phi) + \\
 &\quad + \frac{gg'}{2}B^\mu W_\mu^a\phi^\dagger\sigma^a\phi + \frac{1}{4}(g'^2B^\mu B_\mu + g^2W^{a\mu}W_\mu^a)\phi^\dagger\phi
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Im nächsten Schritt wird wieder ein Freiheitsgrad ausintegriert, hier \mathcal{B}_+ und \mathcal{W}_+ . Dabei folgen wir ebenfalls der im Appendix 3.B beschriebenen Methode. Die Prozedur muß für jedes der beiden Eichfelder jeweils einmal durchgeführt werden. Um Schwierigkeiten beim Ausintegrieren von \mathcal{W}_+ aus dem Weg zu gehen, wird die Rechnung in Komponentenschreibweise fortgesetzt.

Wir erinnern uns, daß die Gestalt der neuen Lagrangedichte im wesentlichen durch den Term $-\frac{1}{2}K\Delta K$ bestimmt war. K ist die Summe aller Terme, die proportional zum auszuintegrierenden Feld sind. Diese Größe erhält gegenüber dem reinen Yang-Mills-Fall Zusatzbeiträge aus dem Kopplungsterm. Δ ist das Inverse des Differentialoperators des Terms, der quadratisch im auszuintegrierenden Feld ist. Will man nun \mathcal{B}_+ ausintegrieren, so ist zu beachten, daß Terme der Form $B \cdot B$ und $B \cdot W$ wegen Gleichung (4.10) und (4.11) nicht beitragen. Damit lauten die entsprechenden Parameter

$$\Delta = \frac{1}{2}\partial_-^{-2} \quad K_B = \partial\partial_-\bar{B} + \bar{\partial}\partial_-B + \frac{ig'}{2}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi \tag{4.17}$$

Hier wurde die Abkürzung $\psi\overleftrightarrow{\partial}\phi := \psi\partial\phi - \partial\psi\phi$ für beliebige Felder ψ, ϕ und Differentialoperatoren ∂ eingeführt. Weiter folgt:

$$K_B\partial_-^{-2}K_B = \bar{B}\partial^2\bar{B} + B\bar{\partial}^2B + 2\bar{B}\partial\bar{\partial}B + ig'(\partial\partial_-^{-1}\bar{B} + \bar{\partial}\partial_-^{-1}B) \cdot \phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi \tag{4.18}$$

Kombinieren mit B -Anteil der Lagrangedichte:

$$L_B = \frac{1}{2}\left\{ 4B(\bar{\partial}\partial - \partial_+\partial_-)\bar{B} + ig'(\partial\partial_-^{-1}\bar{B} + \bar{\partial}\partial_-^{-1}B)\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi - \frac{g'^2}{4}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi\partial_-^{-2}(\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \right\} \tag{4.19}$$

Jetzt wenden wir uns der Ausintegration von W_+^a zu.

Für K_W sind Terme proportional W_+^a relevant. Terme der Form $W \cdot W$ und $B \cdot W$ tragen

aufgrund der Eichbedingung nicht bei. K_W erhält genau wie K_B Zusatzbeiträge aus dem Kopplungsterm. Außerdem treten noch Beiträge aus Termen mit drei und vier Feldern hinzu. Diese sind aber bereits aus dem vorigen Kapitel bekannt und werden hier lediglich in die Komponentenschreibweise übertragen.

Damit hat K_W die Gestalt:

$$K_W = \partial\partial_- \bar{W}^a + \bar{\partial}\partial_- W^a + g(\partial_- \mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}})^a + g(\partial_- \bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W})^a + \frac{ig}{2} \phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \quad (4.20)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} K_W \partial_-^2 K_W = & \bar{W}^a \partial^2 \bar{W}^a + W^a \bar{\partial}^2 W^a + 2\bar{W}^a \partial \bar{\partial} W^a + 4g \bar{\partial} \partial_-^1 \mathbf{W} \cdot (\mathbf{W} \times \partial_- \bar{\mathbf{W}}) + \\ & + 4g (\bar{\mathbf{W}} \times \partial_- \mathbf{W}) \cdot \partial \partial_-^1 \bar{\mathbf{W}} + 4g^2 (\partial_- \mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}}) \cdot \partial_-^2 (\partial_- \bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W}) + \\ & + ig (\partial \partial_-^1 \bar{W}^a + \bar{\partial} \partial_-^1 W^a - g \partial_-^2 (\partial_- \mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}})^a - g \partial_-^2 (\partial_- \bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W})^a) \cdot \\ & \cdot \left(\phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) - \frac{g^2}{4} \phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \partial_-^2 \left(\phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Kombinieren mit W -Anteil der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} L_W = & \frac{1}{2} \left\{ 4W (\bar{\partial}\partial - \partial_+ \partial_-) \bar{W} + 4g \bar{\partial} \partial_-^1 \vec{W} \cdot (\vec{W} \times \partial_- \vec{W}) + \right. \\ & + 4g (\bar{\mathbf{W}} \times \partial_- \mathbf{W}) \cdot \partial \partial_-^1 \bar{\mathbf{W}} + 4g^2 (\partial_- \mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}}) \cdot \partial_-^2 (\partial_- \bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W}) + \\ & + ig (\partial \partial_-^1 \bar{W}^a + \bar{\partial} \partial_-^1 W^a - g \partial_-^2 (\partial_- \mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}})^a - g \partial_-^2 (\partial_- \bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W})^a) \cdot \\ & \left. \cdot \left(\phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) - \frac{g^2}{4} \phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \partial_-^2 \left(\phi^\dagger \sigma^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

In Analogie zum Yang-Mills-Fall sortiert man die einzelnen Terme nun gemäß ihrer Helizitätszusammensetzung. Dabei tritt folgende Schwierigkeit auf: Das Higgsdublett ϕ ist spinlos, hat also Spin 0 und somit keinerlei Helizität. Um diesem Problem zu begegnen, bedient man sich der Tatsache, daß ϕ und ϕ^\dagger voneinander unabhängige Felder sind und ordnet ihnen künstlich Helizitäten zu. Per Konvention trägt ϕ positive und ϕ^\dagger negative Helizität. Ferner enthalten die folgenden Lagrangedichten auch alle Terme, die an der Aus-

integration nicht teilgenommen haben.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{+-} = & \frac{1}{2} \left\{ 4B (\bar{\partial}\partial - \partial_+\partial_-) \bar{B} + 4\mathbf{W} (\bar{\partial}\partial - \partial_+\partial_-) \bar{\mathbf{W}} - 2m^2\phi^\dagger\phi + \right. \\ & \left. + 4\phi^\dagger (\bar{\partial}\partial - \partial_+\partial_-) \phi \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{++-} = & \frac{1}{2} \left\{ ig'\bar{\partial}\partial_-^{-1}B\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi + 4g\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathbf{W} (\mathbf{W} \times \partial_-\bar{\mathbf{W}}) + ig\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathbf{W}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi - \right. \\ & \left. - ig\mathbf{W}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi - ig'B\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{+--} = & \frac{1}{2} \left\{ ig'\partial\partial_-^{-1}\bar{B}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi + 4g(\bar{\mathbf{W}} \times \partial_-\mathbf{W})\partial\partial_-^{-1}\bar{\mathbf{W}} + ig\partial\partial_-^{-1}\bar{\mathbf{W}}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi - \right. \\ & \left. - ig\bar{\mathbf{W}}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi - ig'\bar{B}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{++++} = & \frac{1}{2} \left\{ 4g^2 (\partial_-\mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}}) \partial_-^{-2} (\partial_-\bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W}) - \frac{g'^2}{4} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \partial_-^{-2} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) - \right. \\ & - ig^2\partial_-^{-2} (\partial_-\mathbf{W} \times \bar{\mathbf{W}} + \partial_-\bar{\mathbf{W}} \times \mathbf{W}) \phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi - \\ & - \frac{g^2}{4} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \partial_-^{-2} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger\phi) (\phi^\dagger\phi) - gg'B_\perp\mathbf{W}_\perp\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\phi - \\ & \left. - \frac{g'^2}{2} B_\perp\bar{B}_\perp\phi^\dagger\phi - \frac{g^2}{2} \mathbf{W}_\perp\bar{\mathbf{W}}_\perp\phi^\dagger\phi \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Zwecks kompakterer Notation verwandle ich die Lagrangedichten in Spuren über algebrawertige Felder zurück. Zusätzlich fasse ich die Terme $-\frac{g'^2}{4} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \partial_-^{-2} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi)$ und $-\frac{g^2}{4} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \partial_-^{-2} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\sigma}\overleftrightarrow{\partial}_-\phi)$ mithilfe der Fierzidentität für Paulimatrizen zusammen. Die Details dieser Rechnung sind im Appendix am Ende dieses Kapitels dargelegt.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{+-} = & \text{Tr} \left[\frac{4}{g'^2} \mathcal{B} (\partial_+\partial_- - \bar{\partial}\partial) \bar{\mathcal{B}} + \frac{4}{g^2} \mathcal{W} (\partial_+\partial_- - \bar{\partial}\partial) \bar{\mathcal{W}} \right] - m^2\phi^\dagger\phi - \\ & - 2\phi^\dagger (\partial_+\partial_- - \bar{\partial}\partial) \phi \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{L}^{++-} = \text{Tr} \left[\bar{\partial}\partial_-^{-1} (\mathcal{W} + \mathcal{B}) \phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger - \frac{4}{g^2} \bar{\partial}\partial_-^{-1} \mathcal{W} [\mathcal{W}, \partial_-\bar{\mathcal{W}}] - (\mathcal{W} + \mathcal{B}) \phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger \right] \quad (4.28)$$

$$\mathcal{L}^{+--} = \text{Tr} \left[\partial\partial_-^{-1} (\bar{\mathcal{W}} + \bar{\mathcal{B}}) \phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger - \frac{4}{g^2} [\bar{\mathcal{W}}, \partial_-\mathcal{W}] \bar{\partial}\partial_-^{-1} \mathcal{W} - (\bar{\mathcal{W}} + \bar{\mathcal{B}}) \phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger \right] \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{++++} = & -4\text{Tr} [\partial_-\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}] \partial_-^{-2} [\partial_-\bar{\mathcal{W}}, \mathcal{W}] + \frac{1}{4}(g^2 - g'^2) (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \partial_-^{-2} (\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_-\phi) \\ & + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger\phi) (\phi^\dagger\phi) + \text{Tr} [((\bar{\mathcal{W}} + \bar{\mathcal{B}})(\mathcal{W} + \mathcal{B}) + (\mathcal{W} + \mathcal{B})(\bar{\mathcal{W}} + \bar{\mathcal{B}})) \phi\phi^\dagger] - \\ & - \text{Tr} \left(\partial_-^{-2} ([\partial_-\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}] + [\partial_-\bar{\mathcal{W}}, \mathcal{W}]) \phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger \right) - \frac{g^2}{2} \text{Tr} (\phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger) \partial_-^{-2} (\phi\overleftrightarrow{\partial}_-\phi^\dagger) \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.2 Die Transformation

In Analogie zum reinen Yang-Mills-Fall ist auch jetzt wieder das Ziel die Eliminierung des ‘‘Störterms’’ \mathcal{L}^{+-} . Dieser hat gegenüber vorher eine etwas aufwendigere Gestalt. Insbesondere enthält er die Beiträge der Skalarfelder. Die Bestimmungsgleichung ist hier

$$\int d^3x \mathcal{L}^{+-}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}, \phi, \phi^\dagger) + \int d^3x \mathcal{L}^{++-}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}, \phi, \phi^\dagger) = \int d^3x \mathcal{L}^{+-}(\mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}, \psi, \psi^\dagger) \quad (4.31)$$

Auf den ersten Blick fallen zwei Dinge auf. Erstens enthält obige Bestimmungsgleichung im (scheinbaren) Gegensatz zum reinen Yang-Mills-Fall Integrale. Im vorigen Kapitel sind die Integrationen direkt mit in die Lagrangedichten \mathcal{L} hineindefiniert worden; siehe dazu Gleichungen (3.17-3.21). Insofern besteht hier kein Unterschied. Zweitens werden die B-Felder nicht mittransformiert. Dies geschieht aus Gründen der Einfachheit. Man könnte die B-Felder genauso einer Transformation unterwerfen. Jedoch wird die Rechnung dadurch nur komplizierter. Setzt man nun für die entsprechenden Lagrangedichten ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left\{ \text{Tr} \left[\frac{4}{g^2} \mathcal{W} (\partial_+ \partial_- - \bar{\partial} \partial) \bar{\mathcal{W}} \right] - 2\phi^\dagger (\partial_+ \partial_- - \bar{\partial} \partial) \phi + \right. \\ & \quad \left. + \text{Tr} \left[\bar{\partial} \partial_-^{-1} (\mathcal{W} + \mathcal{B}) \phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger - \frac{4}{g^2} \bar{\partial} \partial_-^{-1} \mathcal{W} [\mathcal{W}, \partial_- \bar{\mathcal{W}}] - (\mathcal{W} + \mathcal{B}) \phi \overleftrightarrow{\partial} \phi^\dagger \right] \right\} = \\ & = \int d^3x \left\{ \text{Tr} \left[\frac{4}{g^2} \mathcal{V} (\partial_+ \partial_- - \bar{\partial} \partial) \bar{\mathcal{V}} \right] - 2\psi^\dagger (\partial_+ \partial_- - \bar{\partial} \partial) \psi \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

An diesem Punkt stellt sich die Frage, warum der Massenterm $m^2 \phi^\dagger \phi$ nicht in der Zielgleichung auftaucht. Tatsächlich wird er nicht über die Gleichung hier auf MHV-Form gebracht, sondern indem man zum Schluß die Entwicklung $\phi[\mathcal{V}, \psi]$ in den Massenterm einsetzt. Dies liefert eine zusätzliche MHV-Regel.

Die eigentliche Transformation verläuft in zwei Schritten. Zunächst ersetzt man die \mathcal{V} -Felder. Die Transformationsgleichung (3.23) des reinen Yang-Mills-Falles erhält einen Zusatzterm aufgrund der Anwesenheit der Skalarfelder [10]:

$$\partial_- \bar{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \int d^3y \left[\frac{\delta \mathcal{W}(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{V}(\mathbf{x})} \partial_- \bar{\mathcal{W}}(\mathbf{y}) + \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{V}(\mathbf{x})} \partial_- \phi^\dagger(\mathbf{y}) \right] \quad (4.33)$$

Man versucht nun, dem vorigen Kapitel folgend, die Eigenschaft $\dot{q}p = \dot{Q}P$ kanonischer Transformationen auszunutzen. Berechne dazu $\frac{\delta \mathcal{L}^{+-}}{\delta \partial_- \phi} = -2\partial_+ \phi^\dagger$ sowie $\frac{\delta \mathcal{L}^{+-}}{\delta \partial_- \mathcal{V}} = -\partial_+ \bar{\mathcal{V}}$. Schreibweise: $\mathcal{W} + \mathcal{B} =: \mathcal{M}$. Dieses neue Feld \mathcal{M} ist ein Feld mit Symmetriegruppe $U(2)$.

Die Ursache, warum sich die beiden Felder \mathcal{W} und \mathcal{B} so einfach zu einem einzigen $U(2)$ -Feld zusammenfassen lassen, liegt darin, daß die $U(2)$ lokal isomorph zu $SU(2) \times U(1)$ ist. Also:

$$\int d^3x \left\{ -\frac{4}{g^2} \text{Tr} \mathcal{W} \bar{\partial} \partial \bar{\mathcal{W}} + 2\phi^\dagger \bar{\partial} \partial \phi + \text{Tr} \left[\bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger - \frac{4}{g^2} \bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{W} [\mathcal{W}, \partial_{-} \bar{\mathcal{W}}] - \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger \right] \right\} = \int d^3x \left\{ -\frac{4}{g^2} \text{Tr} \mathcal{V} \bar{\partial} \partial \bar{\mathcal{V}} + 2\psi^\dagger \bar{\partial} \partial \psi \right\}$$

Nun folgt man weiter dem Kapitel 3 und erweitert mit $1 = \partial_{-1} \partial_{-}$.

$$\int d^3x \left\{ -\frac{4}{g^2} \text{Tr} \mathcal{W} \bar{\partial} \partial \partial_{-1} \partial_{-} \bar{\mathcal{W}} + 2\phi^\dagger \bar{\partial} \partial \partial_{-1} \partial_{-} \phi + \text{Tr} \left[\bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger - \frac{4}{g^2} \bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{W} [\mathcal{W}, \partial_{-} \bar{\mathcal{W}}] - \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger \right] \right\} = \int d^3x \left\{ -\frac{4}{g^2} \text{Tr} \mathcal{V} \bar{\partial} \partial \partial_{-1} \partial_{-} \bar{\mathcal{V}} + 2\psi^\dagger \bar{\partial} \partial \partial_{-1} \partial_{-} \psi \right\}$$

Partielles Integrieren. Der Operator ω ist hier exakt derselbe, wie in Kapitel 3.

$$\text{Tr} \int d^3x \left\{ \frac{4}{g^2} \omega \mathcal{W} \partial_{-} \bar{\mathcal{W}} - 2\omega \phi \partial_{-} \phi^\dagger + \left[\bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger - \frac{4}{g^2} \bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{W} [\mathcal{W}, \partial_{-} \bar{\mathcal{W}}] - \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger \right] \right\} = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \frac{4}{g^2} \omega \mathcal{V} \partial_{-} \bar{\mathcal{V}} - 2\omega \psi \partial_{-} \psi^\dagger \right\}$$

Durch Einsetzen der Trafo für $\partial_{-} \bar{\mathcal{V}}$, Gleichung (4.33), fallen alle Terme, die bereits aus dem reinen Yang-Mills-Fall bekannt sind, weg. Der skalare Anteil dieser Transformation der Eichfelder produziert jedoch einige neue Terme.

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int d^3x \left\{ -2\omega \phi \partial_{-} \phi^\dagger + \bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger - \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger \right\} &= \\ &= \text{Tr} \int d^3x d^3y \left\{ \frac{4}{g^2} \omega \mathcal{V}(\mathbf{x}) \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{V}(\mathbf{x})} \partial_{-} \phi^\dagger(\mathbf{y}) - 2\omega \psi \partial_{-} \psi^\dagger \right\} \end{aligned}$$

Jetzt kommt der zweite Schritt, die Transformation der Skalarfelder. Die zugehörige Gleichung lautet:

$$\partial_{-} \psi^\dagger(\mathbf{x}) = \int d^3y \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \psi(\mathbf{x})} \partial_{-} \phi^\dagger(\mathbf{y}) \quad (4.34)$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int d^3x \left\{ -2\omega \phi \partial_{-} \phi^\dagger + \bar{\partial} \partial_{-1} \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger - \mathcal{M} \phi \overleftrightarrow{\partial}_{-} \phi^\dagger \right\} &= \\ &= \text{Tr} \int d^3x d^3y \left\{ \frac{4}{g^2} \omega \mathcal{V}(\mathbf{x}) \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{V}(\mathbf{x})} \partial_{-} \phi^\dagger(\mathbf{y}) - 2\omega \psi(\mathbf{x}) \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \psi(\mathbf{x})} \partial_{-} \phi^\dagger(\mathbf{y}) \right\} \end{aligned}$$

Ziel ist es nun, den Faktor $\partial_- \phi^\dagger(\mathbf{x})$ auf beiden Seiten auszuklammern. Dazu vertauscht man auf der rechten Seite die Integrationsvariablen.

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int d^3x \left\{ -2\omega\phi\partial_- \phi^\dagger + \bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M}\phi\overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger - \mathcal{M}\phi\overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right\} = \\ = \text{Tr} \int d^3x d^3y \left\{ \frac{4}{g^2}\omega\mathcal{V}(\mathbf{y})\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\mathcal{V}(\mathbf{y})}\partial_- \phi^\dagger(\mathbf{x}) - 2\omega\psi(\mathbf{y})\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})}\partial_- \phi^\dagger(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned}$$

Auf der linken Seite führt man in den $\phi\overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger$ -Termen dort, wo nötig, zwangsweise $1 = \partial_-^{-1}\partial_-$ ein. Man betrachte also im folgenden nur diese Terme.

$$\text{Tr} \int d^3x \left\{ \bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M}(\phi\partial_- \phi^\dagger - \partial_- \phi\partial_-^{-1}\partial_- \phi^\dagger) - \mathcal{M}(\phi\bar{\partial}\partial_-^{-1}\partial_- \phi^\dagger - \bar{\partial}\phi\partial_-^{-1}\partial_- \phi^\dagger) \right\} \quad (4.35)$$

Jetzt integriert man partiell, und zwar in solcher Weise, daß am Ende jeder Summand einen Faktor $\partial_- \phi^\dagger$ enthält.

$$\text{Tr} \int d^3x \left[\{(\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M})\phi + \partial_-^{-1}(\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M}\partial_- \phi) - \bar{\partial}\partial_-^{-1}(\mathcal{M}\phi) - \partial_-^{-1}(\mathcal{M}\bar{\partial}\phi)\} \partial_- \phi^\dagger \right] \quad (4.36)$$

Zum Schluß setze ich alles zusammen.

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int d^3x \left\{ -2\omega\phi + (\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M})\phi + \partial_-^{-1}(\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M}\partial_- \phi) - \bar{\partial}\partial_-^{-1}(\mathcal{M}\phi) - \partial_-^{-1}(\mathcal{M}\bar{\partial}\phi) \right\} \partial_- \phi^\dagger = \\ = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \int d^3y \left(\frac{4}{g^2}\omega\mathcal{V}(\mathbf{y})\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\mathcal{V}(\mathbf{y})} - 2\omega\psi(\mathbf{y})\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})} \right) \right\} \partial_- \phi^\dagger(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sind die Ausdrücke in den geschweiften Klammern gleich, so wird obige Gleichung erfüllt. Also:

$$\begin{aligned} -2\omega\phi + (\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M})\phi + \partial_-^{-1}(\bar{\partial}\partial_-^{-1}\mathcal{M}\partial_- \phi) - \bar{\partial}\partial_-^{-1}(\mathcal{M}\phi) - \partial_-^{-1}(\mathcal{M}\bar{\partial}\phi) = \\ = \int d^3y \left(\frac{4}{g^2}\omega\mathcal{V}(\mathbf{y})\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\mathcal{V}(\mathbf{y})} - 2\omega\psi(\mathbf{y})\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.3 Impulsraum

Genau wie im Yang-Mills-Fall soll diese Gleichung nun in den Impulsraum transformiert werden. Am Verfahren ändert sich nichts, die Lösung lautet:

$$2\omega_1\phi_1 - i \int \frac{d^3k_2 d^3k_3}{(2\pi)^3} \alpha_{123} \mathcal{M}_2 \phi_3 \delta(k_1 - k_2 - k_3) = \int d^3p \left[2\omega_p \psi_p \frac{\delta\phi_1}{\delta\psi_p} - \frac{4}{g^2} \omega_p \mathcal{V}_p \frac{\delta\phi_1}{\delta\mathcal{V}_p} \right] \quad (4.38)$$

mit

$$\alpha(k_1, k_2, k_3) = \alpha_{123} = \zeta_2 - (k_1)_-^{-1} \zeta_2 (k_3)_- - \zeta_1 + (k_1)_- \bar{k}_3 \quad (4.39)$$

4.4 Lösung

Auch dieser Schritt verläuft ähnlich zum reinen Yang-Mills-Fall. Dennoch gibt es einige Abweichungen. Zum ersten werden wir hier vor allem mit dem $U(2)$ -Feld \mathcal{M} arbeiten und dieses auf das Feld \mathcal{N} abbilden. Zweitens enthält die Entwicklung für ϕ unter anderem Eichfelder, die Entwicklung von ϕ besteht also nicht nur aus ψ -Feldern. Dies wurde bereits durch die kanonische Transformationsgleichung (4.33) angedeutet. Betrachtet man die Lagrangedichte \mathcal{L}^{++-} wird ebenfalls klar, warum Eichfelder in der Skalarfeldentwicklung auftreten müssen: In \mathcal{L}^{++-} stehen zwei Terme, in denen Eichfelder und Skalarfelder gekoppelt sind. Dieser Tatsache muß bei der Feldentwicklung Rechnung getragen werden.

$$\phi_1 = \sum_{i=2}^n \int d^3k_2 \dots d^3k_n \Gamma_{1\dots n} \mathcal{N}_2 \dots \mathcal{N}_{n-1} \psi_n \quad (4.40)$$

Die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten heißen hier Γ . Für die Eichfelder benutzt man folgende Feldentwicklung.

$$\mathcal{M}_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \int d^3k_2 \dots d^3k_n \Upsilon_{1\dots n} \mathcal{N}_2 \dots \mathcal{N}_n \quad (4.41)$$

Diese Entwicklung ist bereits aus dem Yang-Mills-Fall bekannt und stimmt mit diesem überein. Das bedeutet: Die Entwicklungskoeffizienten hier sind genau dieselben wie im vorigen Kapitel. Da wir nach $U(2)$ -Feldern entwickeln, gibt es einen kleinen Unterschied: Die Algebraindices a, a_1, \dots, a_n von Υ laufen von 0 bis 4. Der Fall $a_i = 0$ entspricht dann $N = B$. Aus Konsistenzgründen verlangen wir zusätzlich:

$$\Upsilon^{00} = 1 \quad (4.42)$$

$$\Upsilon^{aa_1 \dots a_i=0 \dots a_n} = 0 \quad (4.43)$$

Damit wird berücksichtigt, daß die B -Felder nicht mittransformiert werden, oder, anders betrachtet, könnte man sagen, daß die B -Felder trivial mittransformiert werden. Mithilfe dieser beiden Zusatzregeln können wir nun in der Zielgleichung alle \mathcal{V} -Felder durch \mathcal{N} -Felder ersetzen.

$$2\omega_1 \phi_1 - i \int \frac{d^3k_2 d^3k_3}{(2\pi)^3} \alpha_{123} \mathcal{M}_2 \phi_3 \delta(k_1 - k_2 - k_3) = \int d^3p \left[2\omega_p \psi_p \frac{\delta\phi_1}{\delta\psi_p} - \frac{4}{g^2} \omega_p \mathcal{N}_p \frac{\delta\phi_1}{\delta\mathcal{N}_p} \right] \quad (4.44)$$

4.4.1 Erste Ordnung

Entwicklung nach einem Feld:

$$\phi_1 = \int d^3 k_2 \Gamma_{12} \psi_2 \quad (4.45)$$

Einsetzen in die Zielgleichung (4.44). Man beachte, daß in erster Ordnung der Mischterm $-i \int \frac{d^3 k_2 d^3 k_3}{(2\pi)^3} \alpha_{123} \mathcal{M}_2 \phi_3 \delta(k_1 - k_2 - k_3)$ nicht beiträgt. Ebenso fällt der Term $-\frac{4}{g^2} \omega_p \mathcal{N}_p \frac{\delta \phi_1}{\delta \mathcal{N}_p}$ heraus, da die Ableitung $\frac{\delta \phi_1}{\delta \mathcal{N}_p}$ Null liefert. Es bleibt

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \int d^3 k_2 \Gamma_{12} \psi_2 &= 2 \int d^3 p \omega_p \psi_p \frac{\delta}{\delta \psi_p} \int d^3 k_2 \Gamma_{12} \psi_2 \\ \omega_1 \int d^3 k_2 \Gamma_{12} \psi_2 &= 2 \int d^3 p \omega_p \psi_p \Gamma_{1p} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Diese Gleichung entspricht genau (3.51) aus dem reinen Yang-Mills-Fall. Wir schreiben einfach die Lösung ab.

$$\Gamma_{12} = \delta(k_1 - k_2) \quad (4.47)$$

4.4.2 Zweite Ordnung

Entwicklung bis zu einem Eichfeld \mathcal{N} . Diesmal tragen alle Terme bei; jedoch entwickeln wir die Felder des Mischterms nur bis zur ersten Ordnung.

$$\phi_1 = \int d^3 k_2 d^3 k_3 \Gamma_{123} \mathcal{N}_2 \psi_3 \quad (4.48)$$

Damit lautet die Zielgleichung:

$$\begin{aligned} \int d^3 k_2 d^3 k_3 (2\omega_1) \Gamma_{123} \mathcal{N}_2 \psi_3 - i \int \frac{d^3 k_2 d^3 k_3}{(2\pi)^3} \alpha_{123} \mathcal{N}_2 \psi_3 &= \\ = \int d^3 k_2 d^3 k_3 (2\omega_3) \Gamma_{123} \mathcal{N}_2 \psi_3 - \int^3 k_2 d^3 k_3 \frac{4}{g^2} \omega_2 \Gamma_{123} \mathcal{N}_2 \psi_3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Vergleich der Integralkerne:

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \Gamma_{123} - \frac{i}{(2\pi)^3} \alpha_{123} &= \left(2\omega_3 - \frac{4}{g^2} \omega_2 \right) \Gamma_{123} \\ \Rightarrow \Gamma_{123} &= \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_1 + 4g^{-2}\omega_2 - 2\omega_3} \alpha_{123} \end{aligned} \quad (4.50)$$

4.4.3 Rekursion

Nachdem wir uns die Lösungen für zwei einfache Fälle verschafft haben, sind wir gerüstet, den allgemeinen Fall anzupacken. Auch hier wird sich, analog zum vorigen Kapitel, eine Rekursion ergeben. Da die zu lösende Gleichung gegenüber vorher leichte Modifikationen erfahren hat, erwarten wir auch, daß die Lösung ein wenig anders aussieht. Die Rechenschritte sind jedoch genau die gleichen, weswegen sie hier nicht präsentiert werden.

$$\begin{aligned}
 & \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \Gamma_{1\dots n+1} \mathcal{N}_2 \dots \mathcal{N}_n \psi_{n+1} \delta(\sum_{i=1}^{n+1} k_i) - \\
 & - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \sum_{j=2}^n \alpha_{1,-(2;j),-(j+1;n+1)} \Upsilon_{(-)2\dots j} \Gamma_{(-)j+1\dots n+1} \mathcal{N}_2 \dots \mathcal{N}_n \psi_{n+1} \delta(\sum_{i=1}^{n+1} k_i) = \\
 & = \int d^3 k_2 \dots d^3 k_{n+1} \Gamma_{1\dots n+1} \left[\frac{4}{g^2} \sum_{i=2}^n \omega_i + 2\omega_{n+1} \right] \mathcal{N}_2 \dots \mathcal{N}_n \psi_{n+1} \delta(\sum_{i=1}^{n+1} k_i) \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

wobei $\alpha_{1,-(2;j),-(j+1;n+1)} = \alpha(k_1, -\sum_{i=2}^j k_i, -\sum_{i=j+1}^{n+1} k_i)$. Vergleich der Integralkerne:

$$\Gamma_{1\dots n+1} = \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_{1,-(2;j),-(j+1;n+1)}}{2\omega_1 + 4g^{-2} \sum_{i=2}^n \omega_i - 2\omega_{n+1}} \Upsilon_{(-)2\dots j} \Gamma_{(-)j+1\dots n+1} \quad (4.52)$$

Offensichtlich ist für die rekursive Berechnung der höheren Γ auch die Kenntnis der Υ -Koeffizienten erforderlich.

4.5 Einfluß der spontanen Symmetriebrechung

Bisher haben wir den Formalismus zur Herleitung einer Rekursionsbeziehung in Anwesenheit eines zusätzlichen Skalarfeldes durchgezogen. Dabei haben wir der Tatsache, daß die Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung gebrochen ist, keine Beachtung geschenkt. Das wollen wir nun nachholen.

4.5.1 Eichboson-Skalar-Kopplung

Es bietet sich also an, der folgenden Fragestellung nachzugehen: Das Feld ϕ ist kein gewöhnliches physikalisches Feld, da es einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert besitzt. Damit läßt sich ϕ schreiben als $\phi(x) = \phi_0 + \phi_{\text{neu}}(x)$, wo ϕ_0 dieser Vakuumerwartungswert ist. Das bedeutet, daß in der Lagrangedichte \mathcal{L}^{+-} eine Kopplung von Eichfeld und

Skalarfeld auftreten könnte, die dann in folgender Feynmanregel resultiert:

$$W, B \sim \text{wavy line} \text{---} H$$

Diese Kopplung wäre sehr unangenehm, da sie die Umwandlung eines Eichbosons in ein skalares Teilchen ermöglichte. Ein solcher Effekt ist aber aus der elektroschwachen Wechselwirkung nur von bestimmten Eichungen bekannt. Er tritt jedoch, wie sich anhand der nachfolgenden kleinen Rechnung einsehen läßt, nicht auf. Dafür greifen wir uns aus \mathcal{L}^{+-} die Kopplungsterme von \mathcal{M} und ϕ heraus und berechnen sie gesondert in der Darstellung $\phi = \phi_0 + \phi_{\text{neu}}$.

$$\begin{aligned} & \partial \partial_-^{-1} \overline{\mathcal{M}} [(\phi_0 + \phi_{\text{neu}}) \partial_- (\phi_0 + \phi_{\text{neu}})^\dagger - \partial_- (\phi_0 + \phi_{\text{neu}}) (\phi_0 + \phi_{\text{neu}})^\dagger] - \\ & - \mathcal{M} [(\phi_0 + \phi_{\text{neu}}) \partial (\phi_0 + \phi_{\text{neu}})^\dagger - \partial (\phi_0 + \phi_{\text{neu}}) (\phi_0 + \phi_{\text{neu}})^\dagger] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Für das angesprochene Problem sind ausschließlich Terme mit zwei Feldern relevant.

$$\partial \partial_-^{-1} \overline{\mathcal{M}} \phi_0 \partial_- \phi_{\text{neu}}^\dagger - \partial \partial_-^{-1} \overline{\mathcal{M}} \partial_- \phi_{\text{neu}} \phi_0^\dagger - (\overline{\mathcal{M}} \phi_0 \partial \phi_{\text{neu}}^\dagger - \overline{\mathcal{M}} \partial \phi_{\text{neu}} \phi_0) \quad (4.54)$$

Partielle Integration liefert:

$$\overline{\mathcal{M}} \left[\phi_0 \partial \phi_{\text{neu}}^\dagger - \partial \phi_{\text{neu}} \phi_0^\dagger - \phi_0 \partial \phi_{\text{neu}}^\dagger + \partial \phi_{\text{neu}} \phi_0 \right] = 0 \quad (4.55)$$

Besteht eventuell die Möglichkeit, daß durch die Transformation Terme entstehen, die einen solchen Prozess beschreiben?

Um diese Frage zu beantworten, setzt man die Feldentwicklungen für \mathcal{M} und für ϕ ein. Dabei sind wiederum nur Terme mit zwei Feldern relevant. Sie entsprechen den untersten Ordnungen der Entwicklungen. Höhere Ordnungen würden Terme mit mehr Feldern liefern und brauchen daher nicht betrachtet zu werden. In nullter (unterster) Ordnung finden wir $\Gamma_{12} = \Upsilon_{12} = \delta(k_1 - k_2)$. Ergo:

$$\phi_1 = \int d^3 k_2 \Gamma_{12} \psi_2 = \psi_1 \quad (4.56)$$

$$\mathcal{M}_1 = \int d^3 k_2 \Upsilon_{12} \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 \quad (4.57)$$

Vom neuen Feld ψ erwartet man, daß es sich ebenfalls gemäß $\psi(x) = \psi_0 + \psi_{\text{neu}}(x)$ zerlegen läßt. Damit ist sofort klar, daß diese Kopplung auch durch die Transformation nicht in die Theorie gelangen kann.

4.5.2 Potentialverschiebung

Eine weitere Frage, die ich beleuchten möchte, ist, ob durch die neuen Terme

$$+\frac{1}{4}(g^2 - g'^2) \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \partial_-^{-2} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \quad \text{und} \quad -\frac{g^2}{2} \text{Tr} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) \partial_-^{-2} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) \quad (4.58)$$

in \mathcal{L}^{++--} das Minimum des Potentials des Skalarfeldes ϕ verschoben wird. Diese Terme bestehen aus einer Kombination von Ableitungen von ϕ und sind daher als eine Art “impulsabhängiger” Beitrag zum Potential zu verstehen. Um den Einfluß der beiden “Impulsterme” auf das Minimum des Potentials zu analysieren, setzt man $\phi(x) = \phi_0 + \phi_{\text{neu}}(x)$ in die entsprechenden Lagrangedichten ein. In dieser Form ist ϕ_0 eine Konstante, normalerweise der Vakuumerwartungswert von ϕ , und in $\phi_{\text{neu}}(x)$ steckt die Dynamik. Zunächst widmet man sich dem linken der beiden Ausdrücke. Im ersten Schritt integriert man partiell und erhält

$$\partial_-^{-1} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \partial_-^{-1} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \quad (4.59)$$

Dieser Term ist offenbar quadratisch, betrachte also im folgenden nur noch einen Faktor. Löse zuerst den $\overleftrightarrow{\partial}_-$ -Operator auf.

$$\begin{aligned} & \partial_-^{-1} \left(\phi_0^\dagger \partial_- \phi_{\text{neu}} + \phi_{\text{neu}}^\dagger \partial_- \phi_{\text{neu}} - \partial_- \phi_{\text{neu}}^\dagger \phi_0 - \partial_- \phi_{\text{neu}}^\dagger \phi_{\text{neu}} \right) \\ &= \left[\phi_0^\dagger \phi_{\text{neu}} - \phi_{\text{neu}}^\dagger \phi_0 \right] + \partial_-^{-1} \left[\phi_{\text{neu}} \partial_- \phi_{\text{neu}} - \partial_- \phi_{\text{neu}}^\dagger \phi_{\text{neu}} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Das Minimum des Potentials ist dort, wo $\phi_{\text{neu}} = 0$. Setzt man dies in den obigen Ausdruck ein, so verschwindet er und mit ihm die gesamte Lagrangedichte, deren Teil er ist. Analoge Rechnung läßt $-\frac{g^2}{2} \text{Tr} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) \partial_-^{-2} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right)$ ebenfalls verschwinden.

Bei dieser Rechnung gibt es aber noch eine Feinheit zu beachten: Alle Funktionen, die sich um eine Konstante unterscheiden, werden beim Ableiten auf dieselbe Ableitungsfunktion abgebildet. Wendet man nun einen inversen Differentialoperator an, wie in obiger Rechnung geschehen, so ergibt sich bei dieser Umkehrabbildung eine Mehrdeutigkeit. Um dieses Problem zu beseitigen, schränkt man den Funktionenraum, aus dem $\phi_{\text{neu}}(x)$ stammen darf, auf eine spezielle Klasse ein. Man fordert, daß ϕ_{neu} im Unendlichen nach Null abfallen muß. In Formeln

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_{\text{neu}}(x) = 0 \quad (4.61)$$

Diese Klasse kann eindeutig aus ihrer Ableitung rekonstruiert werden, womit die obige Rechnung ihre Gültigkeit erhält.

4.6 Diskussion

4.6.1 Ausblick

Die anschließenden Schritte bis zur MHV-Regel entsprechen weitestgehend denen des reinen Yang-Mills-Falles. Zunächst müssen die Rekursion gelöst und die Entwicklungskoeffizienten für ϕ^\dagger gefunden werden. Damit schreibt man dann die Lagrangedichte auf MHV-Form um. Hier gibt es jedoch zwei Abweichungen zum vorigen Kapitel. Wie eingangs (Kapitel 4.2) angedeutet, liefert der Massenterm $m^2\phi^\dagger\phi$ eine eigene MHV-Regel, indem man dort die Entwicklungen für ϕ^\dagger und ϕ einsetzt. Ferner haben wir bis jetzt immer mit den (unphysikalischen) kartesischen Feldern gerechnet. Es wird also nötig sein, eine Transformation vorzunehmen, um die MHV-Regeln auf den physikalischen Feldern \mathcal{W}^\pm , \mathcal{Z}^0 und H zu formulieren.

4.6.2 Rückblick

Wie in der Einleitung erwähnt, ist für die Entdeckung von Signalen “neuer” Physik am LHC die genaue Kenntnis der bisherigen Physik von großem Nutzen. Speziell geht es um Prozesse mit einer großen Anzahl an Partonen und die Ermittlung der Higgsmasse. Dabei wird heutzutage vor allem auf die maschinelle Berechnung der zugehörigen Amplituden zurückgegriffen. Auf diesem Gebiet sind in den letzten zwanzig Jahren erstaunliche Fortschritte gemacht worden. Ausgehend von der Beobachtung, daß die Amplituden der Eichtheorien einfachere Strukturen haben, als die gewöhnlichen Feynmandiagramme suggerieren, sind diverse Techniken entwickelt worden, die eine drastische Reduktion der Rechenlast erlauben. Ein herausragender Erfolg war die Entdeckung der MHV-Amplitude und der Beweis ihrer Gültigkeit. Ein weiterer ihre Einbindung in den Formalismus der CSW-Regeln, die ihre Nützlichkeit nochmals erhöht hat, weil dadurch die Berechnung beliebiger Helizitätsamplituden ermöglicht wird. Mit der Übertragung der MHV-Technik auf den elektroschwachen Fall zielt diese Diplomarbeit darauf ab, den Anwendungsbereich MHV-Amplitude noch weiter auszubauen.

4.6.3 Zusammenfassung

Was haben wir gelernt?

Die von Mansfield und Eittle vorgestellte Methode der Transformation auf eine MHV-Lagrangedichte hilft zu verstehen, warum die Parke-Taylor-Amplitude so einfach ist. Es zeigt sich nämlich, daß diese Einfachheit bereits in der Lagrangedichte eingebaut ist, und nur durch die Wahl der Koordinaten verborgen wird. Folglich kann sie durch den Wechsel der Koordinaten sichtbar gemacht werden. Günstigerweise ist dieser Koordinatenwechsel kanonisch, womit sichergestellt wird, daß die Dynamik unangetastet bleibt.

Zudem ist der beschriebene Weg konstruktiv. Hat man ihn einmal verstanden, so kann man ihn auf andere Quantenfeldtheorien anwenden und dort die zugehörigen MHV-Regeln gewinnen. In diesem Zusammenhang muß selbstverständlich berücksichtigt werden, daß andere Quantenfeldtheorien auch anders aufgebaut sind. Insofern kommt der korrekten Behandlung der Abweichungen zentrale Bedeutung zu.

Die Vorteile der maschinellen Berechnung von Feynmandiagrammen über MHV-Amplituden können so auf andere Quantenfeldtheorien ausgedehnt werden.

Im elektroschwachen Fall gibt es zwei Abweichungen zu beachten. Zum ersten sind verschiedene Feldsorten beteiligt. Die \mathcal{W} -Felder sind nichtabelsch, die \mathcal{B} -Felder abelsch. Beide sind algebrawertig im Unterschied zum Skalarfeld ϕ . Insbesondere treten auch Kopplungsterme dieser drei Felder auf. Zum zweiten ist die Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung gebrochen, weil das Feld ϕ einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert annimmt. Dies eröffnet die Möglichkeit für Effekte wie die Eichboson-Skalar-Kopplung oder die Potentialverschiebung. Während die direkte Kopplung von Eichbosonen an Skalare im schlimmsten Falle eine Verkomplizierung darstellt, ist das Auftreten einer Potentialverschiebung ein echtes Problem, da korrekte Behandlung eines impulsabhängigen Potentials in diesem Zusammenhang unklar ist. Es kann jedoch gezeigt werden, daß beide Effekte glücklicherweise nicht auftreten.

4.A Fierzidentität

Ziel: Der Ausdruck $\sigma_{ij}^a \sigma_{kl}^a$ soll einfacher gefasst werden.

σ_{ij}^a transformiert unter der fundamentalen Darstellung der Gruppe $G = SU(2)$, während σ_{kl}^a dies unter $G' = SU(2)$ tut. Daher muß der neue Ausdruck eine Linearkombination dieser zwei möglichen Arrangements von Indices sein [9]. Ansatz:

$$\sigma_{ij}^a \sigma_{kl}^a = A \delta_{il} \delta_{kj} + B \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.62)$$

Kontrahiert man diesen nun mit δ_{il} führt dies auf

$$3 = 2A + B \quad (4.63)$$

Kontraktion mit δ_{ij} liefert

$$0 = A + 2B \quad (4.64)$$

Dieses Gleichungssystem wird von $A = 2$ und $B = -1$ gelöst. Damit lautet die Fierzidentität für zwei σ -Matrizen:

$$\sigma_{ij}^a \sigma_{kl}^a = 2\delta_{il} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.65)$$

Diese soll auf

$$-\frac{g^2}{4} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\sigma} \partial_- \phi \right) \partial_-^{-2} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\sigma} \partial_- \phi \right) \quad (4.66)$$

angewendet werden. Zunächst wechselt man in Komponentenschreibweise.

$$\begin{aligned} & -\frac{g^2}{4} \left(\phi_i^\dagger \sigma_{ij}^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j \right) \partial_-^{-2} \left(\phi_k^\dagger \sigma_{kl}^a \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_l \right) \\ & -\frac{g^2}{4} \left(\phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j \right) \sigma_{ij}^a \sigma_{kl}^a \partial_-^{-2} \left(\phi_k^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_l \right) \\ & -\frac{g^2}{4} \left(\phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j \right) [2\delta_{il} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kl}] \partial_-^{-2} \left(\phi_k^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_l \right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Jetzt sortiert man nach Termen mit Faktor zwei und ohne. Behandle zuerst diejenigen mit.

$$\begin{aligned} & -\frac{g^2}{2} \left(\phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j \right) \delta_{il} \delta_{kj} \partial_-^{-2} \left(\phi_k^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_l \right) \\ & -\frac{g^2}{2} \left(\phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j \right) \partial_-^{-2} \left(\phi_j^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_i \right) \\ & -\frac{g^2}{2} \text{Tr} \left(\phi_j \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_i^\dagger \right) \partial_-^{-2} \left(\phi_i \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j^\dagger \right) \\ & -\frac{g^2}{2} \text{Tr} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) \partial_-^{-2} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Jetzt die Terme mit Faktor minus Eins.

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{4} \left(\phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_j \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \partial_-^{-2} \left(\phi_k^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_l \right) \\
& \frac{g^2}{4} \left(\phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_i \right) \partial_-^{-2} \left(\phi_k^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi_k \right) \\
& \frac{g^2}{4} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \partial_-^{-2} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right)
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Zusammen:

$$-\frac{g^2}{2} \text{Tr} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) \partial_-^{-2} \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_- \phi^\dagger \right) + \frac{g^2}{4} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \partial_-^{-2} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_- \phi \right) \tag{4.70}$$

4 Anwendung auf den elektroschwachen Eichbosonensektor

Literaturverzeichnis

- [1] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” J. Phys. G **33** (2006) 1.
- [2] S. J. Parke and T. R. Taylor, “An Amplitude for n Gluon Scattering,” Phys. Rev. Lett. **56**, 2459 (1986).
- [3] F. A. Berends and W. T. Giele, “Multiple Soft Gluon Radiation in Parton Processes,” Nucl. Phys. B **313**, 595 (1989).
- [4] F. Cachazo, P. Svrcek and E. Witten, “MHV vertices and tree amplitudes in gauge theory,” JHEP **0409** (2004) 006 [arXiv:hep-th/0403047].
- [5] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng and E. Witten, “Direct Proof Of Tree-Level Recursion Relation In Yang-Mills Theory,” Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 181602 [arXiv:hep-th/0501052].
- [6] J. H. Eittle, “MHV Lagrangians for Yang–Mills and QCD,” arXiv:0808.1973 [hep-th].
- [7] S. Scherer, “Introduction to chiral perturbation theory,” Adv. Nucl. Phys. **27** (2003) 277 [arXiv:hep-ph/0210398].
- [8] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p*
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction To Quantum Field Theory,” *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p*
- [10] R. Boels and C. Schwinn, “Deriving CSW rules for massive scalar legs and pure Yang-Mills loops,” JHEP **0807** (2008) 007 [arXiv:0805.1197 [hep-th]].

- [11] P. Mansfield, “The Lagrangian origin of MHV rules,” JHEP **0603** (2006) 037 [arXiv:hep-th/0511264].
- [12] Vorlesung von Stefan Weinzierl: Einführung in die Elementarteilchenphysik
- [13] S. Weinzierl, “Automated calculations for multi-leg processes,” PoS **ACAT** (2007) 005 [arXiv:0707.3342 [hep-ph]].